CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV



EDITORIAL MIR MOSCÚ

1


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

МОСКВА «НАУКА»

CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

I

MECÁNICA
FÍSICA MOLECULAR

Traducido al español
por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URRS.

SEGUNDA PARTE
FÍSICA MOLECULAR Y TERMODINÁMICA

PRÓLOGO

En la creación del manual de física general en tres tomos, que ofrecemos al lector, el autor ha trabajado durante 20 años. La primera variante del curso fue parcialmente modificada casi en cada una de las reediciones en ruso (en total el manual ha sufrido cinco ediciones de los tomos primero y segundo y cuatro, del tercero). En 1977, 1978 y 1979 vieron la luz en ruso el primero, segundo y tercer tomos de la nueva variante del curso. Ésta tanto se diferencia de los anteriores tres tomos por su espíritu, nivel y acceso a la exposición de muchos de los problemas, que con sólido fundamento puede ser considerado como un curso de física escrito de nuevo.

Al escribir este curso el autor ha tendido a presentar la física no como una ciencia para «empollar», no como cierto volumen de información que hay que asimilar, sino como una ciencia lógica y bella. Debe ser el lector el que ha de decidir si se ha conseguido esto o no.

El autor reconoce que este grueso manual, sólo por su aspecto, causa en el estudiante una impresión deprimente, por lo que se ha tratado de limitar el volumen del curso. Esto se ha conseguido seleccionando minuciosamente el material que, según nuestra opinión, debía ser incluido en el libro. Además, hemos intentado ser breves (pero no en perjuicio de la claridad de exposición).

A pesar de tender a la reducción del volumen, hemos considerado necesario incluir en el curso una serie de parágrafos matemáticos: acerca de los vectores, ecuaciones diferenciales lineales, nociones fundamentales de la teoría de la relatividad, etc. Hemos hecho esto para dar a las correspondientes nociones y correlaciones matiz «físico». Además, las «inclusiones» matemáticas permiten durante la exposición de la física, ir adelante incluso cuando en el curso de matemáticas el correspondiente material no ha sido todavía estudiado (lo que sucede con frecuencia).

El presente curso está destinado, en primer lugar, a los centros de enseñanza técnica superior con programa de física ampliado. Sin embargo, la exposición se ha confeccionado de tal modo que, omitiendo ciertos lugares, este libro puede ser utilizado como manual de estudio en los centros de enseñanza superior con programa corriente de física. En las «Recomendaciones metodológicas», antepuestas al texto fundamental, junto con otros materiales se ofrece una rela-

ción aproximada de reducciones (es decir, abreviaciones en el texto), que pueden hacerse al faltar tiempo para estudiar el libro en su volumen total.

En conclusión, expreso mi agradecimiento a N. B. Narozhni a quien le pertenece la original y relativamente breve deducción estadística de la correlación $dS = d'Q/T$ (véase la fórmula (103.20)).

I. V. Savéliev

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS

Las presentes recomendaciones contienen indicaciones sobre aquellos aspectos en la esencia de ciertas cuestiones, a las que, por regla, no se presta la necesaria atención. Además, se da una relación aproximada de los capítulos y parágrafos aislados, cuyo estudio no es obligatorio al faltar tiempo para estudiar el volumen completo del curso. Dicha relación expresa el punto de vista personal del autor y sólo tiene carácter recomendatorio.

1. Muchas de las magnitudes físicas son vectoriales. Por esta causa, la asimilación correcta de la información acerca de los vectores, ofrecida en el § 2, es una premisa obligatoria para el trabajo exitoso con el libro.

Hay que prestar atención a que las expresiones $|\Delta\mathbf{a}|$ (o bien $|d\mathbf{a}|$) y $\Delta a = \Delta|\mathbf{a}|$ (o bien $da = d|\mathbf{a}|$) no son idénticas. En ocasiones se tropieza con la mezcla de estas expresiones.

2. La noción de valor medio desempeña en física importante papel. Por esta razón, se debe alcanzar una buena asimilación de las fórmulas (3.20) — (3.22). Hay que recordar que los valores medios pueden ser diferentes: se puede hablar del valor medio según el tiempo, el valor medio por un segmento de una línea (por ejemplo, por el sector de una trayectoria), por una superficie, un volumen, el valor medio respecto de las partículas, etc.

Es útil recordar que el valor medio por el período del cuadrado del seno o coseno es igual a 1/2. En una serie de casos, esto liberará de la necesidad de calcular las correspondientes integrales.

3. En lugar del término «variación», que no es unívoco, hay que hacer uso de los términos «incremento» y «decrecimiento» (véase la observación al pie de la pág. 82). Es frecuente tropezar con cierta prevención contra estos términos, condicionada por el hecho de que el término «incremento» se asocia con aumento, crecimiento de la magnitud y el término «decrecimiento», con disminución, empequeñecimiento de la magnitud. Estas asociaciones son ilícitas y deben ser descartadas y partir de las definiciones:

$$\text{incremento} = a_{\text{final}} - a_{\text{inicial}} = \Delta a \ (\text{ó } da),$$

$$\text{decrecimiento} = a_{\text{inicial}} - a_{\text{final}} = -\Delta a \ (\text{ó } -da).$$

De las definiciones se desprende que el incremento y el decrecimiento son magnitudes algebraicas, es decir, pueden ser no sólo positivas, sino que también negativas. En el caso de incremento negativo, la magnitud dada no crece, sino que disminuye; en el caso de decrecimiento negativo la magnitud dada no disminuye, sino que crece.

Para mostrar la insuficiencia del término «variación», comparemos dos fórmulas:

$$A_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T \ (\text{véase } (19.11)),$$

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \ (\text{véase } (22.1)).$$

En la primera fórmula entra el *incremento* de la energía cinética, en la segunda, el *decrecimiento* de la energía potencial. Si en los dos casos hacemos uso del término «variación», el carácter de ésta queda indefinido.

4. En el § 14 "Fuerzas elásticas" podemos limitarnos al estudio sólo de los primeros párrafos, en los que se trata de la ley de Hooke para un muelle. La parte restante del párrafo, donde se aduce la fórmula (14.3), puede ser omitida. De forma correspondiente, en el § 20 "Trabajo" puede *no* estudiarse la fórmula (20.3), en el § 25 «Energía de la deformación elástica» pueden no considerarse las fórmulas (25.2) — (25.5).

5. Los parágrafos 30 «Movimiento en el campo central de fuerzas» y 31 «Problema de los dos cuerpos», pueden omitirse.

6. En el § 34 «Fuerza de Coriolis» podemos limitarnos a la deducción de la fórmula (34.3) para el caso de movimiento del cuerpo por una circunferencia y expresar sin demostración la afirmación de que dicha fórmula es válida también en cualquier otro caso. Parte del parágrafo que empieza en el párrafo donde se encuentra la fórmula (34.4) y que acaba en el párrafo en el que se da la fórmula (34.16), puede ser excluida.

7. El parágrafo 35 «Principios de conservación en sistemas no inerciales de referencia», puede omitirse.

8. El parágrafo 40 «Concepto de tensor de inercia» puede ser excluido, lo mismo que la segunda parte del § 41, en la que se deduce la expresión de la energía cinética mediante el tensor de inercia. No obstante, hay que llamar la atención de los estudiantes a que la fórmula (41.1) sólo es válida en ciertos casos particulares (véase el último párrafo del § 41).

9. El parágrafo 44 «Giroscopios» puede ser omitido.

10. En el § 46 «Campo gravitatorio» es posible omitir la segunda parte, que comienza en el párrafo tras la fórmula (46.7).

11. En el § 47 se puede omitir la descripción del experimento de Eötvös.

12. En el § 60 «Vibraciones forzadas» es suficiente estudiar sólo uno de los dos procedimientos aducidos para hallar la solución particular: o el procedimiento en el que se hace uso de la función compleja, o bien el procedimiento en el que es empleado el diagrama vectorial.

13. En el § 63 la transformación de Lorentz puede ser dada sin demostración. Es conveniente recordar dicha transformación en la fórmula (63.17).

14. En el § 68 puede omitirse la fórmula (68.4).

15. El capítulo IX «Hidrodinámica» puede no ser incluido en la variante mínima del programa.

16. En el § 95 «Números de choques de las moléculas contra la pared» podemos limitarnos a la deducción simplificada de la fórmula (95.7), señalando que una deducción más rigurosa sólo lleva a un valor más preciso del coeficiente numérico: 1/4 en lugar de 1/6. En lo que se refiere al texto, que contiene las fórmulas (95.1) — (95.6), puede ser omitido.

17. En el § 96 «Presión del gas contra la pared» también podemos limitarnos a la deducción de la fórmula (96.4), omitiendo los cálculos que conducen a las fórmulas (96.1) y (96.2). Hay que remarcar que, a pesar de que la deducción está simplificada, obtenemos un resultado preciso inclusive hasta el valor del coeficiente numérico.

18. En el § 98 «Distribución de Maxwell» es posible no estudiar la deducción de las funciones (98.13) y (98.14), así como el cálculo del valor del factor normalizante A y el hallazgo de la expresión (98.26) para la velocidad media de las moléculas.

19. En el § 103 «Entropía» puede omitirse el texto que comienza en el párrafo que sigue tras la fórmula (103.4) y que finaliza antes de la fórmula (103.20), limitándonos a la afirmación: «Es posible mostrar que durante un proceso reversible, acompañado de la transmisión del exterior al sistema la cantidad de calor $d'Q$, la entropía del sistema recibirá un incremento determinado por la fórmula (103.20) (el sistema que recibe calor del exterior no es aislado, por lo que su entropía no debe conservarse obligatoriamente durante el proceso)».

20. Los §§ 106 y 108 pueden omitirse.

21. En el § 109 «Potenciales termodinámicos» podemos limitarnos sólo a la

consideración del texto que se refiere a la energía libre, hasta la fórmula (109.12), inclusive.

22. En el § 111 «Clasificación de los cristales» no se debe tratar de retener en la memoria las denominaciones y definiciones de los sistemas cristalográficos.

23. El § 113 «Defectos en los cristales» puede omitirse.

Remarquemos una vez más, que la relación aducida de las reducciones es estrictamente aproximada. En dependencia de las circunstancias puede variarse o amplificarse a deseo del profesor.

INTRODUCCIÓN

Física es la ciencia acerca de las propiedades más generales y las formas de movimiento de la materia.

V. I. Lenin dio la definición clásica de la materia en su obra «Materialismo y empiriocriticismo»: «La materia es una categoría filosófica para designar la realidad objetiva, dada al hombre en sus sensaciones, calcada, fotografiada y reflejada por nuestras sensaciones y existente independientemente de ellas»[1]). En esta definición son de importancia dos tesis: 1) la materia es aquello que existe de modo objetivo, es decir, independientemente de la conciencia o los sentimientos sea de quien fuera y 2) la materia se copia, se refleja en nuestras sensaciones y, por esta causa, es cognoscible.

De la definición de la física sigue que en ella se concentra la teoría sobre las propiedades y fenómenos más generales del mundo externo. Como señaló el académico soviético S. I. Vavílov en uno de sus artículos, «la comunidad límite de la parte más considerable de la física, sus hechos y leyes desde tiempos remotos aproximaban la física a la filosofía... En ocasiones, las afirmaciones físicas son tales por su carácter que es difícil distinguir y separarlas de las afirmaciones filosóficas y, por lo tanto, el físico tiene que ser filósofo».

En la actualidad se conocen dos formas de materia: la sustancia y el campo. Al primer tipo de materia, es decir, a la sustancia, se refieren, por ejemplo, los átomos, las moléculas y todos los cuerpos formados por ellos. El segundo tipo de materia son los campos electromagnéticos, gravitacionales y otros. Diversos tipos de materia pueden transformarse unos en otros. Por ejemplo, el electrón y positrón (que son de por sí materia) pueden convertirse en fotones (es decir, en campo electromagnético). Puede también suceder el proceso inverso.

La materia se halla en movimiento permanente. En el materialismo dialéctico[2]) por movimiento se comprende, en general, toda variación. El movimiento es una propiedad inalienable de la mate-

---

[1]) Editorial «Progreso», Moscú, 1977, pág. 134.

[2]) El materialismo dialéctico es la filosofía marxista-leninista. El problema fundamental, radical de toda filosofía que consiste en qué es lo primario: la materia o la conciencia, en el materialismo dialéctico se resuelve a favor de la materia, afirmando que la materia es lo primario, en tanto que la conciencia, lo secundario; el método de dicha filosofía es la dialéctica, que considera la materia en constante movimiento y desarrollo, cuya fuente se encuentra en las contradicciones internas, propias de los mismos objetos y fenómenos.

ria, que no puede ser ni creada y destruida, como la propia materia. La materia existe y está en movimiento en el espacio y el tiempo, que son formas de existencia de la materia.

Las leyes físicas se establecen sobre la base de la generalización de hechos experimentales y expresan regularidades objetivas, existentes en la naturaleza. Por regla, dichas leyes se enuncian en forma de correlaciones cuantitativas entre diversas magnitudes físicas.

En física, el método fundamental de investigación es el experimento, es decir, la observación del fenómeno que se investiga en condiciones rigurosamente controlables, que permiten seguir la marcha del fenómeno y reproducirlo cada vez que se repitan dichas condiciones. De forma experimental pueden ser provocados fenómenos que en la naturaleza no se observan. Por ejemplo, más de diez elementos químicos de los que en la actualidad son conocidos, en la naturaleza no han sido aún hallados y fueron obtenidos de forma artificial en el transcurso de reacciones nucleares.

Para explicar los datos experimentales, se hace uso de las hipótesis. La hipótesis es una suposición científica que se expresa para explicar cierto hecho o fenómeno y que requiere comprobación y demostración con el fin de convertirse en teoría o ley científica. La comprobación de que la hipótesis expuesta es correcta, se verifica realizando los correspondientes experimentos, por medio de la aclaración de la concordancia de los corolarios que se desprenden de la hipótesis, con los resultados de los experimentos y observaciones. Una hipótesis que exitosamente pasó semejante comprobación y que fue demostrada, se transforma en una ley o teoría científica.

La teoría física es un sistema de ideas fundamentales que generalizan los datos experimentales y que reflejan las regularidades objetivas de la naturaleza. La teoría física nos explica un ámbito entero de fenómenos de la naturaleza desde un punto de vista único.

La física se divide en la llamada física clásica y física cuántica. La primera es aquella, cuya creación fue acabada a principios del siglo XX. El comienzo de la física clásica se debe a Newton, que enunció las leyes fundamentales de la mecánica clásica. La mecánica newtoniana resultó ser tan fructífera, tan potente, que entre los físicos se creó la impresión de que todo fenómeno físico podía ser explicado mediante las leyes newtonianas.

El edificio de la física clásica, creado hacia fines del siglo pasado, era en extremo armonioso. La mayoría de los físicos estaba convencida de que sobre la naturaleza conocían todo aquello que se puede conocer. Sin embargo, los físicos más perspicaces comprendían que dicho edificio tenía sus puntos débiles. Por ejemplo, el físico inglés U. Thomson (Lord Kelvin), decía que en el horizonte del cielo claro de la física clásica hay dos nubes oscuras: el fracaso de los intentos de crear la teoría de emisión de un cuerpo negro y la conducta contradictoria del éter, medio hipotético por el que, al parecer, se pro-

pagaban las ondas de luz. Los intentos perseverantes para vencer estas dificultades llevaron a inesperados resultados. Para resolver los problemas que eran irresolubles por medio de la física clásica, hubo que revisar de forma radical las representaciones formadas, habituales e introducir conceptos extraños al espíritu de la física clásica. Cuando Max Planck (1858—1947), introdujo la representación sobre la emisión de la luz por porciones aisladas — cuantos, resolvió en el año 1900 el problema de la emisión de un cuerpo negro. De este modo, en el umbral del siglo XX apareció la noción de cuanto, que en la física moderna desempeña un papel de exclusiva importancia y que llevó a la creación de la mecánica cuántica.

El carácter contradictorio de los hechos que se referían al éter, incitó a Albert Einstein (1879—1955) a revisar la representación de espacio-tiempo que desde los tiempos de Newton se consideraba evidente. Esto llevó a la creación de la teoría de la relatividad que para los cuerpos que se mueven a velocidades, notorias en comparación con la de la luz, ofrece las ecuaciones de movimiento que sustancialmente se diferencian de las ecuaciones de la mecánica newtoniana.

En 1897 fue descubierto el electrón, con la particularidad de que se puso en claro que éste entra en la composición de los átomos de todos los elementos químicos. Así fue establecida la complicada estructura de los átomos que antes se consideraban indivisibles.

Así, pues, el principio del siglo XX se distinguió en física por la transformación radical en ella de una serie de usuales nociones y representaciones. Los nuevos descubrimientos y teorías en física destruían las representaciones que los físicos tenían acerca de la estructura de la sustancia, lo que por algunos físicos fue interpretado como la desaparición de la materia. Muchos físicos se sumieron en el idealismo. Comenzó la crisis de la física.

En su obra «Materialismo y empiriocriticismo», escrita en 1908, V. I. Lenin criticó de modo aplastante el idealismo «físico». Lenin mostró que los nuevos descubrimientos certifican no la desaparición de la materia, sino la desaparición de aquel límite hasta donde conocíamos la materia en el momento dado. ««La materia desaparece» —escribió V. I. Lenin— quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la *única* «propiedad» de la materia, con cuya admisión está ligado materialismo filosófico es la propiedad de *ser una realidad objetiva*, de existir fuera de nuestra conciencia»[1]).

El proceso de conocimiento del mundo es infinito. En cada esca-

---

[1]) Editorial «Progreso», Moscú, 1977, pág. 274.

lón dado del desarrollo de las ciencias, nuestros conocimientos están condicionados por el nivel de los conocimientos alcanzados en el período histórico y no pueden ser considerados definitivos y completos. Por necesidad, ellos son conocimientos relativos, es decir, requieren desarrollo posterior, comprobación y precisión ulteriores. Al mismo tiempo, toda teoría en verdad científica, a pesar de ser relativa e incompleta, contiene elementos de carácter absoluto, o sea, de conocimiento completo, es un escalón en el conocimiento del mundo objetivo. Por ejemplo, hablando en rigor, la mecánica basada en las leyes de Newton es incorrecta. Pero para cierto círculo de fenómenos dicha mecánica es por completo satisfactoria. Es decir, el desarrollo de las ciencias no ha tachado la mecánica newtoniana, sino que sólo ha establecido los límites en los que ella es válida. La mecánica de Newton ha sido incluida en la física general como una de sus partes componentes.

El comienzo del siglo XX se caracteriza por intentos perseverantes de penetrar en la estructura interior de los átomos. La clave para aclarar la estructura de los átomos fue el estudio de los espectros atómicos. El primer asombroso éxito para la explicación de los espectros observados, nos lo proporcionó la teoría del átomo desarrollada por Niels Bohr en 1913. Sin embargo, dicha teoría portaba claros rasgos de inconsistencia: junto con el sometimiento del electrón en el átomo a las leyes de la mecánica clásica, dicha teoría imponía en dicho movimiento especiales limitaciones cuánticas. Por esta inconsistencia de la teoría hubo con rapidez que «pagar». Después de los primeros éxitos al explicar el espectro del átomo más sencillo —de hidrógeno— se manifestó la incapacidad de la teoría de Bohr para explicar la conducta de los átomos con dos y mayor número de electrones.

Maduró la necesidad de crear una nueva teoría enteriza de los átomos. Dio comienzo a la creación de dicha teoría la audaz hipótesis que expresó en 1924 Luis de Broglie. Hacia aquellos tiempos ya era conocido, que siendo un proceso ondulatorio, en una serie de casos la luz muestra al mismo tiempo naturaleza corpuscular. De Broglie expresó la idea de que, a su vez, las partículas de la sustancia también deberían manifestar, a determinadas condiciones, propiedades ondulatorias. Al poco tiempo, la hipótesis de Broglie obtuvo brillante confirmación experimental: fue demostrado que con las partículas de la sustancia está ligado cierto proceso ondulatorio, que debe ser tomado en consideración al estudiar la mecánica del átomo. El resultado de este descubrimiento fue la creación por Erwin Schrödinguer y Werner Heisenberg de una nueva teoría física, es decir, la mecánica ondulatoria o cuántica. La mecánica cuántica alcanzó asombrosos éxitos en la explicación de los procesos atómicos y la estructura de la sustancia. En aquellos casos, cuando pudieron ser vencidas las dificultades matemáticas, fueron obtenidos resultados que de modo perfecto concordaban con los experimentos.

Las últimas décadas se han destacado por magníficos logros en el ámbito de estudio del núcleo atómico. Los científicos e ingenieros han dominado hasta tal grado los procesos nucleares, que resultó ser posible el empleo práctico de la energía nuclear. En esta región, la física soviética ocupa uno de los puestos de vanguardia. En particular, la primera central atomoeléctrica en el mundo fue creada en la URSS.

Por fin, los últimos años los laboratorios creados por las manos del hombre, fueron desplazados tras los límites del globo terrestre. El 4 de octubre de 1957, en la Unión Soviética, por primera vez en la historia de la humanidad, se lanzó un satélite artificial de la Tierra, que era un pequeño laboratorio, equipado de aparatos científicos de investigación. El 12 de abril de 1961 tuvo lugar el primer vuelo en el mundo del hombre al espacio cósmico. El primer cosmonauta soviético, Yuri Gagarin, dio una vuelta alrededor de la Tierra y aterrizó felizmente. En la Unión Soviética fueron creados los primeros cohetes cósmicos, que abandonaron la esfera de atracción terrestre y transmitieron con ayuda de señales de radio a la Tierra valiosos resultados de las investigaciones del espacio sideral y, en particular, la fotografía de la cara inversa de la Luna. En 1969 los astronautas estadounidenses visitaron la Luna. En 1975 dos estaciones automáticas soviéticas efectuaron el aterrizaje suave en el planeta Venus y transmitieron importante información acerca de las condiciones físicas en dicho planeta, así como fotografiaron su superficie.

Es indudable que los próximos años serán marcados en las ciencias físicas por una serie de descubrimientos fundamentales.

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE MECÁNICA

CAPÍTULO I

CINEMÁTICA

§ 1. Movimiento mecánico

La más sencilla forma de movimiento de la materia es el movimiento mecánico, que consiste en el desplazamiento de los cuerpos o de sus partes unos respecto a otros. Cada día, en la vida cotidiana, obser vamos el desplazamiento de los cuerpos. De aquí se desprende la evidencia de las representaciones mecánicas. Por esta causa, puede ser explicado el hecho de que de todas las ciencias naturales, la mecánica obtuvo antes que otras extenso desarrollo.

El conjunto de cuerpos que destacamos para la observación denomínase *sistema mecánico*. Qué cuerpos debemos incluir en el sistema, depende del carácter del problema que se resuelve. En caso particular, el sistema puede constar de un solo cuerpo.

Más arriba ya hemos dicho que en mecánica se llama movimiento la variación mutua en la disposición de los cuerpos. Si nos imaginamos un cuerpo aislado que se encuentra en el espacio donde no hay otros cuerpos, no podemos hablar del movimiento de dicho cuerpo, ya que no hay nada respecto de que nuestro cuerpo puede variar su posición. De aquí sigue, que si vamos a estudiar el movimiento de cierto cuerpo, hay que indicar obligatoriamente respecto de qué otros cuerpos transcurre el movimiento que examinamos.

El movimiento transcurre tanto en el espacio, como en el tiempo (espacio y tiempo son dos formas integrantes de existencia de la materia). Por lo tanto, para describir el movimiento también hay que determinar el tiempo, lo que se hace mediante un reloj.

El *sistema de referencia* está formado por un conjunto de cuerpos inmóviles unos con relación a otros, respecto de los que se examina el movimiento y por un reloj que registra el tiempo.

El movimiento de un mismo cuerpo con relación a diferentes sistemas de referencia puede tener distinto carácter. Como ejemplo imaginémonos un tren que se acelera. Supongamos que por el pasillo de uno de los vagones marcha un pasajero a velocidad constante. En semejante caso, el movimiento del pasajero respecto del vagón será

uniforme, mientras que en lo que atañe a la superficie de la Tierra, acelerado.

La descripción del movimiento de un cuerpo significa indicar para cada momento de tiempo, la posición en el espacio y la velocidad del cuerpo. Con el fin de prefijar el estado de un sistema mecánico, hay que indicar las posiciones y las velocidades de todos los cuerpos que lo forman. El problema típico de mecánica consiste en que conociendo el estado del sistema en cierto momento de tiempo inicial t_0, así como las leyes que gobiernan el movimiento, determinar el estado del sistema en los siguientes momentos de tiempo t.

Hay que señalar que no existe tal problema de física que pueda ser resuelto con absoluta precisión. Siempre se obtiene un resultado aproximado. El grado de aproximación se define por el carácter del problema, por el objetivo que se quiere alcanzar. Cuando resolvemos un problema de forma aproximada, despreciamos ciertos factores que en el caso dado no son esenciales. Por ejemplo, al examinar el movimiento de un cuerpo, con frecuencia pueden despreciarse las dimensiones de éste. Digamos, al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el tamaño de la primera puede ser despreciado. En semejante caso, la descripción del movimiento se simplifica considerablemente, ya que la posición de la Tierra en el espacio puede ser determinada por un punto.

Recibe el nombre de *punto material* el cuerpo, cuyas dimensiones es posible despreciar de acuerdo con las condiciones del problema planteado. El problema de si podemos o no considerar el cuerpo concreto que examinamos como punto material, no depende de las dimensiones del cuerpo, sino que del planteamiento del problema. Un mismo cuerpo en unos casos puede ser considerado punto material, mientras que en otros, debe examinarse como cuerpo extendido.

Cuando hablamos de un cuerpo como de un punto material, quiere decir que nos abstraemos de sus dimensiones. La segunda abstracción con la que tropezamos en mecánica es la del cuerpo rígido. En la naturaleza no hay cuerpos en absoluto indeformables. Todo cuerpo bajo la acción de las fuerzas aplicadas a él, en mayor o menor grado, se deforma, o sea, cambia su forma y dimensiones. No obstante, al examinar el movimiento de los cuerpos, en muchos casos, sus deformaciones pueden ser despreciadas. Si esto tiene lugar, dicho cuerpo denomínase rígido. Es decir, llamamos *cuerpo rígido* un cuerpo tal, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en las condiciones del problema dado.

Es posible descomponer todo movimiento de un sólido en dos formas de movimiento: *de traslación* y *de rotación*.

Llamamos de traslación un movimiento tal, con el que cualquier recta ligada con el cuerpo en movimiento queda siempre paralela a sí misma (fig. 1.1).

Durante el movimiento de rotación todos los puntos del cuerpo se mueven por circunferencias, cuyos centros se hallan en una misma recta, llamada *eje de rotación* (fig. 1.2). El eje de rotación puede estar situado fuera del cuerpo (fig. 1.2, *b*).

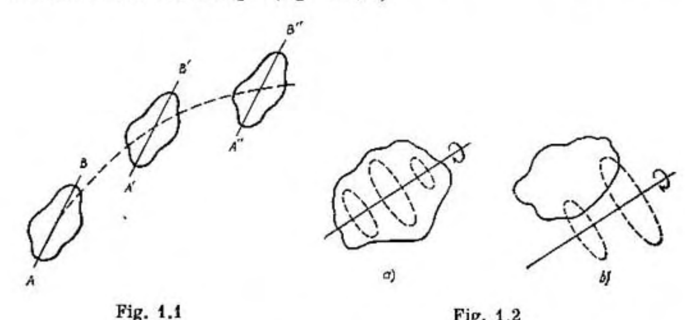


Fig. 1.1 Fig. 1.2

Ya que, al hablar de un cuerpo como de un punto material, nos abstraemos de su extensión, la noción de movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por él, no puede ser aplicada a dicho cuerpo.

Para obtener la posibilidad de describir el movimiento de forma cuantitativa, es necesario ligar con los cuerpos que forman el sistema de referencia ciertos *sistemas de coordenadas*, por ejemplo, cartesianas. Entonces, la posición del punto material puede definirse prefijando tres números x, y, z, es decir, las coordenadas cartesianas de dicho punto. El sistema de coordenadas puede ser realizado formando una red rectangular de iguales barras o reglas de escala (fig. 1.3). En los nudos de esta red hay que ubicar iguales relojes sincronizados entre sí. La posición del punto material y el momento de tiempo que a ella corresponde se registran en las escalas y el reloj más cercano al punto material.

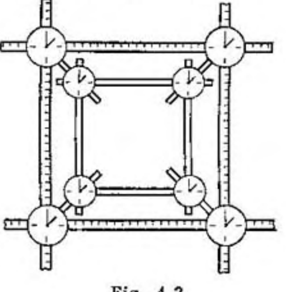


Fig. 1.3

Es más sencillo tratar un punto material que un cuerpo extendido. Por esta razón, vamos a estudiar primeramente la mecánica del punto material y, a continuación, la mecánica del sólido. Comenzaremos la exposición por cinemática, ocupándonos después de dinámica. Recordemos, que *cinemática* estudia el movimiento de los cuerpos sin prestar atención a las causas que lo provocaron. *Dinámica* estudia

el movimiento de los cuerpos en ligazón con aquellas causas (interacciones entre los cuerpos) que condicionan uno u otro carácter del movimiento.

§ 2. Cierta información acerca de los vectores

Definición del vector. Reciben el nombre de vectores magnitudes caracterizadas por valores numéricos, dirección y sentido, así como por el hecho de que se suman (componen) según la regla del paralelogramo[1]). Esta última exigencia es de suma importancia. Podemos indicar tales magnitudes que se caracterizan por el valor numérico y la dirección, pero que se suman de modo diferente que los vectores.

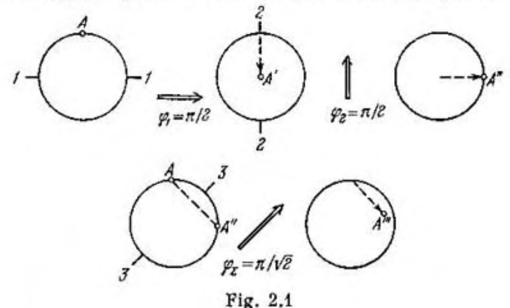


Fig. 2.1

En calidad de ejemplo aduzcamos la rotación de un cuerpo alrededor de cierto eje hasta el ángulo final φ. Semejante rotación puede ser representada como un segmento de longitud φ, dirigido por el eje alrededor del cual se efectúa la rotación hacia el. lado ligado con la dirección de rotación por medio de la regla del sacacorchos. En la fig. 2.1, en el ángulo superior, se muestran dos giros sucesivos de una esfera a los ángulos $\pi/2$, representados por los segmentos φ_1 y φ_2. El primer giro, realizado alrededor del eje *1—1*, traslada el punto A de la esfera a la posición A', el segundo, efectuado alrededor del eje *2—2*, a la posición A''. Idéntico resultado (es decir, traslado del punto A a la posición A'') es obtenido haciendo girar la esfera alrededor del eje *3—3* (véase la fila inferior en la fig. 2.1) al ángulo π. Por consiguiente, semejante giro debe ser considerado como la suma de los giros φ_1 y φ_2. No obstante, de los segmentos φ_1 y φ_2 dicho giro no puede ser alcanzado según la regla del paralelogramo. Semejante

[1]) Según una definición más rigurosa, llamamos vector el conjunto de tres magnitudes, que se transforman al girar los ejes de coordenadas según determinadas leyes (véase el Apéndice III).

suma proporciona un segmento de longitud $\pi/\sqrt{2}$ en lugar de la requerida π. El giro al ángulo $\pi/\sqrt{2}$ traslada el punto A al punto A'''. De aquí se desprende que los giros a ángulos finitos, representados por segmentos dirigidos, no poseen las propiedades de los vectores.

El valor numérico del vector denomínase su *módulo*. Hablando metafóricamente, el módulo nos ofrece la longitud del vector. El módulo del vector es un escalar siempre positivo.

En los planos, los vectores se representan en forma de segmentos rectilíneos con una flecha en uno de sus extremos. En la escala establecida, la longitud del segmento determina el módulo del vector, mientras que la flecha indica su sentido.

Se ha aceptado designar los vectores con letras negrillas, por ejemplo, **a**, **b**, **v**, **F**, etc. Esta misma letra de carácter corriente es utilizada para designar el módulo del vector, por ejemplo, a es el módulo del vector **a**[1]). En ciertas ocasiones para designar el módulo es necesario emplear el símbolo del vector encerrado entre dos barras verticales: $|\mathbf{a}|$ es igual al módulo del vector **a**. De este modo se designa, por ejemplo, el módulo de la suma de vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$:

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| = \text{módulo del vector } (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \qquad (2.1)$$

En semejante caso, el símbolo $a_1 + a_2$ significa la suma de los módulos de los vectores que se suman, que, hablando en general, no es igual al módulo de la suma de los vectores (la igualdad sólo tiene lugar cuando los vectores que se suman tienen igual sentido).

Los vectores dirigidos a lo largo de rectas paralelas (en un mismo sentido o en sentidos opuestos) reciben el nombre de *colineares*. Los vectores que yacen en planos paralelos son llamados *coplanares*. Mediante el traslado paralelo, los vectores colineares pueden ser situados a lo largo de una recta, mientras que los coplanares, reunidos en un mismo plano.

Los vectores colineares de igual módulo y sentido se considera que son iguales[2]).

Suma y sustracción de vectores. En la práctica la suma de vectores es efectuada con mayor comodidad sin construir el paralelogramo. Como vemos en la fig. 2.2, el mismo resultado se alcanza si el origen

---

[1]) En el texto manuscrito los vectores se designan con letras con una flecha por encima de éstas (por ejemplo, $\vec{a}$). En este caso, esa misma letra sin flecha designa el módulo del vector.

[2]) Aquí se tienen en cuenta los llamados *vectores libres*, es decir, aquellos que pueden ser trazados de cualquier punto del espacio. También se estudian los *vectores deslizantes*, cuyo origen puede ser ubicado en cualquier punto de la recta, a lo largo de la cual está dirigido el vector y los *vectores fijos*, es decir, los que están aplicados a un punto determinado. Los dos últimos tipos de vectores pueden ser expresados por los vectores libres; por esta causa, la base del cálculo vectorial es la noción de vector libre, que por regla es denominado simplemente vector.

del segundo vector se hace coincidir con el extremo del primero y, a continuación, trazar el vector resultante desde el origen del primero al extremo del segundo. Semejante procedimiento es ventajoso en particular cuando hay que sumar una cantidad de vectores mayor que dos (fig. 2.3).

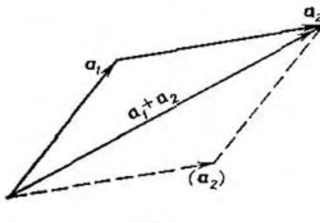


Fig. 2.2

Recibe el nombre de diferencia de los vectores **a** y **b** un vector **c** tal, que al sumarlo al vector **b** nos da el vector **a** (fig. 2.4; del vector —**b** trazado por una línea de trazos, hablaremos más adelante). El módulo de la diferencia de dos vectores, como el módulo de la suma (véase (2.1)), puede ser escrito sólo con ayuda de las barras verticales:

$$|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = \text{módulo del vector } (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2), \tag{2.2}$$

ya que el símbolo $a_1 - a_2$ significa la diferencia de módulos de los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, que, hablando en general, no es igual al módulo de la diferencia.

Multiplicación de un vector por un escalar. Como resultado de la multiplicación del vector **a** por el escalar α se obtiene un nuevo vector $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, cuyo módulo es $|\alpha|$ veces mayor que el módulo del vector **a** ($b = |\alpha| a$). El sentido del vector **b** o coincide con el del vector **a** (si $\alpha > 0$), o bien es contrario al sentido del vector **a** (si $\alpha < 0$). De lo dicho se desprende que la multiplicación por -1 hace variar el sentido del vector por el opuesto. Por lo tanto, los vectores **a** y —**a** son iguales en módulo y de sentidos opuestos. Por medio de la fig. 2.4 es fácil cerciorarse de que la sustracción del vector **a** el vector **b** es equivalente a la adición del vector —**b** al vector **a**.

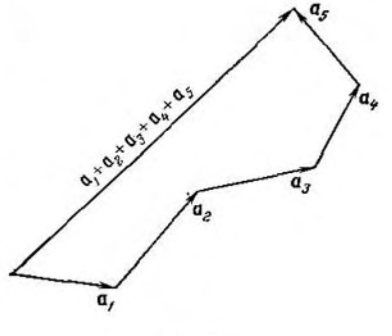


Fig. 2.3

De la definición de la multiplicación de un vector por un escalar, sigue que todo vector **a** puede ser representado en la forma

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a, \tag{2.3}$$

donde a es el módulo del vector **a**, $\mathbf{e}_a$, un vector de módulo igual a la unidad, de sentido igual al del vector **a** (fig. 2.5). El vector $\mathbf{e}_a$ recibe el nombre de *vector unitario* o bien *versor* del vector **a**. Este último puede ser representado como

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{a}, \tag{2.4}$$

de donde se deduce que el versor es una magnitud adimensional.

Los versores pueden ser comparados no sólo con los vectores, sino que también con cualesquiera direcciones en el espacio. Por ejemplo.

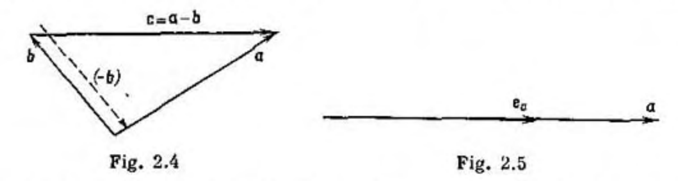


Fig. 2.4 Fig. 2.5

$\mathbf{e}_x$ es el versor del eje de coordenadas x, $\mathbf{e}_n$, el versor de la normal a una curva o superficie, $\mathbf{e}_\tau$, el versor tangente a una curva, etc.

Dependencia lineal entre vectores. Consideremos tres vectores no colineares **a**, **b**, **c** que yacen en un mismo plano. En la fig. 2.6

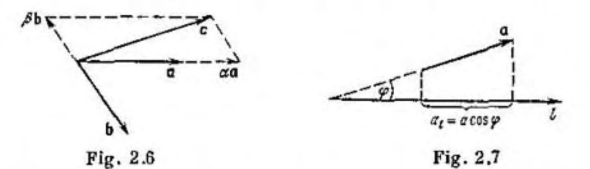


Fig. 2.6 Fig. 2.7

vemos que cualquiera de ellos (por ejemplo, **c**) puede ser expresado por intermedio de los otros dos

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \tag{2.5}$$

donde α y β son ciertos números (para el caso en la fig. 2.6 $\alpha > 1$, $-1 < \beta < 0$). De aquí deducimos que cualquier vector **c**, que yace en un mismo plano con los vectores no colineares **a** y **b**, puede ser expresado con ayuda de dichos vectores mediante la correlación lineal (2.5). Con los vectores fijados **a** y **b** todo tercer vector se define de forma unívoca por dos magnitudes α y β.

Sean dados tres vectores **a**, **b**, **c** cada uno de los cuales no es coplanar respecto de los otros dos[1]). Por analogía con (2.5) es fácil

[1]) Dos vectores siempre son coplanares. Esto se desprende de que por traslado paralelo pueden ser unidos sus orígenes. Entonces ellos resultarán situados en un mismo plano.

comprender que cualquier vector **d** puede ser expresado como la combinación lineal de los vectores prefijados

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{2.6}$$

Con los vectores prefijados **a**, **b**, **c** cualquier vector **d** se determina unívocamente mediante tres magnitudes α, β y γ, cada una de las cuales puede ser positiva o negativa.

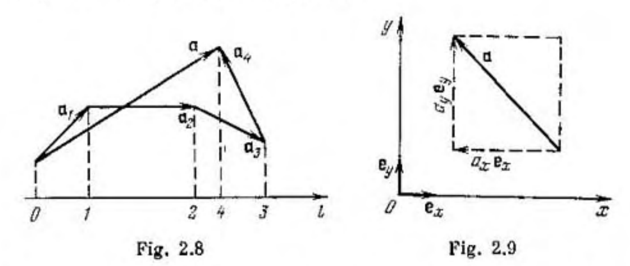


Fig. 2.8

Fig. 2.9

Proyección del vector. Examinemos cierta dirección en el espacio, que prefijaremos por el eje l (fig. 2.7). Sea que el vector **a** forma con el eje l un ángulo φ[1]). La magnitud

$$a_l = a \cos \varphi \tag{2.7}$$

(a es el módulo del vector), es llamada proyección del vector **a** en el eje l. La proyección se designa con la misma letra que el vector, añadiendo un índice que indica la dirección sobre la que se proyecta el vector.

La proyección del vector es una magnitud algebraica. Si el vector forma con la dirección dada un ángulo agudo, $\cos \varphi > 0$ y la proyección es positiva. Si el ángulo φ es obtuso, $\cos \varphi < 0$ y la proyección es negativa. Cuando el vector es perpendicular al eje dado, la proyección es igual a cero.

La proyección de un vector tiene sencillo sentido geométrico. Ésta es igual a la distancia entre las proyecciones del comienzo y el extremo del segmento que representa el vector dado en el eje. Cuando $\varphi < \pi/2$ dicha distancia se toma con signo positivo, si $\varphi > \pi/2$, con signo negativo.

Sea $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ (fig. 2.8). Estudiando la figura, es fácil llegar a la conclusión de que la proyección del vector resultante a sobre cierta dirección, es igual a la suma de las proyecciones de los

[1]) Si la recta a lo largo de la cual está dirigido el vector **a** y el eje l no se cruzan, para determinar el ángulo φ hay que tomar la recta que cruza el eje l paralela al vector **a**. El ángulo entre dicha recta y el eje l será el ángulo φ que nos interesa.

vectores que se suman:

$$a_l = a_{1l} + a_{2l} + a_{3l} + a_{4l}. \qquad (2.8)$$

Recordemos que al sumar las proyecciones de los vectores representados en la fig. 2.8, las distancias *0—1*, *1—2* y *2—3* deben tomarse con signo más, mientras que la distancia *3—4*, con signo menos. La fórmula (2.8) es justa con cualquier número de sumandos.

Expresión del vector por medio du su proyección en los ejes de coordenadas. Tomemos los ejes de coordenadas cartesianas y estudiemos el vector **a**, que yace en un plano perpendicular al eje z (fig. 2.9). Introduzcamos los versores de los ejes de coordenadas, es decir, los vectores unitarios $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ no se muestra en la figura; es perpendicular al plano de ésta y está dirigido hacia el lector). Señalemos que estos tres versores determinan por completo el sistema de coordenadas, por lo que recibe el nombre de *base del sistema de coordenadas.*

Como vemos en la fig. 2.9, el vector **a** puede ser representado en forma de la combinación lineal de los versores $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ (véase (2.5)):

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y.$$

Las proyecciones del vector en los ejes de coordenadas desempeñan el papel de coeficientes α y β. En el ejemplo que consideramos, la proyección a_x es negativa, por lo que el vector $a_x\mathbf{e}_x$ tiene sentido opuesto al del versor $\mathbf{e}_x$.

Hemos tomado el vector **a** perpendicular al eje z, a causa de lo cual $a_z = 0$. En el caso general, cuando las tres proyecciones del vector no son iguales a cero,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z. \qquad (2.9)$$

De este modo, todo vector puede ser expresado por sus proyecciones en los ejes de coordenadas y los versores de dichos ejes. Por esta causa, las proyecciones sobre los ejes de coordenadas reciben el nombre de *componentes* del vector.

Las magnitudes a_x, a_y, a_z son iguales (con la precisión hasta un signo) a los lados del paralelepípedo rectangular, cuya diagonal mayor es el vector **a** (fig. 2.10). Por esta causa obtenemos la correlación

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \qquad (2.10)$$

Sea $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Expresando cada uno de los vectores de acuerdo con la fórmula (2.9) obtenemos:

$$c_x\mathbf{e}_x + c_y\mathbf{e}_y + c_z\mathbf{e}_z = (a_x + b_x)\,\mathbf{e}_x + (a_y + b_y)\,\mathbf{e}_y + (a_z + b_z)\,\mathbf{e}_z$$

(hemos sacado de los paréntesis los factores comunes $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$). Los vectores iguales tienen iguales proyecciones en los ejes de coordenadas, por lo que podemos escribir, que

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y,\ c_z = a_z + b_z \qquad (2.11)$$

(comp. con (2.8)). Las fórmulas (2.11) son la expresión analítica de la regla de suma (composición) de vectores. Son justas para cualquier cantidad de sumandos.

Radio vector. Recibe el nombre de radio vector **r** de cierto punto, el vector trazado desde el origen de coordenadas al punto dado

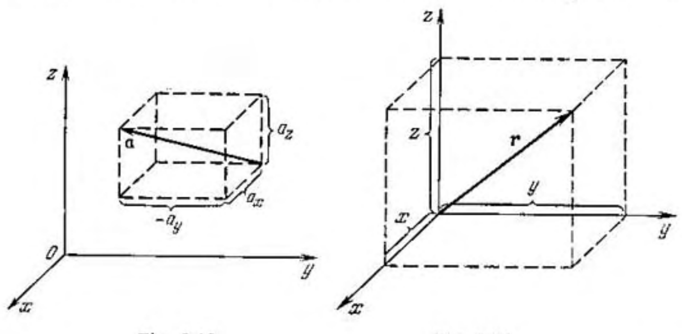


Fig. 2.10 Fig. 2.11

(fig. 2.11). Sus proyecciones en los ejes de coordenadas son iguales a las coordenadas cartesianas del punto dado:

$$r_x = x, \ r_y = y, \ r_z = z. \tag{2.12}$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.9) el radio vector puede presentarse en la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \tag{2.13}$$

En correspondencia con (2.10)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.14}$$

Producto escalar de vectores. Los dos vectores **a** y **b** pueden ser multiplicados entre sí de dos maneras: una de ellas lleva a una magnitud escalar, la otra, como resultado nos proporciona un nuevo vector. De acuerdo con esto, existen dos productos entre vectores: escalar y vectorial. Señalemos que la operación de división de un vector por otro no existe.

Se denomina producto escalar de los vectores **a** y **b**, un escalar igual al producto de los módulos de estos vectores por el coseno del ángulo α entre ellos:

$$\mathbf{ab} = ab \cos \alpha \tag{2.15}$$

(fig. 2.12). Al escribir el producto escalar los símbolos de los vectores que se multiplican se anotan uno junto a otro sin ningún signo

entre ellos. La expresión (2.15) es una magnitud algebraica: con α agudo $\mathbf{ab} > 0$, con α obtuso $\mathbf{ab} < 0$. El producto escalar de vectores perpendiculares entre sí ($\alpha = \pi/2$) es igual a cero.

Señalemos, que por el cuadrado de un vector siempre se entiende el producto escalar del vector por sí mismo:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = aa \cos \alpha = a^2. \quad (2.16)$$

Es decir, el cuadrado de un vector es igual al cuadrado de su módulo. En particular, el cuadrado de cualquier versor es igual a la unidad:

$$\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1. \quad (2.17)$$

Al mismo tiempo, hay que decir que como los versores son perpendiculares entre sí, los productos escalares del tipo $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$, si $i \neq k$, son iguales a cero.

Es muy cómodo el *símbolo de Kronecker* δ_{ik} que se determina del modo siguiente:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = k, \\ 0, \text{ si } i \neq k. \end{cases} \quad (2.18)$$

Haciendo uso de este símbolo, las propiedades establecidas más arriba de los productos escalares de los versores de los ejes de coordenadas pueden ser expresados con una sola fórmula:

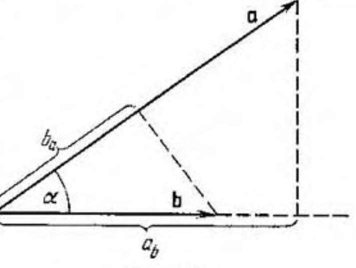


Fig. 2.12

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (i, k = x, y, z) \quad (2.19)$$

(los índices i y k pueden tomar, independientemente uno de otro, los valores x, y, z).

De la definición (2.15) sigue que el producto escalar es conmutativo, o sea, que no depende del orden de los factores:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \quad (2.20)$$

La expresión (2.15) puede ser escrita por diferentes procedimientos:

$$\mathbf{ab} = ab \cos \alpha = (a \cos \alpha)\, b = a\, (b \cos \alpha).$$

Como vemos en la fig. 2.12, $a \cos \alpha$ es igual a a_b, es decir, a la proyección del vector $\mathbf{a}$ sobre la dirección del vector $\mathbf{b}$. Análogamente $b \cos \alpha = b_a$, es decir, a la proyección del vector $\mathbf{b}$ sobre la dirección del vector $\mathbf{a}$. Por esta causa, podemos decir que el producto escalar de dos vectores, recibe el nombre de escalar igual al producto del módulo de uno de los vectores que se multiplican por la proyección

del segundo vector sobre la dirección de primero:

$$\mathbf{ab} = a_b b = a b_a. \tag{2.21}$$

Tomando en consideración que la proyección de la suma de vectores es igual a la suma de la proyección de los vectores que se suman, podemos escribir:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) = a(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots)_{\mathrm{pr.\,a}} = a(b_a + c_a + \ldots) = \\ = ab_a + ac_a + \ldots = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \ldots \tag{2.22}$$

De aquí se desprende que el producto escalar de vectores es distributivo: el producto del vector **a** por la suma de varios vectores, es igual a la suma de los productos del vector **a** por cada uno de los vectores sumandos, tomados por separado.

Si nos representamos los vectores que se multiplican en la forma (2.9) y hacemos uso de la distributividad del producto escalar, obtenemos:

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z)(b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z) = \\ = a_xb_x\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + a_xb_y\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + a_xb_z\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + a_yb_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + \\ + a_yb_y\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + a_yb_z\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + a_zb_x\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + a_zb_y\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + a_zb_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Ahora, tengamos en cuenta (2.19). Como resultado obtenemos la expresión del producto escalar por intermedio de las proyecciones de los vectores que se multiplican:

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{2.23}$$

Notemos, que al girar los ejes de coordenadas, las proyecciones de los vectores sobre estos ejes varían. No obstante, la magnitud $ab\cos\alpha$ no depende de la elección de los ejes. De aquí, llegamos a la conclusión de que los cambios en las proyecciones de los vectores **a** y **b** al girar los ejes, tienen un carácter tal, que su combinación de la forma (2.23) queda invariante:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \mathrm{inv}. \tag{2.24}$$

Es fácil comprender que la proyección del vector **a** sobre la dirección l (véase (2.7)) puede ser representada de la forma

$$a_l = \mathbf{ae}_l, \tag{2.25}$$

donde $\mathbf{e}_l$ es el versor de la dirección l. De manera análoga

$$a_x = \mathbf{ae}_x,\ a_y = \mathbf{ae}_y,\ a_z = \mathbf{ae}_z. \tag{2.26}$$

Producto vectorial. Recibe el nombre de producto vectorial de los vectores **a** y **b**, el vector **c** determinado por la fórmula

$$\mathbf{c} = ab\ \mathrm{sen}\ \alpha\cdot\mathbf{n}, \tag{2.27}$$

donde a y b son los módulos de los vectores que multiplicamos, α, el ángulo entre los vectores que multiplicamos, **n**, un vector unitario de la normal[1]) al plano en el que se hallan los vectores **a** y **b** (fig. 2.13). La dirección **n** se elige de modo que la secuencia de los vectores **a**, **b**, **n** forme un sistema dextrógiro. Esto quiere decir, que si miramos tras el vector **n**, el giro del primer factor al segundo, realizado por el más corto recorrido, se efectuará en sentido horario. En la fig. 2.13 el vector **n** está dirigido tras la figura, por lo que se designa con un círculo y una cruz[2]). El sentido del vector **c** coincide con el de **n**.

Simbólicamente, el producto vectorial puede ser escrito de dos formas:

$$[\mathbf{ab}] \quad \text{o bien} \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Nosotros vamos a hacer uso del primero de ellos, con la particularidad de que a veces, para excluir equivocaciones, entre los factores pondremos una coma. Así, pues, de acuerdo con (2.27)

$$[\mathbf{ab}] = ab \operatorname{sen} \alpha \cdot \mathbf{n}. \qquad (2.28)$$

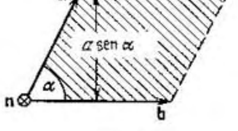


Fig. 2.13

Como vemos en la fig. 2.13, el módulo del producto vectorial tiene sencillo sentido geométrico; la expresión $ab \operatorname{sen} \alpha$ es numéricamente igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores que se multiplican.

El sentido del vector [**ab**] ha sido definido ligándolo con la dirección de rotación del primer factor al segundo. Al examinar semejantes vectores como el radio vector **r**, la velocidad **v**, la fuerza **F**, etc., el problema de la elección de su sentido no surgirá, ya que emanará de forma espontánea de la naturaleza de las propias magnitudes. Semejantes vectores reciben el nombre de vectores libres (absolutos). Los vectores del tipo [**a**, **b**], cuyo sentido se liga con la dirección de rotación, se denominan *seudovectores* (o vectores axiales). Al variar la condición, por ejemplo, al pasar del sistema dextrógiro al levógiro, los sentidos de los seudovectores se cambian por los opuestos, con ello, los vectores libres quedan invariables.

---

[1]) La designación **n** es más evidente que $\mathbf{e}_n$.

[2]) Los vectores perpendiculares al plano de la figura, serán representados con un círculo y una cruz, si el vector se aleja de nosotros y con un círculo y un punto en el centro del primero si éste está dirigido hacia nosotros. Para mayor evidencia podemos imaginarnos el vector como una flecha con punta cónica y plumaje cruciforme. En tal caso, si el vector está dirigido hacia nosotros (la flecha vuela hacia nosotros) veremos un círculo con un punto, si el vector se aleja de nosotros (la flecha vuela alejándose de nosotros), veremos un círculo con una cruz.

Hay que tener en cuenta que el producto vectorial será un seudovector sólo en el caso, cuando los dos vectores que se multiplican son libres (o bien los dos son seudovectores). En lo que se refiere al producto de un vector libre por un seudovector, éste será un vector libre. El cambio de la condición que determina el sentido de los seudovectores por el opuesto provoca en tal caso el cambio del signo delante del producto vectorial y, simultáneamente, el cambio del signo ante uno de los factores. Como resultado, la magnitud expresada por el producto vectorial quedará invariable.

Como el sentido del producto vectorial se determina por el sentido de rotación del primer factor al segundo, el resultado de la

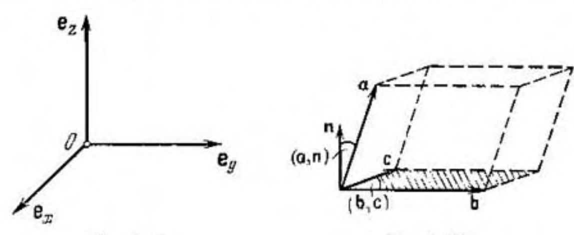


Fig. 2.14 Fig. 2.15

multiplicación vectorial depende del orden de los factores. La permutación de los factores provoca el cambio del sentido del vector resultante por el opuesto. De este modo, el producto vectorial no tiene propiedad de conmutatividad:

$$[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}]. \qquad (2.29)$$

Podemos mostrar que el producto vectorial es distributivo, o sea, que

$$[\mathbf{a}, (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots)] = [\mathbf{ab}_1] + [\mathbf{ab}_2] + \ldots \qquad (2.30)$$

Examinemos los productos vectoriales de los versores de los ejes de coordenadas (fig. 2.14). Por definición (2.28)

$$\begin{aligned} &[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] = [\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] = [\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z] = 0, \\ &[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] = -[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_z, \\ &[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] = -[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_x, \\ &[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] = -[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_y. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Representando los vectores que se multiplican en la forma (2.9) y haciendo uso de la distributividad del producto vectorial, obtene-

mos:

$$[\mathbf{ab}] = [(a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z), (b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z)] =$$
$$= a_xb_x[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x] + a_xb_y[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] + a_xb_z[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z] +$$
$$+ a_yb_x[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x] + a_yb_y[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y] + a_yb_z[\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] +$$
$$+ a_zb_x[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] + a_zb_y[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y] + a_zb_z[\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z].$$

Tomando en consideración la correlación (2.31), llegamos a la siguiente expresión:

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{e}_x(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{e}_y(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{e}_z(a_xb_y - a_yb_x). \tag{2.32}$$

La expresión obtenida puede ser presentada en forma del determinante:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

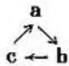
Producto mixto. La expresión $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$ recibe el nombre de producto mixto (o escalar-vectorial) de tres vectores, es decir, el producto escalar del vector $\mathbf{a}$ por el producto vectorial de los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. De acuerdo con las definiciones (2.15) y (2.28)

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = a\{bc \operatorname{sen}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}).$$

Aquí $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ es el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$, el ángulo entre el vector $\mathbf{a}$ y el versor $\mathbf{n}$, que determina la dirección del vector $[\mathbf{bc}]$. En la fig. 2.15 vemos que la expresión $bc \operatorname{sen}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ es numéricamente igual al área de la base del paralelepípedo, construido sobre los vectores que se multiplican, en tanto que la expresión $a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ es numéricamente igual a la altura de dicho paralelepípedo tomada con signo más si el ángulo $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ es agudo y con signo menos si dicho ángulo es obtuso. Por consiguiente la expresión $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$ tiene sencillo sentido geométrico: es numéricamente igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores que multiplicamos (tomado con signo positivo o negativo en función de la magnitud del ángulo $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$). El resultado que obtenemos al calcular el volumen del paralelepípedo no puede ser función de cuál de sus caras ha sido tomada como base. De aquí se desprende que

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}]. \tag{2.34}$$

De este modo, al producto mixto tolera la permutación cíclica de los factores, o sea, la sustitución de cada uno de ellos por el que sigue en el ciclo:



Producto vectorial doble. Estudiemos el producto vectorial doble de tres vectores **a**, **b** y **c**

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}, [\mathbf{bc}]].$$

Todo producto vectorial es perpendicular a los dos factores. Por esta razón, el vector **d** es perpendicular al versor **n**, que define el sentido del vector [**bc**]. De aquí se desprende, que el vector **d** yace en el plano formado por los vectores **b** y **c**, por lo que puede ser representado como una combinación lineal de estos vectores:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c},$$

(véase (2.5)). El cálculo correspondiente nos proporciona que $\alpha = \mathbf{ac}$, $\beta = -\mathbf{ab}$. De esta forma,

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab}). \tag{2.35}$$

Esta fórmula se recuerda con facilidad si se tiene en cuenta que ella puede ser leída como «bac menos cab».

Derivada de un vector. Examinemos un vector que varía con el tiempo según la conocida ley **a** (t). Las proyecciones de este vector sobre los ejes de coordenadas son las funciones prefijadas del tiempo. Por lo tanto,

$$\mathbf{a}\,(t) = \mathbf{e}_x a_x\,(t) + \mathbf{e}_y a_y\,(t) + \mathbf{e}_z a_z\,(t) \tag{2.36}$$

(suponemos que los ejes de coordenadas no giran en el espacio, de forma que con el tiempo los versores de los ejes no varían).

Supongamos que en el intervalo de tiempo Δt las proyecciones del vector reciben un incremento Δa_x, Δa_y, Δa_z. El vector recibirá un incremento $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\,\Delta a_x + \mathbf{e}_y\,\Delta a_y + \mathbf{e}_z\,\Delta a_z$. La velocidad de variación del vector **a** con el tiempo puede ser caracterizada por la razón entre $\Delta\mathbf{a}$ y Δt:

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \mathbf{e}_x\frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \mathbf{e}_y\frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \mathbf{e}_z\frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \tag{2.37}$$

Esta razón nos proporciona la velocidad media de variación de **a** durante el intervalo de tiempo Δt. Sea que **a** varía con el tiempo permanentemente, sin saltos. En tal caso, mientras menor es el intervalo Δt, mayor será la precisión con la que la magnitud (2.37) caracterizará la velocidad de variación de **a** en el momento de tiempo t que precede al intervalo Δt. Por lo tanto, la velocidad de variación del vector **a** en el momento de tiempo t es igual al límite de la razón (2.37), obtenido con una disminución ilimitada de Δt:

la velocidad de variación de $\mathbf{a} =$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \mathbf{e}_x\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \mathbf{e}_y\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \mathbf{e}_z\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \tag{2.38}$$

Si conocemos cierta función $f(t)$ del argumento t, el límite de la razón entre el incremento de la función Δf y el incremento del argumento Δt, obtenido cuando Δt tendía a cero, recibe el nombre de derivada de la función f por t y se designa por df/dt. Por esta causa, la expresión (2.38) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{e}_x \frac{da_x}{dt} + \mathbf{e}_y \frac{da_y}{dt} + \mathbf{e}_z \frac{da_z}{dt}. \qquad (2.39)$$

El resultado obtenido quiere decir que las proyecciones del vector $d\mathbf{a}/dt$ en los ejes de coordenadas son iguales a las derivadas por el tiempo de las proyecciones del vector $\mathbf{a}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{pr. } x} = \frac{da_x}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{pr. } y} = \frac{da_y}{dt}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\text{pr. } z} = \frac{da_z}{dt}. \qquad (2.40)$$

En física se ha aceptado designar las derivadas por el tiempo con el símbolo de la correspondiente magnitud con un punto encima, por ejemplo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}, \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{a}}. \qquad (2.41)$$

Haciendo uso de esta designación, la fórmula (2.39) puede tomar la forma

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{e}_x \dot{a}_x + \mathbf{e}_y \dot{a}_y + \mathbf{e}_z \dot{a}_z. \qquad (2.42)$$

Si en calidad de $\mathbf{a}(t)$ tomamos el radio vector $\mathbf{r}(t)$ de un punto en movimiento, de acuerdo con (2.42)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} + \mathbf{e}_z \dot{z}, \qquad (2.43)$$

en donde x, y, z son funciones de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Se llama diferencial («incremento») de $f(t)$ la expresión

$$df = f'\,dt, \qquad (2.44)$$

donde f' es la derivada de f por t. De acuerdo con (2.39) la diferencial («incremento») del vector $\mathbf{a}$ es definida por la fórmula

$$d\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\,da_x + \mathbf{e}_y\,da_y + \mathbf{e}_z\,da_z. \qquad (2.45)$$

En particular,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\,dx + \mathbf{e}_y\,dy + \mathbf{e}_z\,dz. \qquad (2.46)$$

Señalemos que el incremento de una función durante un intervalo de tiempo Δt muy pequeño, pero finito, es aproximadamente igual a

$$\Delta f \approx f'\Delta t = \frac{df}{dt}\Delta t. \qquad (2.47)$$

En el límite, para $\Delta t \to 0$ la igualdad aproximada (2.47) se convierte en la igualdad precisa (2.44).

Para la función vectorial puede ser escrita una fórmula análoga a (2.47):

$$\Delta \mathbf{a} \approx \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t. \qquad (2.48)$$

Derivada de un producto de funciones. Examinemos la función **b** (t) que es igual al producto de la función escalar φ (t) por la función vectorial **a** (t): **b** (t) = φ (t)·**a** (t) o brevemente: **b** = φ**a**. Hallemos el incremento de la función **b**:

$$\Delta \mathbf{b} = \Delta (\varphi \mathbf{a}) = (\varphi + \Delta\varphi)(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) - \varphi\mathbf{a} =$$
$$= \varphi \, \Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\, \Delta\varphi + \Delta\varphi\, \Delta\mathbf{a}.$$

Representando el incremento de la función en la forma (2.47) y (2.48), tenemos:

$$\Delta \mathbf{b} \approx \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} \Delta t + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} (\Delta t)^2,$$

de donde

$$\frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} \approx \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t.$$

En el límite, con $\Delta t \to 0$, esta igualdad aproximada se convierte en una igualdad precisa. Así, pues,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t \right).$$

Los dos primeros sumandos no dependen de Δt y, por lo tanto, durante el paso al límite no varían. El límite del tercer sumando es nulo. Por consiguiente, sustituyendo **b** por φ**a** obtenemos:

$$\frac{d}{pt} (\varphi\, \mathbf{a}) = \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} = \varphi \dot{\mathbf{a}} + \dot{\varphi} \mathbf{a}. \qquad (2.49)$$

Examinemos ahora el producto escalar de dos funciones vectoriales **a** (t) y **b** (t). El incremento de este producto es igual a:

$$\Delta (\mathbf{ab}) = (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a})(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{ab} =$$
$$= \mathbf{a}\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}\Delta\mathbf{b} \approx \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}\Delta t + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}\Delta t + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}} (\Delta t)^2.$$

De aquí

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{ab}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta (\mathbf{ab})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}\Delta t),$$

o definitivamente

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \qquad (2.50)$$

Multiplicando (2.50) por dt obtenemos la diferencial:

$$d\,(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\, d\mathbf{b} + \mathbf{b}\, d\mathbf{a}. \qquad (2.51)$$

Calculemos la derivada y la diferencial del cuadrado de una función vectorial. Según (2.50) y (2.51)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{a}\dot{\mathbf{a}}, \tag{2.52}$$

$$d(\mathbf{a}^2) = 2\mathbf{a}\, d\mathbf{a}. \tag{2.53}$$

Tomando en consideración que $\mathbf{a}^2 = a^2$ (véase (2.16)), podemos escribir:

$$2a\, da = d\,(a^2) \quad \text{o bien} \quad \mathbf{a}\, d\mathbf{a} = d\,(a^2/2). \tag{2.54}$$

Por fin, estudiemos la derivada del producto vectorial de las funciones $\mathbf{a}\,(t)$ y $\mathbf{b}\,(t)$. El incremento de la función que estudiamos es igual a

$$\Delta[\mathbf{ab}] = [(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}),\ (\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})] - [\mathbf{ab}] =$$
$$= [\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a},\ \mathbf{b}] + [\Delta\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{b}] \approx [\mathbf{a},\ \dot{\mathbf{b}}\Delta t] + [\dot{\mathbf{a}}\Delta t,\ \mathbf{b}] + [\dot{\mathbf{a}}\Delta t,\ \dot{\mathbf{b}}\Delta t].$$

Correspondientemente

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = \lim_{\Delta t\to 0}\{[\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}] + [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}] + [\dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}]\,\Delta t\}.$$

Pasando al límite, llegamos a la fórmula

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}] + [\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}]. \tag{2.55}$$

Derivada de un vector unitario. Examinemos el versor $\mathbf{e}_a$ del vector $\mathbf{a}$. Es evidente, que el vector $\mathbf{e}_a$ sólo puede variar en sentido. Supongamos que durante un intervalo muy pequeño de tiempo Δt el vector $\mathbf{a}$ y, junto con éste, el versor $\mathbf{e}_a$ gira a un ángulo $\Delta\varphi$ (fig. 2.16). Con $\Delta\varphi$ pequeño el módulo del vector $\Delta\mathbf{e}_a$ es, aproximadamente, igual al ángulo $\Delta\varphi$: $|\Delta\mathbf{e}_a| \approx \Delta\varphi$ (el segmento que representa $\Delta\mathbf{e}_a$ es la base de un triángulo isósceles con caras iguales a la unidad). Indiquemos que mientras menor sea $\Delta\varphi$, con mayor precisión se observa la igualdad aproximada que hemos escrito. El propio vector $\Delta\mathbf{e}_a$ puede ser representado de la siguiente forma:

Fig. 2.16

$$\Delta\mathbf{e}_a = |\Delta\mathbf{e}_a|\cdot\mathbf{e}_{\Delta e} \approx \Delta\varphi\cdot\mathbf{e}_{\Delta e},$$

donde $\mathbf{e}_{\Delta e}$ es el versor del vector $\Delta\mathbf{e}_a$. Cuando $\Delta\varphi$ tiende a cero, el versor $\mathbf{e}_{\Delta e}$ girará y en el límite coincidirá con el vector unitario $\mathbf{e}_\perp$, perpendicular al vector $\mathbf{e}_a$ (véase la fig. 2.16).

La derivada de $\mathbf{e}_a$ por t es, por definición, igual a

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,\mathbf{e}_{\Delta e} = \frac{d\varphi}{dt}\,\mathbf{e}_\perp.$$

De este modo,

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\perp. \quad (2.56)$$

La magnitud $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ es la velocidad angular de rotación del vector a (véase el § 5). El versor $\mathbf{e}_\perp$ yace en el mismo plano por el que gira en el momento dado el vector a, con la particularidad de que está dirigido hacia el lado en el que transcurre la rotación.

§ 3. Velocidad

Durante su movimiento, el punto material describe cierta línea que recibe el nombre de *trayectoria*[1]). En función de la forma de la trayectoria distinguimos el movimiento rectilíneo, por una circunferencia, curvilíneo, etc.

Sea que un punto material (más adelante, para mayor brevedad vamos a llamarlo partícula) se ha desplazado a lo largo de cierta trayectoria del punto *1* al punto *2* (fig. 3.1). La distancia entre los puntos *1* y *2*, calculada a lo largo de la trayectoria, recibe el nombre de *recorrido* pasado por la partícula. Lo designaremos por la letra s.

El segmento rectilíneo trazado desde el punto *1* al punto *2* se llama *desplazamiento* de la partícula y será designado por el símbolo $\mathbf{r}_{12}$. Supongamos que la partícula realiza sucesivamente dos desplazamientos: $\mathbf{r}_{12}$ y $\mathbf{r}_{23}$ (fig. 3.2). Es natural, que la suma de estos desplazamientos se ha llamado un desplazamiento $\mathbf{r}_{13}$ tal que con-

---

[1]) Hay que señalar, que el concepto de trayectoria sólo es aplicable a una partícula «clásica», a la que en cada momento de tiempo se le puede atribuir valores precisos de la coordenada y la cantidad de movimiento (es decir, de la velocidad). De acuerdo con la mecánica cuántica, las partículas reales pueden ser caracterizadas con ayuda de la coordenada y la cantidad de movimiento sólo con cierto grado de precisión. El límite de esta precisión se determina por el *principio de incertidumbre* (o *indeterminación*) de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Aquí Δx es la incertidumbre de la coordenada, Δp, la incertidumbre de la cantidad de movimiento de la partícula, $\hbar$, la *constante de Planck*, cuyo valor es igual a $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J·s. El signo $\gtrsim$ significa «mayor que la magnitud del orden».

Sustituyendo la cantidad de movimiento por el producto de la masa por la velocidad, podemos escribir

$$\Delta x \cdot \Delta v \gtrsim \hbar/m.$$

De esta correlación vemos que mientras menor es la masa de la partícula, menos determinadas se hacen su coordenada y su velocidad y, por consiguiente, es menos aplicable el concepto de trayectoria. Para los cuerpos macroscópicos (o sea, los cuerpos formados por gran cantidad de moléculas) las incertidumbres de la coordenada y la velocidad, no superan la precisión alcanzada en la práctica de mediciones de estas magnitudes, por lo que la noción de trayectoria es aplicable a estos cuerpos sin restricciones. Para las micropartículas (electrones, protones, neutrones, átomos y moléculas aislados) el concepto de trayectoria, en función de las condiciones en que transcurre el movimiento, resulta ser o no aplicable por completo, o bien aplicable con precisión limitada. Por ejemplo, el movimiento de los electrones en el tubo de rayos catódicos puede ser examinado, aproximadamente, como un movimiento que transcurre en ciertas trayectorias.

duzca al mismo resultado que los dos primeros desplazamientos en conjunto. Es decir, los desplazamientos se caracterizan por el valor numérico y el sentido y, además, se suman según la regla del paralelogramo. De aquí se desprende que el desplazamiento es un vector.

Por velocidad en la vida cotidiana se entiende el recorrido que pasa la partícula por la unidad de tiempo. Si en el transcurso de

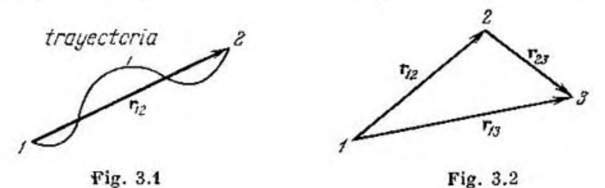


Fig. 3.1 Fig. 3.2

iguales intervalos de tiempo cuan se quieran pequeños, la partícula pasa iguales recorridos, el movimiento de la partícula recibe el nombre de *uniforme*. En este caso, la velocidad que desarrolla la partícula en cada momento de tiempo puede ser calculada dividiendo el recorrido s por el tiempo t.

En física, por velocidad se tiene en cuenta una magnitud vectorial, que caracteriza no sólo la rapidez de desplazamiento de la partícula por la trayectoria, sino que también el sentido en el que la partícula se mueve en cada momento de tiempo. Dividamos la trayectoria en sectores infinitamente pequeños de longitud ds (fig. 3.3). A cada uno de los sectores se le atribuye un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$. Si dividimos este desplazamiento por el correspondiente intervalo de tiempo dt, obtendremos la velocidad instantánea en el punto dado de la trayectoria:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}. \qquad (3.1)$$

O sea, que la velocidad es la derivada del radio vector de la partícula respecto del tiempo. El desplazamiento $d\mathbf{r}$ coincide con un elemento infinitesimal de la trayectoria. Por consiguiente, el vector $\mathbf{v}$ está dirigido por la tangente a la trayectoria (véase la fig. 3.3).

Razonando de forma más rigurosa, para obtener la fórmula (3.1) hay que hacer lo siguiente. Fijando cierto momento de tiempo t, examinemos el incremento del radio vector $\Delta\mathbf{r}$ durante el pequeño intervalo de tiempo Δt[1]) que sigue a t (fig. 3.4). La razón $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ nos

[1]) El símbolo Δ (delta) se emplea en dos casos:

a) para designar el incremento de cierta magnitud. En el caso que consideramos $\Delta\mathbf{r}$ es el incremento del radio vector $\mathbf{r}$ durante el tiempo Δt;

b) para designar parte de cualquier magnitud. Por ejemplo, Δt es parte de todo el tiempo t, durante el que transcurre el movimiento, Δs, parte de todo el camino s, que recorre la partícula.

proporciona el valor medio de la velocidad durante el tiempo Δt. Si tomamos los intervalos Δt cada vez más pequeños, el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ nos ofrecerá en el límite el valor de la velocidad $\mathbf{v}$ en el momento de tiempo t:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (3.2)$$

Hemos vuelto a la fórmula (3.1)

Hallemos el módulo de la expresión (3.2), es decir, el módulo de la velocidad $\mathbf{v}$:

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \qquad (3.3)$$

En esta fórmula en lugar de $|\Delta\mathbf{r}|$ no se puede escribir Δr. En esencia, el vector $\Delta\mathbf{r}$ es la diferencia de dos vectores ($\mathbf{r}$ en el momento $t + \Delta t$

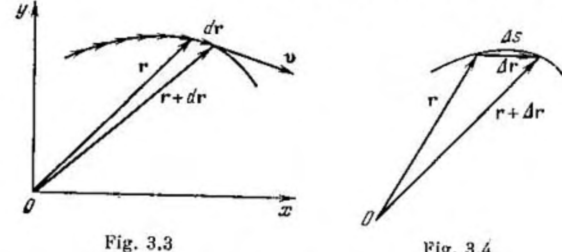


Fig. 3.3

Fig. 3.4

menos $\mathbf{r}$ en el momento t). Por esta razón, su módulo sólo se puede escribir con ayuda de las barras verticales (véase (2.2)). El símbolo $|\Delta\mathbf{r}|$ designa el módulo del incremento del vector $\mathbf{r}$, mientras que Δr es de por sí el incremento del módulo del vector $\mathbf{r}$: $\Delta|\mathbf{r}|$. Hablando en general, estas dos magnitudes no son iguales:

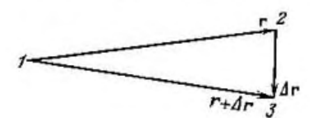


Fig. 3.5

$$|\Delta\mathbf{r}| \neq \Delta|\mathbf{r}| = \Delta r.$$

En el siguiente ejemplo podemos cerciorarnos de esto. Supongamos que el vector $\mathbf{r}$ recibe incremento $\Delta\mathbf{r}$ tal que su módulo queda invariable: $|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$ (fig. 3.5). Entonces, el incremento del módulo del vector es igual a cero ($\Delta|\mathbf{r}| = \Delta r = 0$). Pero al mismo tiempo el módulo del incremento del vector $\mathbf{r}$, es decir, $|\Delta\mathbf{r}|$, se diferencia de cero (es igual a la longitud del segmento *2—3*). Lo dicho es válido para todo vector $\mathbf{a}$: en el caso general $|\Delta\mathbf{a}| \neq \Delta a$. En la fig. 3.4 vemos que el recorrido Δs, en general, se diferencia en

magnitud del módulo del desplazamiento $|\Delta\mathbf{r}|$. No obstante, si tomamos los segmentos del recorrido Δs y del desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$, correspondientes a intervalos de tiempo Δt en constante disminución, la diferencia entre Δs y $|\Delta\mathbf{r}|$ decrecerá y, en el límite, su razón será igual a la unidad:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{|\Delta\mathbf{r}|}=1.$$

Sobre esta base, podemos sustituir en la fórmula (3.3) $|\Delta\mathbf{r}|$ por Δs, como resultado de lo cual se obtiene la expresión

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}. \qquad (3.4)$$

De este modo, el módulo de la velocidad es igual a la derivada del recorrido respecto del tiempo.

Es evidente que la magnitud, que en la vida cotidiana recibe el nombre de velocidad, es en realidad el módulo de la velocidad $\mathbf{v}$. Con el movimiento uniforme el módulo de la velocidad queda invariable ($v=$ const.), mientras que el sentido del vector $\mathbf{v}$ varía al azar (en particular, puede ser constante).

De acuerdo con la fórmula (3.1) el desplazamiento elemental de la partícula es igual a

$$d\mathbf{r}=\mathbf{v}\,dt. \qquad (3.5)$$

Para mayor evidencia, vamos a designar el desplazamiento elemental por el símbolo $d\mathbf{s}$, es decir, escribiremos (3.5) en la forma

$$d\mathbf{s}=\mathbf{v}\,dt. \qquad (3.6)$$

El vector de velocidad, como cualquier otro vector, puede ser representado como

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y+v_z\mathbf{e}_z, \qquad (3.7)$$

donde v_x, v_y, v_z son las proyecciones del vector $\mathbf{v}$ en los ejes de coordenadas. Al mismo tiempo, el vector $\dot{\mathbf{r}}$ igual a $\mathbf{v}$, de acuerdo con la fórmula (2.43) tiene siguiente aspecto:

$$\dot{\mathbf{r}}=\dot{x}\mathbf{e}_x+\dot{y}\mathbf{e}_y+\dot{z}\mathbf{e}_z. \qquad (3.8)$$

De la comparación de las expresiones (3.7) y (3.8) se desprende que

$$v_x=\dot{x},\quad v_y=\dot{y},\quad v_z=\dot{z}. \qquad (3.9)$$

Por consiguiente, la proyección del vector de velocidad en el eje de coordenadas es igual a la derivada respecto del tiempo de la coordenada correspondiente de la partícula en movimiento. Tomando en consideración (2.10), obtenemos la fórmula:

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}. \qquad (3.10)$$

El vector de velocidad puede ser representado en la forma $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$, donde v es el módulo de la velocidad, $\mathbf{e}_v$, el versor del vector $\mathbf{v}$. Introduzcamos el versor de la tangente a la trayectoria $\boldsymbol{\tau}$, poniéndonos de acuerdo que está dirigido en el mismo sentido que $\mathbf{v}$. Es evidente que los versores $\mathbf{e}_v$ y $\boldsymbol{\tau}$ coincidirán, por lo que podemos escribir la siguiente expresión:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v = v\boldsymbol{\tau}. \qquad (3.11)$$

Hallemos una expresión más para $\mathbf{v}$. Con este fin, pongamos en la fórmula (3.1) $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. De acuerdo con (2.49)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r. \qquad (3.12)$$

Fig. 3.6

Para simplificar, nos limitaremos al caso cuando la trayectoria es una curva plana, es decir, tal que todos sus puntos yacen en un mismo plano, que designaremos por x, y. En la fórmula (3.12) el vector $\mathbf{v}$ ha sido representado en forma de la suma de dos componentes (fig. 3.6). La primera componente, que designaremos por $\mathbf{v}_r$, es igual a

$$\mathbf{v}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r \qquad (3.13)$$

Está dirigida a lo largo del radio vector $\mathbf{r}$ y caracteriza la rapidez de variación del módulo r. La segunda componente, designada por $\mathbf{v}_\varphi$, es igual a

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\mathbf{e}}_r. \qquad (3.14)$$

Caracteriza la rapidez de variación del radio vector por la dirección.

Haciendo uso de la fórmula (2.56), podemos escribir

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

donde φ es el ángulo entre el radio vector y el eje x, $\mathbf{e}_\varphi$, un versor perpendicular al radio vector, dirigido hacia el sentido de crecimiento del ángulo φ (en la fórmula (2.56) este versor está designado por $\mathbf{e}_\perp$). Poniendo este valor en (3.14), obtenemos

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \qquad (3.15)$$

Hemos introducido las designaciones $\mathbf{v}_\varphi$ y $\mathbf{e}_\varphi$ para remarcar que la componente $\mathbf{v}_\varphi$ y el versor que le corresponde, están ligados con la variación del ángulo φ.

Está claro que los vectores $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}_\varphi$ son perpendiculares entre sí. Por lo tanto,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \qquad (3.16)$$

Examinemos el problema de cómo calcular el recorrido que pasa la partícula desde el momento de tiempo t_1 hasta el momento t_2, conociendo la magnitud de la velocidad en cada momento de tiempo. Dividamos el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ en N pequeños intervalos, que no deben ser obligatoriamente iguales: Δt_1, Δt_2, . . ., Δt_N. Todo el recorrido s pasado por la partícula, puede ser representado como la suma de los recorridos Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_N, pasados en los correspondientes intervalos de tiempo Δt:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i.$$

En correspondencia con la fórmula (3.4) cada uno de los sumandos puede ser representado con aproximación en la forma

$$\Delta s_i \approx v_i \, \Delta t_i,$$

donde Δt_i es el intervalo de tiempo durante el cual fue realizado el recorrido Δs_i, v_i, uno de los valores de la velocidad en el transcurso del tiempo Δt_i. Por lo tanto,

$$s \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \qquad (3.17)$$

La igualdad escrita será tanto más precisa, cuanto menores sean los intervalos de tiempo Δt_i. En el límite, cuando todos los Δt_i tienden a cero (la cantidad de intervalos Δt_i crecerá en este caso ilimitadamente) la igualdad aproximada se convertirá en precisa:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i$$

La expresión obtenida es la integral determinada de la función $v(t)$, calculada en los límites de t_1 a t_2. De esta forma, el recorrido que realiza la partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt. \qquad (3.18)$$

Remarquemos que aquí se trata del módulo de la velocidad. Si calculamos la integral de la propia velocidad $\mathbf{v}(t)$ obtendremos el vector de desplazamiento de la partícula desde el punto en el que se encontraba en el momento de tiempo t_1, hasta el punto al que llegó

en el momento t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}, \tag{3.19}$$

(véase (3.5)).

Si representamos la gráfica de la dependencia entre v y t (fig. 3.7), el recorrido realizado puede ser presentado como el área de la figura limitada por la curva $v(t)$ y las rectas $t = t_1$ y $t = t_2$. En efecto, el producto $v_i\,\Delta t_i$ es numéricamente igual al área de una franja i-ésima. La suma (3.17) es igual al área limitada por arriba con la línea quebrada, formada por los bordes superiores de todas las franjas. Cuando todos los Δt_i tienden a cero, la anchura de las franjas disminuye (creciendo al mismo tiempo su cantidad) y, al pasar al límite, la línea quebrada se convertirá en la curva $v = v(t)$. De este modo, el recorrido pasado durante el tiempo desde el momento t_1 hasta el momento t_2 es numéricamente igual al área limitada por la gráfica de la función $v = v(t)$, el eje del tiempo t y las rectas $t = t_1$ y $t = t_2$.

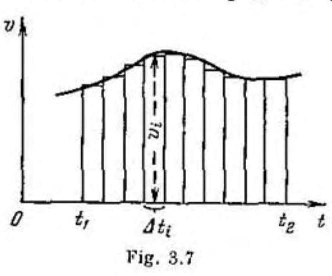


Fig. 3.7

Indiquemos, que el valor medio del módulo de la velocidad en el transcurso del tiempo de t_1 a t_2, por definición, es igual a[1])

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}.$$

Pongamos aquí la expresión (3.18) para s y obtenemos:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{3.20}$$

De modo análogo se calculan los valores medios de cualesquiera funciones escalares o vectoriales. Por ejemplo, el valor medio de la velocidad

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\,dt = \frac{\mathbf{r}_{12}}{t_2 - t_1} \tag{3.21}$$

---

[1]) Para designar el valor medio de cierta magnitud, incluiremos el símbolo de dicha magnitud en paréntesis angulares ⟨ ⟩.

(véase (3.19)). El valor medio de la función $y(x)$ en el intervalo de x_1 a x_2 se determina por la expresión

$$\langle y\rangle=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx. \qquad (3.22)$$

§ 4. Aceleración

La velocidad **v** de la partícula puede variar respecto del tiempo tanto en magnitud, como en sentido. La rapidez de variación del vector **v**, lo mismo que la rapidez de variación de toda función del tiempo, se define por la derivada **v** respecto de t. Si designamos dicha derivada con la letra **w**, obtendremos

$$\mathbf{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}}. \qquad (4.1)$$

La magnitud que se define con la fórmula (4.1) recibe el nombre de *aceleración* de la partícula.

Hay que señalar que con respecto de **v** la aceleración **w** desempeña el mismo papel que el vector **v** en lo que atañe al radio vector **r**.

Vectores iguales tienen idénticas proyecciones en los ejes de coordenadas. Entonces, por ejemplo,

$$w_x=\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{pr. x}}=\frac{dv_x}{dt}=\dot{v}_x$$

(véase (2.40)). Al mismo tiempo, según (3.9) $v_x=\dot{x}=dx/dt$. Por esto

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}.$$

Hemos hallado que la proyección del vector de aceleración sobre el eje x es igual a la segunda derivada de la coordenada x respecto del tiempo: $w_x=\ddot{x}$. Expresiones análogas se obtienen para la proyección de la aceleración en los ejes y, z. Es decir,

$$w_x=\ddot{x},\quad w_y=\ddot{y},\quad w_z=\ddot{z}. \qquad (4.2)$$

Poniendo en la fórmula (4.1) la expresión (3.11) para **v**:

$$\mathbf{w}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}). \qquad (4.3)$$

Recordemos que $\boldsymbol{\tau}$ es el versor de la tangente a la trayectoria, dirigido en el mismo sentido que **v**. De acuerdo con (2.49)

$$\mathbf{w}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+v\dot{\boldsymbol{\tau}}. \qquad (4.4)$$

Por lo tanto, el vector **w** puede ser representado en forma de la suma de dos componentes. Una de ellas es colinear a $\boldsymbol{\tau}$, o sea, está dirigida

por la tangente a la trayectoria, por lo que se designa con $\mathbf{w}_\tau$ y es llamada *aceleración tangencial*. Es igual a

$$\mathbf{w}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}. \tag{4.5}$$

La segunda componente igual a $v\dot{\boldsymbol{\tau}}$, está dirigida por la normal a la trayectoria, lo que mostraremos más adelante, se designa con $\mathbf{w}_n$ y recibe el nombre de *aceleración normal*. Así, pues,

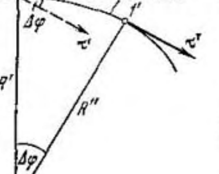


Fig. 4.1

$$\mathbf{w}_n = v\dot{\boldsymbol{\tau}}. \tag{4.6}$$

Investiguemos las propiedades de las dos componentes, limitándonos para mayor sencillez al caso, cuando la trayectoria es una curva plana.

El módulo de la aceleración tangencial (4.5)

$$|\mathbf{w}_\tau| = |\dot{v}|. \tag{4.7}$$

Si $\dot{v} > 0$ (la velocidad crece en magnitud), el vector $\mathbf{w}_\tau$ estará dirigido en el mismo sentido que $\boldsymbol{\tau}$ (o sea, en el mismo sentido que $\mathbf{v}$). Si $\dot{v} < 0$ (con el tiempo la velocidad disminuye), los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_\tau$ estarán dirigidos en sentidos opuestos. Durante el movimiento uniforme $\dot{v} = 0$ y, por lo tanto, no hay aceleración tangencial.

Para aclarar las propiedades de la aceleración normal (4.6), hay que establecer cómo se define $\dot{\boldsymbol{\tau}}$, es decir, la rapidez con la que varía la dirección de la tangente a la trayectoria respecto del tiempo. Se comprende con facilidad que dicha rapidez será tanto mayor, cuanto más intensamente esté encorvada la trayectoria y cuanto mayor sea la rapidez de desplazamiento de la partícula por ella.

El grado de encorvadura de una curva plana es caracterizado por la *curvatura* C, que se determina por la expresión

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{4.8}$$

donde $\Delta\varphi$ es el ángulo entre las tangentes a la curva en los puntos distanciados entre sí a Δs (fig. 4.1). De este modo, la curvatura determina la velocidad de giro de la tangente durante el desplazamiento a lo largo de la curva.

Se llama *radio de curvatura* R en el punto dado de la curva, la magnitud inversa a C:

$$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \tag{4.9}$$

El radio de curvatura es el radio de una circunferencia que en el lugar dado confluye con la curva en un sector infinitesimal de ésta. El centro de semejante circunferencia recibe el nombre de *centro de curvatura* para el punto dado de la curva.

El radio y el centro de curvatura en el punto *1* (véase la fig. 4.1) pueden ser determinados del modo siguiente. Junto al punto *1* tomemos el punto *1'*. Sobre estos puntos trazamos las tangentes $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\tau}'$. Las perpendiculares a éstas se cruzarán en cierto punto O'. Señalemos, que para una curva que no sea una circunferencia, las distancias R' y R'' en cierto grado se diferenciarán entre sí. Si aproximamos el punto *1'* al punto *1*, la intersección de las perpendiculares O' se desplazará a lo largo de la recta R' y en el límite se encontrará en cierto punto O. Éste será el centro de curvatura para el punto *1*. Las distancias R' y R'' tenderán al límite general R, igual a radio de curvatura. En efecto, si los puntos *1* y *1'* están muy cerca uno de otro, podemos escribir que $\Delta\varphi \approx \Delta s/R'$ o bien $R' \approx \Delta s/\Delta\varphi$. En el límite, para $\Delta\varphi \to 0$, esta igualdad aproximada se convierte en la rigurosa igualdad $R = ds/d\varphi$, que coincide con la definición del radio de curvatura (véase (4.9)).

Retornemos al cálculo de $\mathbf{w}_n$ (véase (4.6)). De acuerdo con (2.56)

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n}, \qquad (4.10)$$

donde $\mathbf{n}$ es el versor de la normal a la trayectoria, dirigido en el mismo sentido hacia el que gira el vector $\boldsymbol{\tau}$ cuando la partícula se mueve por la trayectoria (en la fórmula (2.56) un versor análogo fue designado por $\mathbf{e}_\perp$). La magnitud $d\varphi/dt$ puede ser ligada con el radio de curvatura de la trayectoria y con la velocidad de la partícula v. De la fig. 4.1 se deduce que

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R'} = \frac{v'\Delta t}{R'},$$

donde $\Delta\varphi$ es el ángulo de giro del vector $\boldsymbol{\tau}$ durante el timpo Δt (que coincide con el ángulo entre las perpendiculares R' y R''), v', la velocidad media por el recorrido Δs. De aquí

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx \frac{v'}{R'}.$$

En el límite para $\Delta t \to 0$ la igualdad aproximada se hace rigurosa, la velocidad media v' se convertirá en la velocidad instantánea v en el punto *1*, R', en el radio de curvatura R. Obtenemos la igualdad

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = vC \qquad (4.11)$$

(C es la curvatura). Por lo tanto, la rapidez de giro del vector de velocidad, como suponíamos, es proporcional a la curvatura de la

trayectoria y a la velocidad de desplazamiento de la partícula por ella.

Poniendo (4.11) en la fórmula (4.10), hallaremos que $\dot{\boldsymbol{\tau}} = (v/R)\,\mathbf{n}$. Por fin, sustituyendo esta expresión en (4.6) llegaremos a la fórmula definitiva para la aceleración normal:

$$\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{R}\,\mathbf{n}. \qquad (4.12)$$

Así, pues, durante el movimiento de la partícula por una curva plana, el vector de aceleración se determina mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\,\mathbf{n}. \qquad (4.13)$$

El módulo del vector $\mathbf{w}$

$$w = \sqrt{|\mathbf{w}_\tau|^2 + |\mathbf{w}_n|^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}. \qquad (4.14)$$

Durante el movimiento rectilíneo no hay aceleración normal. Notemos que $\mathbf{w}_n$ se reduce a cero en el punto de inflexión de la trayectoria curvilínea (en el punto PI de la fig. 4.2). Por ambos lados de este punto los vectores $\mathbf{w}_n$ están dirigidos en sentidos diferentes. El vector $\mathbf{w}_n$ no puede variar por salto; el cambio de su sentido por el opuesto transcurre uniformemente con la reducción de $\mathbf{w}_n$ a cero en el punto de inflexión.

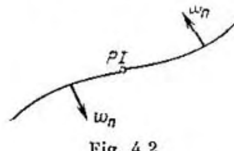


Fig. 4.2

Supongamos que una partícula está en movimiento uniforme con aceleración constante. Como durante el movimiento uniforme la velocidad no varía en magnitud, $\mathbf{w}_\tau = 0$, o sea $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$. La constancia del valor de $\mathbf{w}_n$ quiere decir que $v^2/R = \text{const}$. De esto, llegamos a la conclusión de que $R = \text{const}$ ($v = \text{const}$ a causa de la uniformidad de movimiento). Esto significa que la partícula se mueve por una curva de curvatura constante, es decir, por una circunferencia. De este modo, cuando la aceleración de una partícula es constante en magnitud y en cada momento de tiempo es perpendicular al vector de velocidad, la trayectoria de la partícula será una circunferencia.

§ 5. Cinemática del movimiento de rotación

La rotación de un cuerpo a cierto ángulo φ puede ser prefijado en forma de un segmento, cuya longitud es igual a φ, coincidiendo su dirección con el eje alrededor del cual transcurre la rotación. Con el fin de indicar hacia qué lado se realiza la rotación alrededor del eje prefijado, la dirección de rotación y el segmento que la repre-

senta se ligan por medio de la *regla del sacacorchos*: la dirección del segmento debe ser tal, que al mirar a lo largo de éste (fig. 5.1) veamos la rotación en sentido horario (girando el mango del sacacorchos en sentido horario provocaremos un desplazamiento alejándose del lector). En el § 2 fue mostrado (véase la fig. 2.1) que los giros a ángulos finitos no se suman según la regla del paralelogramo, por lo que podemos afirmar que no son vectores. Al girar a ángulos muy pequeños $\Delta\varphi$, el problema es completamente otro. El recorrido que realiza cualquier punto del cuerpo durante un giro muy pequeño,

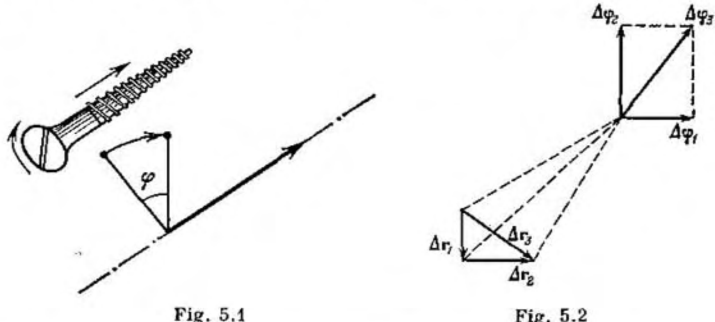


Fig. 5.1

Fig. 5.2

puede ser considerado rectilíneo (fig. 5.2). Por esta razón, dos pequeños giros $\Delta\varphi_1$ y $\Delta\varphi_2$ que se realizan sucesivamente condicionan, como vemos en el dibujo, un desplazamiento igual $\Delta\mathbf{r}_3 = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2$ de cualquier punto del cuerpo, lo mismo que la rotación $\Delta\varphi_3$ obtenida de $\Delta\varphi_1$ y $\Delta\varphi_2$, sumándolos según la regla del paralelogramo. De aquí sigue, que rotaciones muy pequeñas pueden ser consideradas como vectores (que vamos a designar con los símbolos $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ o $d\boldsymbol{\varphi}$). El sentido del vector de rotación se liga con la dirección de rotación del cuerpo. Por consiguiente, $d\boldsymbol{\varphi}$ no es un vector real, sino que es un seudovector.

La magnitud vectorial

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \tag{5.1}$$

(donde Δt es el tiempo durante el que se efectúa la rotación $\Delta\boldsymbol{\varphi}$) recibe el nombre de *velocidad angular* del cuerpo[1]). La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, que es un seudovector, está dirigida a lo largo del eje, alrededor del cual gira el cuerpo, en el sentido que determina la regla del sacacorchos (fig. 5.3). El módulo de la velocidad angular es igual a $d\varphi/dt$. Llamamos *uniforme* la rotación a velocidad angular constante. Si

[1]) En ocasiones, denominan *lineal* la velocidad $\mathbf{v}$ estudiada en el § 3.

la rotación es uniforme, $\omega = \varphi/t$, donde φ es el ángulo finito de rotación durante el tiempo t (comp. con $v = s/t$). De este modo, con la rotación uniforme ω muestra a qué ángulo gira el cuerpo por la unidad de tiempo.

La rotación uniforme puede ser caracterizada por el período de rotación T, por el que se entiende el tiempo que el cuerpo tarda

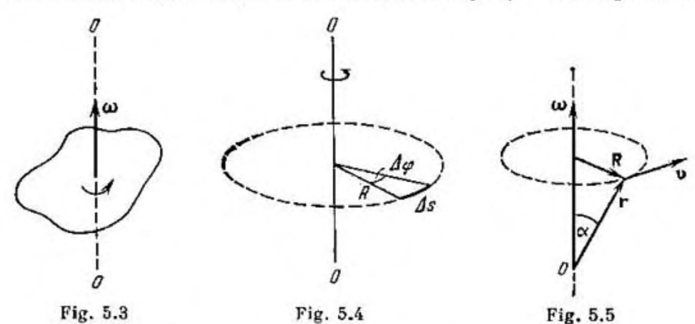


Fig. 5.3 Fig. 5.4 Fig. 5.5

en dar una vuelta, es decir, gira a un ángulo 2π. Como al intervalo de tiempo $\Delta t = T$ le corresponde el ángulo de rotación $\Delta\varphi = 2\pi$,

$$\omega = 2\pi/T, \tag{5.2}$$

de donde

$$T = 2\pi/\omega. \tag{5.3}$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo ν es igual a

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi. \tag{5.4}$$

De (5.4) se desprende que la velocidad angular es igual a 2π multiplicada por el número de revoluciones por unidad de tiempo:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{5.5}$$

Los conceptos de período de rotación y número de revoluciones por unidad de tiempo pueden ser también conservados para la rotación variada, entendiendo por valor instantáneo de T el tiempo durante el que el cuerpo daría una vuelta, si él girara uniformemente con el valor dado de la velocidad angular instantánea y entendiendo por ν aquel número de revoluciones que realizaría el cuerpo por unidad de tiempo en condiciones análogas.

El vector $\boldsymbol{\omega}$ puede variar tanto a cuenta de la variación de la velocidad de rotación alrededor del eje (en semejante caso variará en magnitud), como a cuenta del giro del eje de rotación en el espacio (aquí, $\boldsymbol{\omega}$ cambiará de sentido). Sea que durante el tiempo Δt, el

vector ω recibe un incremento $\Delta\omega$. La variación del vector de la velocidad angular respecto del tiempo se caracteriza por la magnitud

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \tag{5.6}$$

que recibe el nombre de *aceleración angular*. Lo mismo que la velocidad angular, la aceleración angular es un seudovector.

En un cuerpo en rotación, puntos aislados de éste tienen diferentes velocidades lineales $\mathbf{v}$. La velocidad de cada uno de los puntos cambia permanentemente de dirección. La magnitud de la velocidad v se determina por la velocidad de rotación ω del cuerpo y la distancia R del eje de rotación al punto que consideramos. Supongamos que durante un pequeño intervalo de tiempo, el cuerpo ha girado al ángulo $\Delta\varphi$ (fig. 5.4). El punto que se encuentra a la distancia R del eje, pasa un recorrido $\Delta s = R\,\Delta\varphi$. La velocidad lineal del punto

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Es decir,

$$v = \omega R. \tag{5.7}$$

La fórmula (5.7) liga el módulo de las velocidades lineal y angular. Hallemos una expresión que ligue los vectores $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\omega}$. La posición del punto que consideramos será determinada por el radio vector $\mathbf{r}$, trazado desde el origen de coordenadas O, que yace en el eje de rotación (fig. 5.5). La figura nos muestra que la dirección del producto vectorial $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ coincide con el vector $\mathbf{v}$ y tiene un módulo igual a $\omega r \operatorname{sen} \alpha = \omega R$. Por lo tanto

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{5.8}$$

El módulo de la aceleración normal de los puntos de un cuerpo en rotación es igual a $|\mathbf{w}_n| = v^2/R$. Poniendo en esta expresión el valor de v de (5.7) obtenemos:

$$|\mathbf{w}_n| = \omega^2 R. \tag{5.9}$$

Si introducimos el vector $\mathbf{R}$, perpendicular al eje de rotación, trazado al punto dado del cuerpo (véase la fig. 5.5), podemos dar a la correlación (5.9) forma vectorial:

$$\mathbf{w}_n = -\omega^2 \mathbf{R}. \tag{5.10}$$

En esta fórmula ha aparecido el signo menos a cuenta de que los vectores $\mathbf{w}_n$ y $\mathbf{R}$ tienen sentidos opuestos.

Supongamos que el eje de rotación del cuerpo no gira en el espacio. De acuerdo con (4.7), el módulo de la aceleración tangencial será igual a $|dv/dt|$. Haciendo uso de la correlación (5.7) y teniendo en cuenta que la distancia del punto del cuerpo que consideramos al

eje de rotación $R = \text{const}$, podemos escribir:

$$|\mathbf{w}_\tau| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = R\beta,$$

donde β es el módulo de la aceleración angular. Por lo tanto, los módulos de las aceleraciones tangencial y angular están ligados mediante la correlación

$$|\mathbf{w}_\tau| = \beta R. \tag{5.11}$$

De este modo, las aceleraciones normal y tangencial crecen linealmente al aumentar la distancia desde el punto hasta el eje de rotación.

CAPÍTULO II

DINÁMICA DE UN PUNTO MATERIAL

§ 6. Mecánica clásica. Límites de su aplicación

La cinemática describe el movimiento de los cuerpos sin tratar el motivo por qué el cuerpo se mueve de forma determinada (por ejemplo, uniformemente por una circunferencia o uniformemente acelerado por una recta) y no de otra manera.

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos en relación con las causas (interacción entre los cuerpos) que condicionan uno u otro carácter del movimiento.

La llamada mecánica clásica o newtoniana se basa en las tres leyes de dinámica enunciadas por Newton en 1687.

Las leyes de Newton (como todas las demás leyes físicas) surgieron como resultado de la generalización de una gran cantidad de factores experimentales. Su veracidad (aunque sea para un círculo muy extenso de fenómenos, pero a pesar de todo limitado) se confirma por la concordancia con la experiencia de aquellos corolarios que de dichas leyes se deducen.

La mecánica newtoniana alcanzó en el transcurso de dos centurias éxitos tan enormes, que muchos físicos del siglo XIX estaban convencidos de su omnipotencia. Era considerado que explicar cualquier fenómeno físico significaba reducirlo a un proceso mecánico supeditado a las leyes de Newtón. No obstante, con el fomento de las ciencias fueron descubiertos nuevos hechos que no entraban en los límites de la mecánica clásica. Dichos hechos han sido explicados en nuevas teorías, es decir, en la teoría especial de la relatividad y en la mecánica cuántica.

En la teoría especial de la relatividad, creada por Einstein en 1905, fueron revisadas de forma radical las representaciones newtonianas sobre el espacio y el tiempo. Semejante revisión llevó a la creación de la «mecánica de grandes velocidades» o, como es denominada, a la mecánica relativista. Sin embargo, la aparición de la nueva mecánica no provocó la refutación completa de la mecánica newtoniana. En el límite, las ecuaciones de la mecánica relativista (para velocidades pequeñas en comparación con la de la luz) se convierten en las ecuaciones de la mecánica clásica. De este modo, la mecánica clásica ha entrado en la relativista como un caso particular y conserva su anterior importancia para describir los movimientos que transcurren a velocidades mucho menores que la de la luz.

En lo que respecto a la correlación entre la física clásica y la mecánica cuántica, surgida en la década del 20 de nuestro siglo, como

resultado del desarrollo de la física del átomo, la situación es análoga. Las ecuaciones de mecánica cuántica también ofrecen en el límite (para masas mayores que las del átomo) las ecuaciones de la mecánica clásica. Por consiguiente, la mecánica clásica también se ha incluido en la mecánica cuántica como su caso límite.

Así, pues, el fomento de las ciencias no ha «borrado» la mecánica clásica, sino que ha mostrado su limitada aplicación. La mecánica clásica, basada en las leyes de Newton, es la mecánica de los cuerpos de grandes masas (en comparación con la masa de los átomos), que se mueven a pequeñas velocidades (en comparación con la de la luz).

§ 7. Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia

La primera ley de Newton se enuncia del siguiente modo: *todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras otros cuerpos no actúen sobre él y le obliguen a cambiar de estado*. Los dos indicados estados se distinguen por ser la aceleración de cuerpo igual a cero. Por esta causa, la enunciación de la primera ley puede tomar la siguiente forma: la velocidad de todo cuerpo queda constante (en particular, nula), mientras la acción de otros cuerpos sobre éste no provoque su variación.

La primera ley de Newton se cumple no en todo sistema de referencia. Más arriba ya indicamos que el carácter del movimiento depende del sistema de referencia elegido. Consideremos dos sistemas de referencia en movimiento con cierta aceleración, uno respecto a otro. Si con relación a uno de ellos el cuerpo está en reposo, en lo que atañe al segundo se moverá, por lo visto, con aceleración. Por lo tanto, la primera ley de Newton no puede cumplirse en los dos sistemas al mismo tiempo.

Recibe el nombre de *inercial* el sistema de referencia en el que se cumple la primera ley de Newton. La propia ley es a veces llamada *ley de inercia*. El sistema de referencia en el que la primera ley de Newton no se cumple, denomínase sistema no inercial de referencia. Todo sistema de referencia que respecto de cierto sistema inercial está en movimiento rectilíneo uniforme (es decir, a velocidad constante), también será inercial. Esto se estudiará con más detalle en el § 12.

De forma experimental se ha establecido que el sistema de referencia cuyo centro coincide con el Sol, mientras que los ejes están dirigidos hacia estrellas elegidas del modo correspondiente, es inercial. Éste recibe el nombre de *sistema heliocéntrico de referencia* (helios en griego Sol). Cualquier sistema de referencia en movimiento rectilíneo uniforme respecto del sistema heliocéntrico, será inercial.

La Tierra se mueve respecto del Sol y las estrellas por trayectorias curvilíneas, en forma de elipses. El movimiento curvilíneo siempre transcurre con cierta aceleración. Además, la Tierra gira alrededor de su eje. Por estas causas, el sistema de referencia, ligado con la superficie terrestre, se mueve con aceleración respecto del sistema heliocéntrico de referencia y no es inercial. No obstante, la aceleración de semejante sistema es tan pequeña, que en la mayoría de los casos dicho sistema puede ser considerado inercial. Pero hay casos, cuando la carencia de inercia del sistema de referencia relacionado con la Tierra, influye de manera considerable sobre el carácter de los fenómenos mecánicos que se consideran con relación a él. Algunos de dichos casos serán estudiados más adelante.

§ 8. Masa y cantidad de movimiento de un cuerpo

La acción de otros cuerpos sobre el cuerpo dado provoca la variación de su velocidad, es decir, comunica a éste aceleración. La experiencia muestra que iguales acciones comunican a diferentes cuerpos aceleraciones distintas en magnitud. Todo cuerpo se opone a los intentos de cambiar su estado de movimiento. Esta propiedad de los cuerpos se denomina *inercia*. La característica cuantitativa de la inercia es una magnitud llamada *masa* del cuerpo.

Para determinar la masa de cierto cuerpo hay que compararla con la masa del cuerpo aceptado como patrón de masa. También es posible comparar la masa del cuerpo dado con la de cierto cuerpo cuya masa es conocida (definida mediante su comparación con el patrón). La operación para comparar las masas m_1 y m_2 de dos puntos materiales (partículas) puede ser realizada del modo siguiente. Pongamos estas dos partículas en tales condiciones que podamos despreciar la interacción con otros cuerpos. Recibe el nombre de *cerrado* un sistema de cuerpos que interactúan sólo entre sí y no lo hacen con otros cuerpos. Esto quiere decir, que nosotros examinamos un sistema cerrado de dos partículas. Si obligamos a que estas partículas interactúen (por ejemplo, que choquen) sus velocidades recibirán incrementos $\Delta\mathbf{v}_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2$. La práctica muestra que estos incrementos siempre tienen direcciones opuestas, o sea, que se diferencian por su signo. La razón entre los módulos de los incrementos no depende del procedimiento e intensidad de la interacción de los dos cuerpos dados[1]). Esta razón se toma igual al cociente inverso de las masas de los cuerpos que consideramos:

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}_1|}{|\Delta\mathbf{v}_2|}=\frac{m_2}{m_1} \tag{8.1}$$

[1]) Esto es justo en el caso, cuando las velocidades iniciales y finales de las partículas son pequeñas en comparación con la de la luz c.

(el cuerpo más inerte, es decir, con mayor masa, sufre menor variación de su velocidad). Tomando en consideración el sentido relativo de los vectores $\Delta\mathbf{v}_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2$, la correlación (8.1) puede ser escrita de la forma

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2. \tag{8.2}$$

En la mecánica de Newton (es decir, en la mecánica basada en las leyes de Newton) se supone que la masa del cuerpo es una magnitud constante que no depende de la velocidad del cuerpo. A velocidades pequeñas en comparación con la de la luz c (para $v \ll c$), semejante suposición, prácticamente, se cumple. Haciendo uso de la constancia de la masa, representemos la igualdad (8.2) en el siguiente aspecto:

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) = -\Delta(m_2\mathbf{v}_2). \tag{8.3}$$

El producto de la masa del cuerpo por su velocidad recibe el nombre de *cantidad de movimiento* del cuerpo. Si designamos la cantidad de movimiento por $\mathbf{p}$, obtenemos:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{8.4}$$

La definición (8.4) es justa para puntos materiales (partículas) y cuerpos extendidos en movimiento de traslación (avance). Si se trata de un cuerpo extendido en movimiento que no es de traslación, hay que representar el cuerpo como un conjunto de puntos materiales con masas Δm_i, determinar las cantidades de movimiento $\Delta m_i\mathbf{v}_i$ de dichos puntos y, a continuación, sumar de forma vectorial estas cantidades de movimiento. Como resultado, obtendremos la cantidad total de movimiento del cuerpo:

$$\mathbf{p} = \sum_i \Delta m_i\mathbf{v}_i. \tag{8.5}$$

Cuando el cuerpo está en movimiento de traslación, todas las $\mathbf{v}_i$ son iguales y la fórmula (8.5) se convierte en la (8.4).

Sustituyendo en (8.3) los productos $m\mathbf{v}$ por las cantidades de movimiento $\mathbf{p}$ llegamos a la correlación $\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$, de donde $\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$. La igualdad a cero del incremento de cierta magnitud quiere decir que la propia magnitud queda invariable. Es decir, hemos llegado a la conclusión de que *la cantidad total de movimiento del sistema cerrado de dos partículas en interacción es una magnitud constante*:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}. \tag{8.6}$$

La afirmación que hemos aducido más arriba es el contenido del *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. En el § 27 estudiaremos este principio con mayor detalle.

Señalemos que en mecánica relativista (véase el cap. VIII) la fórmula para la cantidad de movimiento en comparación con (8.4),

tiene una forma más complicada:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{8.7}$$

Aquí m es la llamada *masa en reposo* del cuerpo (para $v=0$), c, la velocidad de la luz en el vacío. La interpretación de (8.7) puede ser la siguiente: la masa del cuerpo no queda constante (como se supone en mecánica newtoniana), sino que varía con la velocidad según la ley

$$m(v)=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{8.8}$$

Como resultado, la expresión (8.7) puede ser representada como

$$\mathbf{p}=m(v)\,\mathbf{v}, \tag{8.9}$$

lo que es análogo a (8.4).

La masa $m(v)$ definida con la fórmula (8.8) recibe el nombre de *masa relativista* o *masa en movimiento*. En adelante, la designaremos con el símbolo m_r.

§ 9. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton dice: *la velocidad de variación de la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la fuerza* **F** *aplicada a él*:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}. \tag{9.1}$$

La ecuación (9.1) denomínase *ecuación de movimiento del cuerpo*.

Sustituyendo **p** en (8.4) por el producto $m\mathbf{v}$ y tomando en consideración que en la mecánica newtoniana se supone que la masa es constante, es posible representar la correlación (9.1) así

$$m\mathbf{w}=\mathbf{F}, \tag{9.2}$$

donde $\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}$. De este modo hemos llegado a otra enunciación de la segunda ley de Newton: *el producto de la masa del cuerpo por su aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre él.*

La correlación (9.2) provocaba y continúa provocando entre los físicos agudas discusiones. Hasta la fecha no hay una interpretación general de dicha correlación. La dificultad radica en que no hay procedimientos independientes para definir m y **F**, magnitudes que entran en la ecuación (9.2). Para determinar una de ellas (m o **F**) es preciso hacer uso de la correlación (9.2) en donde estas dos magnitudes están ligadas entre sí y con la aceleración **w**. Por ejemplo, en el libro de S. E. Jaikin «Fundamentos físicos de mecánica» en la pá-

gina 104, leemos :«Ya que para establecer el procedimiento de medición de la masa del cuerpo se hace uso de la propia segunda ley de Newton (el valor de la masa del cuerpo se define simultáneamente con la medición de la fuerza y la aceleración), la segunda ley de Newton contiene, por un lado, la afirmación de que la aceleración es proporcional a la fuerza y por otro, la definición de la masa del cuerpo como la razón entre la fuerza aplicada a él y la aceleración que se comunica por la indicada fuerza»[1]).

Respecto al espíritu de la segunda ley de Newton R. Feynman decía: «Preguntemos: ¿cuál es el sentido... de la fórmula $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$? De forma intuitiva, comprendemos qué es la masa; también podemos determinar la aceleración si comprendemos qué es el espacio y qué es el tiempo. Por esta razón, no vamos a discutir el sentido de estos conceptos, sino que nos concentraremos en la nueva noción de fuerza. En este sentido la respuesta es asimismo sencilla: si el cuerpo se acelera, quiere decir que sobre él actúa una fuerza. Así dicen las leyes de Newton y la definición de fuerza más precisa y bella de todas las posibles, consistiría en que la fuerza es la masa del cuerpo, multiplicada por su aceleración...». Sin embargo «... después de descubrir la ley fundamental, que afirma que la fuerza es el producto de la masa por la aceleración y, a continuación, al definir la fuerza como la multiplicación de la masa por la aceleración, nada nuevo hemos descubierto... semejantes enunciaciones no pueden constituir el contenido de la física: ¿con qué fin hay que hacer que las definiciones anden por un círculo? ... de una sola definición nadie ha deducido nunca nada... El verdadero contenido de la ley de Newton es el siguiente: se supone que como adición a la ley $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$ la fuerza posee *propiedades independientes*; pero ni Newton ni nadie aún, ha descrito por completo las propiedades características de la fuerza...» (Lecciones de física de Feynman, fascículo 1, pág. 209—210)[2]).

Señalemos que la segunda ley de Newton (como las otras dos) es experimental. Fue creada como resultado de la generalización de los datos de experimentos y observaciones.

En el caso particular, cuando $\mathbf{F} = 0$ (es decir, al no haber acción alguna sobre el cuerpo por parte de otros cuerpos), como se desprende de (9.2), la aceleración es también nula. Esta deducción coincide con la afirmación de la primera ley de Newton. Por esta causa, la primera ley entra en la segunda como un caso particular. Sin embargo, la primera ley se enuncia independientemente de la segunda, ya que en esencia, ella contiene el postulado (afirmación) de la existencia de sistemas inerciales de referencia.

---

[1]) Editorial «Fizmatguiz», Moscú, 1963 (en ruso).
[2]) Editorial «Mir», Moscú, 1965 (en ruso).

En conclusión, notemos que con la elección independiente de las unidades de masa, fuerza y aceleración, la expresión de la segunda ley debe escribirse en la forma

$$m\mathbf{w} = k\mathbf{F}, \tag{9.3}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

§ 10. Unidades y dimensiones de las magnitudes físicas

Como ya hemos señalado, las leyes de física establecen las correlaciones cuantitativas entre las magnitudes físicas. Con el fin de establecer semejantes correlaciones hay que poder medir diversas magnitudes físicas.

La medición de cualquier magnitud física (por ejemplo, la velocidad) quiere decir que ésta se compara con una magnitud del mismo tipo (en nuestro ejemplo, con la velocidad) que tomamos como unidad.

En general, para cada magnitud física sería posible establecer su unidad de forma arbitraria, independientemente de otras unidades. Pero resulta, que nos podemos limitar por la elección al azar de unidades para varias (no menos de tres) unidades, que en principio pueden ser cualesquiera, tomadas como base. Las unidades del resto de las magnitudes pueden ser establecidas con ayuda de las fundamentales, empleando con este objeto las leyes físicas que ligan la magnitud dada con las magnitudes fundamentales o con las magnitudes, para las que las unidades ya han sido establecidas de semejante forma.

Aclaremos lo dicho con el ejemplo siguiente. Supongamos que ya hemos establecido las unidades de masa y aceleración. La correlación (9.3) enlaza de forma regular estas magnitudes con una tercera magnitud física, la fuerza. Elijamos la unidad de fuerza de tal modo que el coeficiente de proporcionalidad sea en esta ecuación igual a uno. Ento la fórmula (9.3) toma una forma más sencilla:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}. \tag{10.1}$$

De (10.1) se desprende que la unidad de fuerza establecida es una fuerza tal que por su acción sobre un cuerpo de masa igual a la unidad, éste recibe una aceleración también igual a uno (si en (10.1) ponemos $F = 1$ y $m = 1$, obtendremos $w = 1$).

Con el indicado procedimiento para elegir las unidades, las correlaciones toman una forma más sencilla. El propio conjunto de unidades forma un sistema determinado.

Existen varios sistemas que se distinguen por la elección de las unidades fundamentales. Reciben el nombre de *absolutos* sistemas basados en las unidades de longitud, masa y tiempo.

En la URSS, desde el 1 de enero de 1963 fue introducido el Estándar Estatal GOST 9867-61 que impuso la aplicación del *Sistema Internacional de Unidades*, designado por el símbolo SI. Este sistema

debo ser aplicado de modo prevalente en todas las ramas de la ciencia, técnica y economía nacional, así como en la enseñanza. En el SI las unidades fundamentales son: la unidad de longitud—el metro (abreviatura—m), la unidad de masa—el kilogramo (kg) y la unidad de tiempo—el segundo (s). Es decir, el SI es un sistema absoluto de unidades. Además de las tres unidades indicadas más arriba, el SI toma en calidad de fundamentales la unidad de intensidad de corriente—el amperio (A), la unidad de temperatura termodinámica—el kelvin (K), la unidad de intensidad luminosa—la candela (cd) y la unidad de cantidad de materia—mol (mol). En los correspondientes capítulos del curso serán examinadas estas unidades.

El metro se determina como una longitud igual a 1650763,73 longitudes de ondas luminosas en el vacío de una radiación que corresponde a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de criptón-86[1]) (línea anaranjada de criptón-86). De modo aproximado, el metro es igual a 1/40 000 000 parte de la longitud del meridiano terrestre. También se hace uso de unidades derivadas y unidades fraccionales: kilómetro (1 km = 10^3 m), centímetro (1 cm = 10^{-2} m), milímetro (1 mm = 10^{-3} m), micrómetro (1 μm = 10^{-6} m), etc.

El kilogramo es la masa de un cuerpo de platino iridiado[2]) que se conserva en la oficina de Pesas y Medidas en la ciudad de Sévres (cerca de París). Este cuerpo denomínase prototipo internacional del kilogramo. La masa del prototipo es próxima a 1000 cm³ de agua pura a 4 °C. El gramo es igual a 1/1000 de kilogramo.

El segundo se determina como el intervalo de tiempo igual a la suma de 9 192 631 770 períodos de radiación, que corresponde a la transición entre dos niveles ultrafinos del estado fundamental del átomo de cesio-133. Aproximadamente, el segundo es igual a 1/86 400 parte del día solar medio.

En física también se emplea el sistema absoluto de unidades llamado CGS. Las unidades fundamentales de este sistema son el centímetro, gramo y segundo.

Las unidades de las magnitudes que hemos introducido en cinemática (velocidad y aceleración) son derivadas de las unidades fundamentales. Así, por unidad de velocidad se toma la velocidad de un cuerpo en movimiento uniforme, que por la unidad de tiempo (segundo) hace un recorrido igual a la unidad de longitud (metro o centímetro). Esta unidad se designa en el SI por m/s y en el CGS, por cm/s. Por unidad de aceleración se toma la velocidad del movimiento uniforme-variable, con el que la velocidad del cuerpo por la unidad de tiempo (segundo) varía en la unidad (en m/s o cm/s). Esta unidad se designa por m/s² en el SI y cm/s² en el CGS.

---

[1]) El sentido de estas designaciones se explica en el apartado «Física atómica».

[2]) La aleación de platino e iridio tiene mayor dureza y estabilidad corrosiva (es decir, es menos expuesta a la acción química medioambiental).

La unidad de fuerza en el SI recibe el nombre de newton (N). De acuerdo con (10.1) el newton es igual a la fuerza que comunica a un kilogramo de masa la aceleración de 1 m/s^2. En el sistema CGS la unidad de fuerza se denomina dina (din). Una dina es igual a la fuerza que comunica a un kilogramo de masa una aceleración de 1 cm/s^2. Entre el newton y la dina hay la siguiente correlación:

$$1\text{N} = 1\ \text{kg}\cdot 1\ \text{m/s}^2 = 10^3\ \text{g}\cdot 10^2\ \text{cm/s}^2 = 10^5\ \text{din}.$$

En técnica se utiliza ampliamente el sistema MKgfS (que, por regla, se llama sistema técnico de unidades o bien sistema gravitatorio). Las unidades fundamentales de este sistema son el metro, la unidad de fuerza—el kilogramo-fuerza (o kilogramo-peso) (kgf o kg) y el segundo (s). El kilogramo-fuerza se define como la fuerza que comunica a la masa de 1 kg una aceleración igual a 9,80655 m/s^2. De esta definición sigue que 1 kgf = 9,80655 N (aproximadamente 9,81 N).

De acuerdo con (10.1), en el sistema técnico (MKgfS) por unidad de masa debe ser tomada la de un cuerpo que bajo la acción de 1 kgf recibe una aceleración de 1 m/s^2. Esta unidad se designa por kgf·s^2/m y no tiene denominación especial. Es evidente que 1 kgf·s^2/m = = 9,80655 kg (cerca de 9,81 kg).

Del procedimiento de construcción del sistema de unidades se desprende que la variación de las unidades fundamentales provoca el cambio de las derivadas. Por ejemplo, si tomamos por unidad de tiempo el minuto en lugar del segundo, es decir, aumentamos 60 veces la unidad de tiempo, la de la velocidad disminuirá 60 veces y la de aceleración, 3600 veces.

La relación que muestra cómo varía la unidad de cualquier magnitud al cambiar las unidades fundamentales, recibe el nombre de *dimensión* de esta magnitud. Para designar la dimensión física arbitraria se emplea su designación literal tomada entre corchetes. Por ejemplo, el símbolo $[v]$ es la dimensión de la velocidad. Para las dimensiones de las magnitudes fundamentales se hace uso de designaciones especiales: para la longitud L, la masa M y el tiempo T. De este modo, designando la longitud con la letra l, la masa con m y el tiempo con t, podemos escribir:

$$[l] = \text{L};\ [m] = \text{M};\ [t] = \text{T}.$$

En las designaciones indicadas la dimensión de la magnitud física, tomada al azar, tiene el aspecto $\text{L}^\alpha\text{M}^\beta\text{T}^\gamma$ (α, β y γ pueden ser positivos o negativos y en caso particular, nulos). Esta anotación quiere decir que al aumentar la unidad de longitud n_1 veces, la unidad de dicha magnitud aumentará n_1^α veces (del modo correspondiente, el número que expresa el valor de la magnitud en estas unidades, disminuirá n_1^α veces); al aumentar la unidad de masa n_2 veces, la unidad de dicha magnitud aumentará n_2^β veces y, por fin, al au-

mentar la unidad de tiempo n_3 veces, la unidad de dicha magnitud aumentará n_3^2 veces.

Como las leyes físicas no pueden depender de la elección de las unidades de las magnitudes que en ellas figuran, las dimensiones de los dos miembros de las ecuaciones, que expresan esas leyes, deben ser iguales. Esta condición puede ser, primero, utilizada para comprobar que las correlaciones físicas obtenidas son correctas y, segundo, para establecer las dimensiones de las magnitudes físicas. Por ejemplo, la velocidad se determina como $v = \Delta s/\Delta t$. La dimensión de Δs es L, la de Δt, es igual a T. La dimensión del segundo miembro de la correlación escrita es igual a $[\Delta s]/[\Delta t] = L/T = LT^{-1}$. La dimensión del primer miembro debe ser esta misma. Por lo tanto,

$$[v] = LT^{-1}. \qquad (10.2)$$

La correlación escrita denomínase fórmula de la dimensión, mientras que su segundo miembro, dimensión de la correspondiente magnitud (en nuestro caso, de la velocidad).

Basándonos en la correlación $w = \Delta v/\Delta t$ podemos hallar la dimensión de la aceleración:

$$[w] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

La dimensión de la fuerza

$$[F] = [m]\,[w] = MLT^{-2}.$$

De modo análogo se establecen las dimensiones de las demás magnitudes.

§ 11. Tercera ley de Newton

Toda acción entre cuerpos tiene carácter de interacción: si el cuerpo *1* actúa sobre el cuerpo *2* con una fuerza $\mathbf{F}_{21}$, a su vez, el cuerpo *2* actúa sobre el cuerpo *1* con una fuerza $\mathbf{F}_{12}$.

La tercera ley de Newton afirma que *las fuerzas con las que actúan, uno sobre otro, los cuerpos en interacción son iguales en magnitud y de sentido opuesto*. Empleando las designaciones de las fuerzas dadas más arriba, el contenido de la tercera ley puede ser representado en forma de una igualdad:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \qquad (11.1)$$

De la tercera ley de Newton se deduce que las fuerzas surgen a pares: con cada fuerza aplicada a cierto cuerpo puede ser comparada una fuerza de igual magnitud y de dirección contraria, aplicada a otro cuerpo que interactúa con el dado.

La tercera ley de Newton no es siempre justa. Se cumple con rigurosidad en caso de interacciones de contacto (es decir, aquellas que

se observan con el contacto directo de los cuerpos), así como con interacciones de *cuerpos en reposo* que se encuentran a cierta distancia entre sí.

Como ejemplo de violación de la tercera ley de Newton podemos aducir el sistema de dos partículas cargadas e_1 y e_2 que, en el momento que consideramos, se mueven como se muestra en la fig. **11.1**. En electrodinámica se demuestra que además de la fuerza de interacción electrostática $\mathbf{F}_{12}$, subordinada a la tercera ley, sobre la primera partícula actuará la fuerza magnética $\mathbf{F}_1$. En lo que se refiere a la segunda partícula, sobre ella actúa sólo la fuerza $\mathbf{F}_{21}$, igual a $-\mathbf{F}_{12}$. En el caso ofrecido en la figura, la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre la segunda partícula es igual a cero. Señalemos, que a velocidades de las partículas mucho menores que la de la luz en el vacío (para $v_1 \ll c$ y $v_2 \ll c$), la fuerza $\mathbf{F}_1$, es despreciablemente pequeña en comparación con la fuerza $\mathbf{F}_{12}$, de forma que, prácticamente, en este caso la tercera ley de Newton también es válida.

Fig. 11.1

Examinemos ahora un sistema de dos partículas eléctricamente neutras m_1 y m_2, alejadas entre sí a la distancia r. A causa de la gravitación estas partículas se atraen una por otra con una fuerza

$$F=\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (11.2)$$

En el caso presente la interacción de las partículas se efectúa por medio del campo de gravitación. Digamos, que la primera partícula crea en el espacio que la rodea un campo que se manifiesta por el hecho de que sobre la partícula m_2, ubicada en cierto punto de este campo, actúa la fuerza de atracción de la primera partícula. Del mismo modo, la segunda partícula crea su campo, que se revela en su influjo sobre la primera partícula. La experiencia muestra, que las variaciones del campo, provocadas, por ejemplo, por el cambio de la posición de la partícula que crea el campo, se propagan en el espacio no instantáneamente, sino que a una velocidad, que aunque es muy grande, es finita e igual a la velocidad de la luz en el vacío c.

Supongamos que al principio las partículas m_1 y m_2 están en reposo en las posiciones *1* y *2* (fig. 11.2). Las fuerzas de interacción $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ son iguales en magnitud y de direcciones opuestas. Sea ahora que la partícula m_1 con gran rapidez (a una velocidad casi igual a c) se traslada a la posición *1'*. En este punto, sobre la partícula m_1 actuará una fuerza $\mathbf{F}'_{12}$ de menor magnitud ($r' > r$) y dirigida en sentido diferente a $\mathbf{F}_{12}$ (recordemos que el campo de la partícula m_2 es invariable). Hasta que la perturbación del campo provo-

cada por el desplazamiento de m_1 llegue al punto 2, sobre la segunda partícula continuará actuando la fuerza $\mathbf{F}_{21}$. Por consiguiente, mientras que la partícula m_1 estaba en movimiento y durante cierto tiempo después de que se detuvo en el punto $1'$, la tercera ley de Newton fue violada.

Si la partícula m_1 se desplazara del punto 1 al punto $1'$ a una velocidad v mucho menor que c ($v \ll c$) o bien la velocidad de pro-

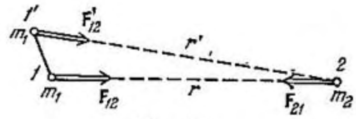


Fig. 11.2

pagación de las perturbaciones del campo era infinitamente grande, los valores instantáneos del campo en el punto 2 corresponderían a las posiciones de la partícula m_1 en ese mismo momento de tiempo y, por lo tanto, no se observarían violaciones de la tercera ley.

La mecánica newtoniana, en general, es justa sólo para las velocidades de movimiento mucho menores que la de la luz (para $v \ll c$). Por esta razón, en los márgenes de dicha mecánica la velocidad de propagación de las perturbaciones del campo se considera infinita, por lo que la tercera ley de Newton siempre se cumple.

§ 12. Principio de relatividad de Galileo

Examinemos dos sistemas de referencia en movimiento a velocidad constante $\mathbf{v}_0$ uno respecto del otro. De modo convencional, vamos a considerar que uno de estos sistemas, designado en la fig. 12.1 por la letra K, está inmóvil. Entonces, el segundo sistema K' estará en movimiento rectilíneo uniforme. Elijamos los ejes de coordenadas x, y, z del sistema K y los ejes x', y', z' del sistema K' de forma que los ejes x y x' coincidan, mientras que los ejes y e y', así como los ejes z y z', sean paralelos entre sí.

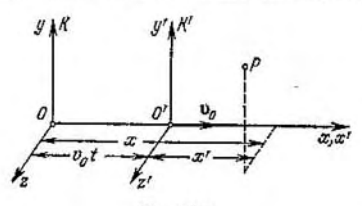


Fig. 12.1

Hallamos la relación entre las coordenadas x, y, z de cierto punto P en el sistema K y las coordenadas x', y', z' de este mismo punto en el sistema K'. Si comenzamos la cuenta del tiempo desde el momento cuando los orígenes de coordenadas de los dos sistemas coincidían, como se desprende de la fig. 12.1, $x = x' + v_0t$. Además, es evi-

dente que $y = y'$ y $z = z'$. Si a estas correlaciones añadimos la suposición aceptada en la mecánica clásica de que el tiempo en los dos sistemas transcurre de igual forma, es decir, que $t = t'$, obtendremos el conjunto de cuatro ecuaciones:

$$x = x' + v_0 t', \; y = y', \; z = z', \; t = t', \qquad (12.1)$$

que reciben el nombre de *transformaciones de Galileo.*

Las correlaciones (12.1) primera y cuarta resultan ser justas sólo para valores de v_0 pequeños en comparación con la velocidad de la luz en el vacío c ($v_0 \ll c$). Para v_0 comparables con c las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz que son más generales (véase el § 63). En los márgenes de la mecánica newtoniana las fórmulas (12.1) se supone que son precisas.

Después de diferenciar las correlaciones (12.1) respecto del tiempo, hallamos la ligazón entre las velocidades del punto P con relación a los sistemas de referencia K y K':

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' + v_0 \quad \text{o bien} \quad v_x = v'_x + v_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}' \qquad\quad \text{o bien} \quad v_y = v'_y, \\ \dot{z} &= \dot{z}' \qquad\quad \text{o bien} \quad v_z = v'_z. \end{aligned} \qquad (12.2)$$

Las tres correlaciones escalares (12.2) son equivalentes a la siguiente correlación entre el vector de velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema K y el vector de velocidad $\mathbf{v}'$ en relación con el sistema K':

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \qquad (12.3)$$

Para cerciorarse de esto, es suficiente proyectar la igualdad vectorial (12.3) en los ejes x, y, z. El resultado serán las fórmulas (12.2).

Las fórmulas (12.2) y (12.3) nos proporcionan la regla de composición de las velocidades en mecánica clásica. Hay que tener en cuenta que la correlación (12.3), como cualquier otra correlación vectorial, queda válida con la elección arbitraria de los sentidos mutuos de los ejes de coordenadas de los sistemas K y K'. En lo que atañe a las correlaciones (12.2), éstas se cumplen sólo con la disposición de los ejes mostrada en la fig. 12.1.

En el § 7 fue señalado que cualquier sistema de referencia que se mueve con relación a cierto sistema inercial a velocidad constante, será también inercial. Ahora ya podemos demostrar esta afirmación. Con este fin derivamos la correlación (12.3). Teniendo en cuenta que $\mathbf{v}_0$ es constante recibimos:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \quad \text{o bien} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \qquad (12.4)$$

De aquí se desprende que la aceleración de cierto cuerpo en todos los sistemas de referencia, uno respecto de otro en movimiento rectilíneo uniforme, queda constante. Por esta causa, si uno de estos siste-

mas es inercial (lo que quiere decir que al no haber fuerzas $\mathbf{w} = 0$), los restantes también serán inerciales ($\mathbf{w}'$ es asimismo igual a cero).

La ecuación fundamental de mecánica (9.2) es característica por el hecho de que de las magnitudes cinemáticas, sólo contiene la aceleración, mientras que la velocidad en ella no entra. Sin embargo, como hemos establecido más arriba, la aceleración de cierto cuerpo en dos sistemas inerciales de referencia K y K', tomados al azar, es la misma. De acuerdo con la segunda ley de Newton, de aquí se desprende que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en los sistemas K y K' también serán iguales. Por lo tanto, *las ecuaciones de dinámica no varían al pasar de un sistema inercial de referencia a otro*, es decir, como suele decirse, son invariantes con relación a la transformación de las coordenadas que corresponde a la transición de un sistema inercial de referencia a otro. Desde el punto de vista de mecánica, todos los sistemas inerciales de referencia son en absoluto equivalentes: a ninguno de ellos se le puede dar preferencia. Prácticamente, esto se manifiesta en que mediante cualesquiera experimentos mecánicos, realizados en los límites del sistema de referencia, es imposible establecer si éste se halla en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Por ejemplo, si nos encontramos en el vagón de un tren en movimiento rectilíneo uniforme, que se desplaza sin tirones, si no miramos por la ventana es imposible determinar si el vagón se mueve o está en reposo. La caída libre de los cuerpos, el movimiento de los cuerpos que hemos lanzado y otros procesos mecánicos transcurrirán en este caso del mismo modo que al estar el vagón inmóvil.

Semejantes circunstancias fueron ya aclaradas por Galileo. Recibe el nombre de *principio de relatividad de Galileo* la regularidad de que todos los fenómenos mecánicos transcurren del mismo modo en diversos sistemas inerciales de referencia, a causa de lo cual es imposible establecer con ayuda de cualquier experimento mecánico si el sistema de referencia dado está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

§ 13. Fuerzas

En física moderna se distinguen cuatro tipos de interacciones: 1) gravitacional (o interacción provocada por la gravitación); 2) electromagnética (realizada mediante los campos eléctricos y magnéticos); 3) fuerte o nuclear (que asegura el enlace de las partículas en el núcleo) y 4) débil (que provoca muchos de los procesos de desintegración de las partículas elementales).

En los márgenes de la mecánica clásica se tratan las fuerzas gravitatorias y electromagnéticas, así como las fuerzas elásticas y las de rozamiento. Estas dos últimas se determinan por el carácter de la interacción entre las moléculas de la sustancia, que, como sabemos, es de origen electromagnético. Por consiguiente, las fuerzas

elásticas y las de rozamiento por su naturaleza, son electromagnéticas.

Las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas son básicas y no pueden ser reducidas a otras fuerzas más sencillas. Las fuerzas elásticas y de rozamiento no son básicas.

Las leyes de las fuerzas básicas son sencillas en extremo. El valor de la fuerza gravitacional se determina por la fórmula (11.2). La magnitud de la fuerza con la que interactúan dos cargas puntuales q_1 y q_2 se determina con ayuda de la ley de Coulomb:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{13.1}$$

(k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la elección de las unidades de las magnitudes que entran en la fórmula).

Si las cargas están en movimiento, sobre ellas, además de la fuerza (13.1), actúan también las fuerzas magnéticas. La fuerza magnética que actúa sobre una carga puntual q que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}$ por un campo magnético de inducción $\mathbf{B}$, defínese por la fórmula:

$$\mathbf{F} = k'q\,[\mathbf{vB}] \tag{13.2}$$

(k' es un coeficiente de proporcionalidad).

Las fórmulas (11.2), (13.1), (13.2) son precisas. Para las fuerzas elásticas y de rozamiento podemos obtener sólo fórmulas empíricas aproximadas, que vamos a estudiar en los siguientes parágrafos.

§ 14. Fuerzas elásticas

Todo cuerpo real, bajo la acción de las fuerzas aplicadas sobre él se deforma, es decir, varían sus dimensiones y forma. La deformación recibe el nombre de *elástica*, si después de cesar la acción de fuerza el cuerpo vuelve a tomar las dimensiones y la forma iniciales.

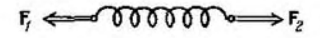


Fig. 14.1

Las deformaciones elásticas se observan cuando la fuerza que condiciona la deformación no supera cierto límite (límite de elasticidad) determinado para cada cuerpo concreto.

Tomemos un muelle que en estado no deformado tiene una longitud l_0 y apliquemos a sus extremos las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de igual magnitud y dirigidas en sentidos opuestos (fig. 14.1). Bajo la acción de estas fuerzas el muelle estira a cierta magnitud Δl, después de lo cual se equilibra. En estado de equilibrio las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ serán

equilibradas por las fuerzas elásticas, que en el muelle surgen a causa de la deformación. Como muestra la experiencia, con pequeñas deformaciones el alargamiento del muelle Δl resulta ser proporcional a la fuerza de tracción: $\Delta l \sim F$ ($F = F_1 = F_2$). De manera correspondiente, la fuerza elástica es proporcional al alargamiento del muelle:

$$F = k\Delta l. \tag{14.1}$$

El coeficiente de proporcionalidad k recibe el nombre de *coeficiente de rigidez* del muelle.

La afirmación acerca de la proporcionalidad entre la fuerza elástica y la deformación denomínase *ley de Hooke*.

Las tensiones elásticas aparecen por todo el muelle. Cualquier parte de éste actúa sobre otra parte con una fuerza que se determina con la fórmula (14.1). Por esta razón, si el muelle se corta por la mitad, una fuerza elástica de igual magnitud surgirá en cada una de las mitades, con un alargamiento dos veces menor. De aquí llegamos a la conclusión de que para el material del muelle y las dimensiones de la espira prefijados, la magnitud de la fuerza elástica se determina no por el alargamiento absoluto Δl del muelle, sino que por el alargamiento relativo $\Delta l/l_0$.

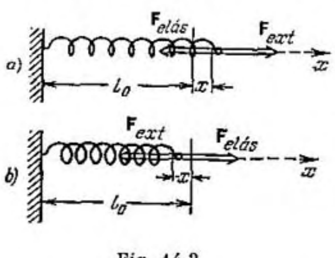


Fig. 14.2

Al comprimir el muelle también surgen tensiones elásticas, pero de otro signo. Generalicemos la fórmula (14.1) de la siguiente forma. Fijemos uno de los extremos del muelle (fig. 14.2), mientras que el alargamiento del muelle lo vamos a examinar como la coordenada x del extremo opuesto, que se cuenta desde la posición de ésta que corresponde al muelle no deformado[1]). Además, designemos la proyección de la fuerza elástica $\mathbf{F}_{\text{elás}}$ en el eje x por F_x. Entonces, podemos escribir, que

$$F_x = -kx \tag{14.2}$$

(en la fig. 14.2 vemos que la proyección de la fuerza elástica en el eje x y la coordenada x siempre tienen signos opuestos).

Las barras homogéneas se comportan como un muelle durante la tracción o la compresión unilateral. Si a los extremos de una barra aplicamos las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$) dirigidas a lo largo

[1]) En la fig. 14.2, *b* la longitud del segmento a la que se desplaza el extremo del muelle, está designada por x; esto se debe a que la longitud del segmento es una magnitud positiva, mientras que la coordenada x es aquí negativa.

de su eje y cuya acción está distribuida uniformemente por toda su sección, la longitud de la barra l_0 recibe un incremento[1]) Δl (fig. 14.3) positivo (con la tracción) o negativo (con la compresión). Es natural tomar como magnitud que caracteriza la deformación de la barra, la variación relativa de su longitud:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{14.3}$$

La práctica indica que para las barras del material dado, el alargamiento relativo durante la deformación es proporcional a la fuerza que corresponde a la unidad del área de la sección transversal de la barra:

$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S} \tag{14.4}$$

(α es un coeficiente de proporcionalidad).

Recibe el nombre de *tensión* una magnitud igual a la razón entre la fuerza y la magnitud de la superficie sobre la que ésta actúa. Gra-

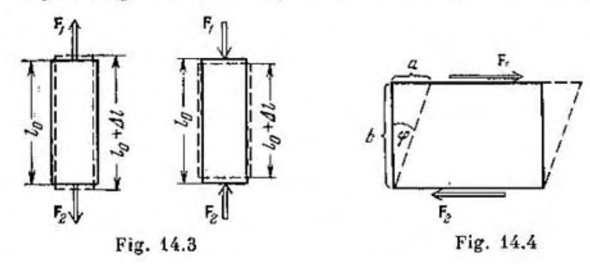


Fig. 14.3 Fig. 14.4

cias a la interacción de las partes del cuerpo entre sí, la tensión se transmite a todos sus puntos, es decir, todo el volumen de la barra resulta estar en estado de tensión. Si la fuerza está dirigida por la normal a la superficie, la tensión se llama *normal*. Cuando la fuerza va por la tangente a la superficie sobre la que actúa, la tensión recibe el nombre de *tangencial*. La tensión normal se ha adoptado designar por la letra σ, la tangencial por la letra τ.

La razón F/S en la fórmula (14.4) es la tensión normal σ. Por lo tanto, dicha fórmula puede tener el aspecto:

$$\varepsilon = \alpha\sigma. \tag{14.5}$$

Para caracterizar las propiedades elásticas del material se hace uso de la magnitud $E = 1/\alpha$ que se denomina *módulo de Young*. Esta magnitud se mide en pascales (1 Pa = 1 N/1 m²).

[1]) La variación de la longitud de la barra se acompaña del correspondiente cambio de las dimensiones transversales de la barra.

Sustituyendo en (14.5) α por E recibimos:

$$\varepsilon = \sigma/E, \tag{14.6}$$

de donde se desprende que el módulo de Young es igual a semejante tensión normal, con la que el alargamiento relativo fuese igual a la unidad (es decir, como si el incremento de la longitud Δl fuera igual a la longitud inicial l_0) claro está, si pudieran ser tan grandes las deformaciones elásticas (en realidad, con tensiones mucho menores se produce la destrucción de la barra, mucho antes se alcanza el límite de elasticidad).

Al resolver la ecuación (14.4) respecto de F y sustituyendo ε por $\Delta l/l_0$ y α, por $1/E$, obtenemos la fórmula

$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l = k\Delta l, \tag{14.7}$$

donde k es un coeficiente constante para la barra dada. La correlación (14.7) expresa la ley de Hooke para una barra (comp. con (14.2)). Recordemos que esta ley sólo se cumple hasta alcanzar el límite de elasticidad.

Como conclusión, examinemos con brevedad la deformación de cizallamiento (cortadura o deslizamiento). Tomemos un cuerpo homogéneo en forma de un paralelepípedo rectangular y apliquemos a sus caras opuestas las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), dirigidas paralelamente a las caras (fig. 14.4). Si la acción de las fuerzas está distribuida uniformemente por toda la superficie de la respectiva cara, en cualquier sección, paralela a dichas caras, surgirá una tensión tangencial

$$\tau = F/S \tag{14.8}$$

(S es el área de la cara). Bajo la acción de las tensiones el cuerpo se deforma de manera que las caras se desplazan entre sí a cierta distancia a. Si mentalmente dividimos el cuerpo en capas elementales, paralelas a las caras que examinamos, cada una de las capas resultará desplazada respecto de las capas vecinas. Por esta causa, semejante deformación ha recibido el nombre de cizallamiento.

Durante la deformación por cizallamiento, toda recta que al principio era perpendicular a las capas, girará a cierto ángulo φ. En calidad de característica de dicha deformación se toma la magnitud

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{14.9}$$

llamado *deslizamiento relativo* (el sentido de las magnitudes a y b queda claro en la fig. 14.4). Con deformaciones elásticas el ángulo φ es muy pequeño, por lo que podemos hacer $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$. Por consiguiente, el deslizamiento relativo γ resulta ser igual al ángulo de cizallamiento φ.

La experiencia muestra que el deslizamiento relativo es proporcional a la tensión tangencial:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau. \qquad (14.10)$$

El coeficiente G sólo depende de las propiedades del material y recibe el nombre de *módulo de cizallamiento.* Es igual a un esfuerzo tangencial con el que el ángulo de cizallamiento fuera igual a 45° ($\operatorname{tg}\varphi = 1$), si con tan grandes deformaciones no fuese superado el límite de elasticidad. Como G, E también se mide en pascales (Pa).

§ 15. Fuerzas de rozamiento

Durante el desplazamiento de los cuerpos en contacto o de sus partes unas respecto de otras, surgen las fuerzas de rozamiento. El rozamiento que aparece durante el desplazamiento relativo de dos cuerpos en contacto, recibe el nombre de rozamiento *externo*; el rozamiento entre las partes de un mismo cuerpo enterizo (por ejemplo, líquido o gas), denomínase rozamiento *interno*.

La fuerza de rozamiento (o de fricción), que surge al moverse un sólido por un medio líquido o gaseoso, debe ser considerada como rozamiento interior, ya que en tal caso las capas del medio, que hacen contacto directo con el cuerpo, son obligadas por éste a moverse a la misma velocidad que el cuerpo mientras que sobre su movimiento influye el rozamiento entre estas capas del medio y las que respecto a ellas pueden considerarse exteriores.

El rozamiento entre las superficies de dos sólidos recibe el nombre de seco, cuando entre dichas superficies no hay ninguna intercalación, por ejemplo, una capa de engrase. El rozamiento entre un sólido y un medio líquido o gaseoso, así como entre las capas de semejante medio, es llamado *viscoso* (o líquido).

El rozamiento seco puede ser *de deslizamiento* o *de rodadura.*

Las fuerzas de rozamiento están dirigidas por la tangente a las superficies (o capas) en rozamiento, con la particularidad de que se oponen al desplazamiento relativo de dichas superficies (capas). Por ejemplo, si dos capas de un líquido deslizan una respecto de otra, moviéndose a diferentes velocidades, la fuerza aplicada a la capa que se mueve con mayor rapidez estará dirigida en sentido opuesto al movimiento, mientras que la fuerza aplicada a la capa más lenta, estará dirigida en sentido del movimiento de la capa.

Rozamiento seco. Durante este tipo de rozamiento, la fuerza de rozamiento surge no sólo al deslizarse una superficie por otra, sino también si intentamos provocar semejante deslizamiento. En este último caso, ella recibe el nombre de *fuerza de rozamiento en reposo*. Examinemos dos cuerpos en contacto *1* y *2*, el segundo de los cuales está inmóvil (fig. 15.1). El cuerpo *1* se aprieta contra el cuer-

po *2* con una fuerza $\mathbf{F}_n$, dirigida por la normal a la superficie de contacto de los cuerpos y que se llama *fuerza de presión normal*. Ésta puede ser condicionada por el peso del cuerpo o por otras causas. Intentemos desplazar el cuerpo *1* aplicando sobre él la fuerza externa $\mathbf{F}$. En tal caso, descubriremos que para cada par concreto de cuerpos y para cada valor de la fuerza de presión normal, existe un valor mínimo F_0 de la fuerza $\mathbf{F}$, con la que el cuerpo *1* podrá ser puesto en movimiento. Para valores de la fuerza externa situados en los márgenes $0 < F < F_0$ el cuerpo queda en reposo. Según la segunda ley de Newton, esto es posible si la fuerza $\mathbf{F}$ se equilibra por una fuerza igual a ella en magnitud y de dirección opuesta, que, precisamente, es la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_{roz}$ (véase la fig. 15.1). De forma automática[1]), ésta toma un valor igual a la magnitud de la fuerza externa F (a condición de que ésta no supere F_0). La magnitud de F_0 es el valor máximo de la fuerza de rozamiento en reposo.

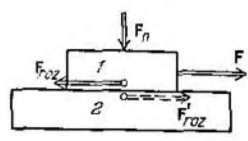


Fig. 15.1

Señalemos que en concordancia con la tercera ley de Newton, sobre el cuerpo *2* actúa también la fuerza de rozamiento en reposo $\mathbf{F}'_{roz}$ (en la fig. 15.1 se muestra con una flecha a trazos) igual en magnitud a $\mathbf{F}_{roz}$, pero de dirección opuesta.

Si la fuerza externa $\mathbf{F}$ supera en módulo a F_0, el cuerpo comienza a deslizarse, con la particularidad de que su aceleración se determina por la resultante de dos fuerzas: la fuerza externa $\mathbf{F}$ y la de rozamiento $\mathbf{F}_{roz}$, cuya magnitud, en mayor o menor grado, depende de la velocidad de deslizamiento. El carácter de esta dependencia es determinado por la naturaleza y el estado de las superficies en rozamiento. En la fig. 15.2 se muestra el tipo de dependencia entre la fuerza de rozamiento y la velocidad, con la que se tropieza con mayor frecuencia. La gráfica abarca tanto el caso de reposo, como el de deslizamiento. Como ya hemos indicado, la fuerza de rozamiento puede tener valores desde cero hasta F_0, lo que en la gráfica se muestra con un segmento vertical. De acuerdo con la gráfica en la fig. 15.2, al aumentar la velocidad, al principio la fuerza de rozamiento disminuye un poco y después, comienza a crecer.

Maquinando de modo especial las superficies en contacto, la fuerza de rozamiento de deslizamiento puede, prácticamente, no depender de la velocidad. En tal caso, el sector curvilíneo de la gráfica en la fig. 15.2 se convierte en el segmento de una recta horizontal que comienza en el punto F_0.

---

[1]) Esto transcurre de forma semejante a cómo un muelle, bajo la acción de la fuerza de tracción, adquiere automáticamente tal alargamiento con el que la fuerza elástica se equilibra con la fuerza externa.

Las leyes del rozamiento seco se reducen a lo siguiente: la fuerza máxima de rozamiento en reposo, así como la fuerza de rozamiento de deslizamiento, no dependen del área de la superficie en rozamiento y resultan ser, aproximadamente, proporcionales al valor de la fuerza de presión normal, que aprieta las superficies entre sí:

$$F_{roz} = kF_n. \qquad (15.1)$$

El coeficiente adimensional de proporcionalidad k, recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento* (correspondientemente en reposo o de deslizamiento), que depende de la naturaleza y el estado de las superficies en rozamiento, en particular de su rugosidad. Para el deslizamiento, el coeficiente de rozamiento es función de la velocidad.

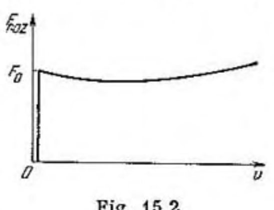


Fig. 15.2

Las fuerzas de rozamiento desempeñan un importante papel en la naturaleza. En nuestra vida cotidiana, el rozamiento es con frecuencia útil. Recordemos con qué enormes dificultades tropiezan los transeúntes y el transporte al estar el pavimento helado, es decir, cuando el rozamiento entre éste y las suelas de los peatones y las ruedas del transporte disminuye de forma considerable. Si no hubiera fuerzas de rozamiento, los muebles tendrían que ser fijados en el suelo, como en los barcos durante el cuneo, ya que con la menor falta de horizontalidad del suelo se deslizarían en la dirección de la inclinación. El propio lector puede ofrecer ejemplos análogos.

En muchos casos, el papel del rozamiento es en extremo negativo y se necesita tomar medidas para reducirlo en la medida de lo posible. Éste es el problema del rozamiento en los rodamientos o entre el casquillo de la rueda y el eje.

El procedimiento más radical para disminuir las fuerzas de rozamiento es la sustitución del rozamiento de deslizamiento por el de rodadura, que surge, por ejemplo, entre un cuerpo cilíndrico o esférico y la superficie por la que rueda. El rozamiento de rodadura, desde el punto de vista formal, se supedita a las mismas leyes que el de deslizamiento, pero aquí el coeficiente de rodadura resulta ser mucho menor.

Rozamiento viscoso y resistencia del medio. Para el rozamiento viscoso (o de viscosidad), a diferencia del seco, es característico que la fuerza de rozamiento viscoso se reduce a cero junto con la velocidad. Por esta causa, por muy pequeña que sea la fuerza externa, ésta puede comunicar velocidad relativa a las capas de un medio viscoso. Las leyes a las que se subordinan las fuerzas de rozamiento entre las capas del medio, serán examinadas en el capítulo dedicado a la mecánica de los líquidos.

En este párrafo nos vamos a limitar al examen de las fuerzas de rozamiento entre un sólido y un medio viscoso (líquido o gaseoso). Hay que tener en cuenta que además de las propias fuerzas de rozamiento, cuando por un medio líquido o gaseoso se mueven sólidos, surgen las llamadas *fuerzas de resistencia del medio*, que son mucho mayores que las de rozamiento. Como no tenemos la posibilidad de analizar con detalle la causa de surgimiento de estas fuerzas, vamos a limitarnos a exponer las regularidades a las que se supeditan conjuntamente las fuerzas de rozamiento y las de resistencia del medio, llamando de modo convencional la fuerza sumaria, fuerza de rozamiento. La dependencia de esta fuerza de la velocidad se muestra en la fig. 15.3.

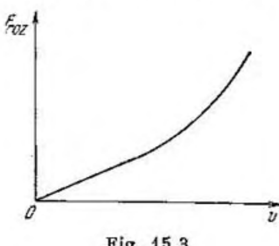


Fig. 15.3

A pequeñas velocidades, la fuerza crece linealmente con la velocidad:

$$\mathbf{F}_{roz} = -k_1\mathbf{v} \tag{15.2}$$

(el signo menos significa que esta fuerza está dirigida en sentido opuesto a la velocidad). El valor del coeficiente k_1 depende de la forma y las dimensiones del cuerpo, el estado de su superficie y de la propiedad del medio llamada viscosidad. Por ejemplo, para la glicerina este coeficiente es mucho mayor que para el agua.

A grandes velocidades, la ley lineal se convierte en cuadrática, es decir, la fuerza comienza a crecer de forma proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$\mathbf{F}_{roz} = -k_2v^2\mathbf{e}_v \tag{15.3}$$

($\mathbf{e}_v$ es el versor de la velocidad). El valor del coeficiente k_2 depende de las dimensiones y la forma del cuerpo.

El valor de la velocidad con el que la ley (15.2) se convierte en la (15.3) depende de la forma y las dimensiones del cuerpo, así como de las propiedades de viscosidad y la densidad del medio.

§ 16. Fuerza de gravedad y peso

A causa del efecto de la fuerza de atracción de la Tierra, todos los cuerpos caen con la misma aceleración con relación a la superficie terrestre. Dicha aceleración se designa con la letra $\mathbf{g}$. Esto quiere decir, que en un sistema de referencia ligado con nuestro planeta, sobre todo cuerpo de masa m actúa una fuerza

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \tag{16.1}$$

llamada *fuerza de gravedad*[1]). Cuando respecto de la Tierra el cuerpo está en reposo, la fuerza **P** se equilibra por la reacción[2]) $\mathbf{F}_r$ de la suspensión o del apoyo que impide que el cuerpo caiga ($\mathbf{F}_r = -\mathbf{P}$). Según la tercera ley de Newton, en este caso, el cuerpo actúa sobre la suspensión o el apoyo con la fuerza **G**, igual a $-\mathbf{F}_r$, o sea, con la fuerza

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

La fuerza **G**, con la que el cuerpo actúa sobre la suspensión o el apoyo, recibe el nombre de *peso del cuerpo*. Esta fuerza es igual a $m\mathbf{g}$ sólo cuando el cuerpo o el apoyo (o la suspensión) están inmóviles

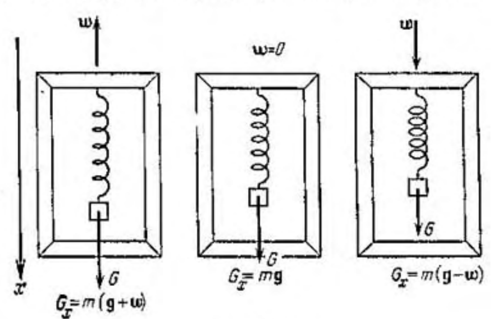


Fig. 16.1

con relación a la Tierra. Si ellas están en movimiento con cierta aceleración **w**, el peso **G** no será igual a $m\mathbf{g}$. El siguiente ejemplo nos aclara este fenómeno. Sea que la suspensión en forma de un muelle fijado en una armazón está en movimiento junto con el cuerpo con una aceleración **w** (fig. 16.1). Aquí la ecuación de movimiento del cuerpo tendrá el aspecto

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{w}, \tag{16.2}$$

donde $\mathbf{F}_r$ es la reacción de la suspensión, es decir, la fuerza con la que el muelle actúa sobre el cuerpo. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el cuerpo actúa sobre el muelle con una fuerza igual a $-\mathbf{F}_r$, que por definición es el peso del cuerpo **G** en semejantes condiciones. Sustituyendo en (16.2) la reacción $\mathbf{F}_r$ por la fuerza $-\mathbf{G}$ y la fuerza de gravedad **P**, por el producto $m\mathbf{g}$, obtenemos:

$$\mathbf{G} = m\,(\mathbf{g} - \mathbf{w}). \tag{16.3}$$

[1]) Por ser no inercial el sistema de referencia ligado con la Tierra, la fuerza de gravedad se diferencia un poco de la fuerza con la que el cuerpo se atrae por la Tierra. En el § 33 esta cuestión se examinará con más detalle.

[2]) Llámanse reacciones las fuerzas con las que el cuerpo dado actúa sobre los cuerpos que limitan su movimiento.

La fórmula (16.3) define el peso del cuerpo en el caso general. Es válida para la suspensión o el apoyo de cualquier tipo.

Supongamos que el cuerpo y la suspensión se mueven en dirección vertical (la fig. 16.1 se ha confeccionado partiendo de esta suposición).

Proyectemos (16.3) sobre la dirección de la suspensión:

$$G = m\ (g \pm w). \tag{16.4}$$

En esta expresión G, g y w son los módulos de los correspondientes vectores. El signo «+» corresponde a **w** dirigida hacia arriba y «—», a la dirección hacia abajo.

De la fórmula (16.4) se desprende que por su módulo, el peso **G** puede ser mayor o menor que la fuerza de gravedad **P**. Durante la caída libre de la armazón con la suspensión **w** = **g** y la fuerza **G**, con la que el cuerpo actúa sobre la suspensión, es igual a cero. Comienza el estado de ingravidez. Una nave cósmica que vuela alrededor de la Tierra con los motores desconectados, se mueve como una armazón que cae libremente con aceleración **g**, por lo que los cuerpos dentro de la nave se hallan en estado de ingravidez, no ejercen presión sobre los cuerpos que hacen contacto con ellos.

Hay que señalar, que con frecuencia se confunde la fuerza de gravedad **P** con el peso del cuerpo **G**. Esto está condicionado por el hecho de que al tratarse de un apoyo inmóvil, las fuerzas **P** y **G** coinciden en magnitud y dirección (las dos son iguales a m**g**). Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas fuerzas están aplicadas a distintos cuerpos: **P**, al propio cuerpo, **G** actúa sobre la suspensión o el apoyo que limita el movimiento libre del cuerpo en el campo de fuerzas de la atracción terrestre. Además, la fuerza **P** siempre es igual a m**g**, sin depender esto de si el cuerpo está en movimiento o en reposo, en tanto que el peso **G** es función de la aceleración con la que se mueve el apoyo y el cuerpo, con la singularidad de que puede ser mayor o menor que m**g**, en particular, con el estado de ingravidez, se reduce a cero.

La correlación (16.3) entre la masa y el peso del cuerpo nos proporciona el método de comparación de las masas de los cuerpos mediante su pesaje, es decir, la razón de los pesos de los cuerpos determinados a iguales condiciones (por regla **w** = 0) en un mismo punto de la superficie terrestre, es igual a la razón de las masas de dichos cuerpos:

$$G_1 : G_2 : G_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots$$

Como mostraremos en el § 33, la aceleración de la caída libre g y la fuerza de gravedad P dependen de la latitud del lugar. Además, P y g también dependen de la altura sobre el nivel del mar: al alejarse del centro de la Tierra, estas magnitudes disminuyen.

§ 17. Aplicación práctica de las leyes de Newton

Para confeccionar la ecuación de movimiento es preciso, ante todo, establecer qué fuerzas actúan sobre el cuerpo. Con ello, hay que aclarar el efecto de qué cuerpos sobre el cuerpo dado hay que tomar en consideración. Por ejemplo, para un cuerpo que se desliza por un plano inclinado (fig. 17.1) es sustancial el efecto por parte de la Tierra (caracterizado por la fuerza $m\mathbf{g}$) y el influjo que ejerce el plano (caracterizado por la reacción $\mathbf{F}_r$).

De ninguna manera hay que tener en cuenta las fuerzas «motrices», de «rodadura», «centrípetas», «centrífugas»[1] y otras semejantes. Para no sufrir errores, hay que caracterizar las fuerzas no por el efecto que ellas producen, sino por la «fuente» que provoca su aparición. Esto quiere decir, que a espaldas de cada fuerza hay que discernir el cuerpo que condiciona dicha fuerza. En semejante caso será imposible caer en el error típico que consiste en que una misma fuerza se toma en consideración dos veces, pero con diferentes denominaciones.

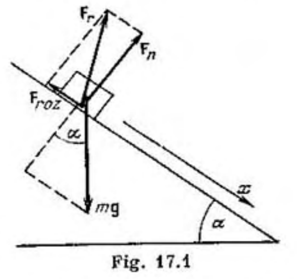


Fig. 17.1

En el ejemplo que hemos examinado (véase la fig. 17.1) es ventajoso descomponer la fuerza de reacción $\mathbf{F}_r$ en dos componentes, es decir, en la fuerza de la presión normal $\mathbf{F}_n$ y en la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_{roz}$. En particular, esto es útil ya que la fuerza de rozamiento es proporcional al módulo de la fuerza $\mathbf{F}_n$ (véase (15.1)).

Determinadas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, se confecciona la ecuación de la segunda ley de Newton. En nuestro ejemplo, tendrá el aspecto:

$$m\mathbf{w} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{roz}. \qquad (17.1)$$

Para realizar los cálculos hay que pasar de los vectores a sus proyecciones sobre las direcciones elegidas correspondientemente. En tal caso, se hace uso de las siguientes propiedades de las proyecciones:

1) las proyecciones de iguales vectores son también iguales;

2) la proyección de un vector obtenido por la multiplicación de otro vector por un escalar, es igual al producto de la proyección del segundo vector por el escalar;

3) la proyección de una suma de vectores es igual a la suma de las proyecciones de los vectores que se suman (véase (2.8)).

Proyectemos los vectores que entran en la ecuación (17.1) sobre

[1]) Esto no se refiere al término «fuerza centrífuga de inercia» (véase el § 33).

la dirección x, indicada en la fig. 17.1. Las proyecciones de los vectores son iguales: $w_x = w$ (w es el módulo del vector **w**), $g_x = g$ sen α, $F_{nx} = 0$, $F_{roz\,x} = -kF_n = -kmg \cos \alpha$. Así, llegamos a la ecuación

$$mw = mg \operatorname{sen} \alpha - kmg \cos \alpha,$$

de la cual es fácil hallar w.

En casos más complicados hay que proyectar los vectores sobre varias direcciones y resolver un sistema de ecuaciones algebraicas o diferenciales.

velocidad de las partículas tienen en cualquier momento de tiempo $t_2 + t$ los mismos valores que los que tendrían antes de la sustitución, en el momento $t_1 + t$.

La conservación de la cantidad de movimiento está basada en la *homogeneidad del espacio*, es decir, en la identidad de las propiedades del espacio en cada uno de sus puntos. La identidad debe ser entendida en el sentido de que la traslación paralela del sistema cerrado de un lugar del espacio a otro, sin variar la disposición mutua y las velocidades de las partículas, no cambia las propiedades mecánicas del sistema (se supone que en el nuevo lugar no se viola el carácter cerrado del sistema).

Por fin, la conservación del momento de la cantidad de movimiento se basa en la *isotropía del espacio*, o sea, en la identidad de las propiedades del espacio en todas las direcciones. La identidad debe ser entendida en el sentido de que el giro del sistema cerrado como un todo no se refleja en sus propiedades mecánicas.

Los principios de conservación es un potente medio de investigaciones. Sucede con frecuencia que la solución precisa de las ecuaciones de movimiento es en extremo complicada. En semejantes casos, con ayuda de los principios de la conservación, sin resolver las ecuaciones de movimiento, es posible obtener una serie de importantes datos acerca del transcurso de los fenómenos mecánicos. Los principios de la conservación no dependen del carácter de las fuerzas que actúan. Por esta razón, con su ayuda es posible obtener una serie de importantes datos sobre el comportamiento de los sistemas mecánicos, incluso en aquellos casos cuando no son conocidas las fuerzas.

En los siguientes parágrafos de las ecuaciones de Newton obtendremos los principios de la conservación. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos últimos son mucho más generales de las leyes de Newton. Los principios de conservación son rigurosamente justos incluso cuando las leyes de Newton (en particular, la tercera ley) sufren violaciones. Hay que señalar, que los principios de conservación de la energía, cantidad de movimiento y el momento de la cantidad de movimiento son principios precisos que también se cumplen con rigor en la región relativista.

§ 19. Energía cinética

Comencemos la determinación de las integrales aditivas de movimiento. Para empezar, examinemos el más sencillo sistema, compuesto de una sola partícula (punto material).

Escribamos la ecuación de movimiento de la partícula:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \tag{19.1}$$

Aquí $\mathbf{F}$ es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Si multiplicamos la ecuación (19.1) por el desplazamiento de la partícula $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, obtenemos:

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\,dt = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{19.2}$$

El producto $\dot{\mathbf{v}}\,dt$ es el incremento de la velocidad de la partícula $d\mathbf{v}$ durante el tiempo dt. Correspondientemente

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}\,dt = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{19.3}$$

(véase (2.54)). Realizando semejante sustitución en (19.2), llegamos a la correlación

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{19.4}$$

Si el sistema es cerrado, o sea, $\mathbf{F} = 0$, $d\,(mv^2/2) = 0$, mientras que la propia magnitud

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{19.5}$$

queda constante. Esta magnitud recibe el nombre de *energía cinética* de la partícula. En el caso de una partícula aislada, dicha energía es la integral de movimiento[1]).

Multiplicando por m el numerador y denominador de la expresión (19.5) y tomando en consideración que el producto mv es igual a la cantidad de movimiento p del cuerpo, la expresión para la energía cinética puede tomar el aspecto:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \tag{19.6}$$

Si sobre la partícula actúa la fuerza $\mathbf{F}$, la energía cinética no queda constante. De acuerdo con (19.4), el incremento de la energía cinética de la partícula durante el tiempo dt es igual al producto escalar $\mathbf{F}\,d\mathbf{s}$ ($d\mathbf{s}$ es el desplazamiento de la partícula en el transcurso del tiempo dt). La magnitud

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} \tag{19.7}$$

denomínase *trabajo*, realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ por el recorrido ds (ds es el módulo del desplazamiento $d\mathbf{s}$). Podemos representar el producto escalar (19.7) en forma del producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento F_s y del recorrido elemental ds. Por lo tanto, es justo escribir que

$$dA = F_s ds. \tag{19.8}$$

[1]) En el caso de una partícula aislada, cualquier grado de velocidad queda constante. No obstante, cuando se trata de un sistema de varias partículas en interacción, precisamente las magnitudes de la forma (19.5) son los sumandos de la integral aditiva de movimiento.

De lo dicho queda claro que el trabajo caracteriza la variación de la energía condicionada por la acción de la fuerza sobre la partícula en movimiento.

Integremos la correlación (19.4) a lo largo de cierta trayectoria desde el punto *1* hasta el punto *2*:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}.$$

El primer miembro es la diferencia entre los valores de la energía cinética en los puntos *2* y *1*, es decir, el incremento[1]) de la energía cinética por el recorrido *1—2*. Si tomamos esto en cuenta obtenemos:

$$T_2-T_1=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}. \tag{19.9}$$

La magnitud

$$A=\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}=\int_1^2 F_s\,ds \tag{19.10}$$

es el trabajo de la fuerza **F** por el recorrido *1—2*. En ciertas ocasiones, designaremos dicho trabajo con el símbolo A_{12} en vez de A.

Así, pues, *el trabajo de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, se consume en el incremento de la energía cinética de la partícula*:

$$A_{12}=T_2-T_1. \tag{19.11}$$

De (19.11) se desprende que la dimensión de la energía es la misma que la del trabajo. De acuerdo con esto, la energía se mide en las mismas unidades que el trabajo (véase el parágrafo siguiente).

§ 20. Trabajo

Examinemos con mayor detalle la magnitud llamada trabajo. La expresión (19.7) puede ser escrita en la forma que sigue:

$$dA=\mathbf{F}d\mathbf{s}=F\cos\alpha\cdot ds, \tag{20.1}$$

---

[1]) La variación de toda magnitud a puede caracterizarse bien por su incremento, o bien por su decrecimiento. El incremento de la magnitud a, que designaremos por Δa, se llama la diferencia entre los valores final (a_2) e inicial (a_1) de dichas magnitudes:

$$\text{incremento}=\Delta a=a_2-a_1.$$

El decrecimiento de la magnitud a se llama la diferencia de sus valores inicial (a_1) y final (a_2)

$$\text{decrecimiento}=a_1-a_2=-\Delta a.$$

El decrecimiento de una magnitud es igual a su incremento con signo opuesto. El incremento y decrecimiento son magnitudes algebraicas.

donde α es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

Si la fuerza y la dirección de desplazamiento forman un ángulo agudo ($\cos\alpha > 0$), el trabajo es positivo. Si el ángulo α es obtuso ($\cos\alpha < 0$), el trabajo es negativo. El trabajo es igual a cero si $\alpha = \pi/2$. Esta última circunstancia muestra con gran claridad que la noción de trabajo en mecánica de manera sustancial se diferencia del concepto habitual de trabajo. Desde este punto de vista, todo esfuerzo, en particular la tensión muscular, se acompaña siempre de la realización de trabajo. Por ejemplo, un maletero para sujetar una carga pesada quedando inmóvil y más aún para desplazar esta carga por un camino horizontal, consume considerables esfuerzos, es decir, «realiza trabajo». No obstante, en estos casos el trabajo, como magnitud mecánica, es igual a cero.

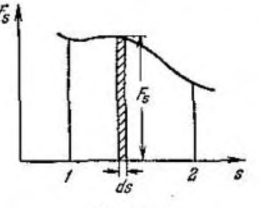


Fig. 20.1

En la fig. 20.1 se muestra la gráfica de proyección de una fuerza sobre la dirección de desplazamiento F_s como función de la posición de la partícula por la trayectoria (podemos denominar el eje de abscisas eje s; la longitud del segmento entre los puntos *1* y *2* es igual a la longitud total del recorrido). Como vemos en la figura, el trabajo elemental $dA = F_s ds$ es numéricamente igual al área de la franja sombreada, mientras que el trabajo A por el recorrido *1—2* es igual numéricamente al área de la figura limitada por la curva F_s, las líneas verticales *1* y *2* y el eje s (comp. con la fig. 3.7).

Hagamos uso de este resultado para determinar el trabajo que se realiza al deformarse un muelle que se subordina a la ley de Hooke (véase la fig. 14.2 y la fórmula (14.2)). Comencemos por el alargamiento del muelle. Realicemos el alargamiento con gran lentitud, con el fin de que la fuerza $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, con la que actuamos sobre el muelle, pueda ser siempre considerada igual en magnitud a la fuerza elástica $\mathbf{F}_{\text{elás}}$. Entonces, $F_{x\,\text{ext}} = -F_{x\,\text{elás}} = kx$, donde x es el alargamiento del muelle (fig. 20.2). Como vemos en la figura, el trabajo que hay que efectuar para provocar el alargamiento x del muelle es igual a

$$A = \frac{kx^2}{2}. \tag{20.2}$$

Al comprimir el muelle en la magnitud x, se efectúa un trabajo igual en magnitud y del mismo signo que al alargarlo en la magnitud x. La proyección de la fuerza $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ es en este caso negativa. ($\mathbf{F}_{\text{ext}}$ está dirigida a la izquierda, x crece hacia la derecha, véase la fig. 20.2), todas las dx son también negativas, por lo que el producto $F_{x\,\text{ext}}\,dx$ es positivo.

Del mismo modo podemos hallar la expresión para el trabajo realizado durante el alargamiento o compresión elásticos de una barra. De acuerdo con la fórmula (14.7) este trabajo es igual a

$$A=\frac{1}{2}\frac{ES}{l_0}(\Delta l)^2=\frac{1}{2}ESl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2=\frac{1}{2}EV\varepsilon^2. \qquad (20.3)$$

donde $V = Sl_0$ es el volumen de la barra, $\varepsilon = \Delta l/l_0$, el alargamiento relativo (véase (14.3)).

Sea que sobre un cuerpo actúan simultáneamente varias fuerzas, cuya resultante es igual a $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$. De la distributividad de un

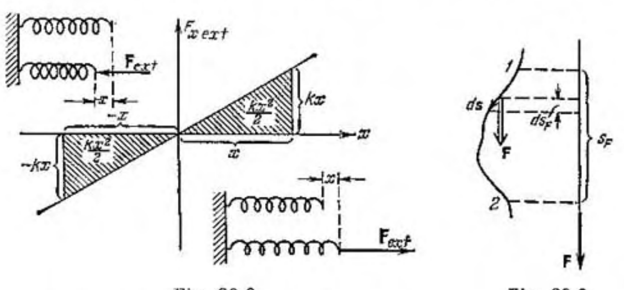


Fig. 20.2

Fig. 20.3

producto escalar de vectores (véase (2.22)) se desprende que el trabajo dA realizado por la fuerza resultante por el recorrido ds, puede ser representado en la forma

$$dA=\left(\sum_i \mathbf{F}_i\right) d\mathbf{s}=\sum_i \mathbf{F}_i\, d\mathbf{s}=\sum_i dA_i. \qquad (20.4)$$

Esto significa que el trabajo de la resultante de varias fuerzas es igual a la suma algebraica de los trabajos ejecutados por cada fuerza aislada.

El desplazamiento elemental $d\mathbf{s}$ puede ser representado como $\mathbf{v}\, dt$. Por esto, la expresión para el trabajo elemental puede tomar el aspecto

$$dA = \mathbf{F}\mathbf{v}\, dt. \qquad (20.5)$$

Entonces, el trabajo efectuado en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 se puede calcular por la fórmula

$$A=\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}\, dt. \qquad (20.6)$$

En correspondencia con (2.21) $\mathbf{F}\, d\mathbf{s} = F\, ds_F$, donde ds_F es la proyección del desplazamiento elemental $d\mathbf{s}$ por la dirección de la

fuerza F. Por lo tanto, la fórmula para el trabajo puede escribirse de la manera siguiente:

$$dA = F\, ds_F. \qquad (20.7)$$

Si la fuerza tiene magnitud y dirección constantes (fig. 20.3), el vector **F** puede ser extraído tras el signo de la integral en la expresión para el trabajo, como resultado obtenemos la fórmula

$$A = \mathbf{F} \int_1^2 d\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{s} = F s_F, \qquad (20.8)$$

donde **s** es el vector de desplazamiento del punto *1* al punto *2*, mientras que s_F, su proyección sobre la dirección de la fuerza.

El trabajo que se realiza por la unidad de tiempo recibe el nombre de *potencia*. Si durante el tiempo dt se ejecuta el trabajo dA, la potencia será igual a

$$P = \frac{dA}{dt}. \qquad (20.9)$$

Tomando dA en la forma (20.5) obtenemos para la potencia la expresión

$$P = \mathbf{F}\mathbf{v}, \qquad (20.10)$$

de acuerdo con lo cual, la potencia es igual al producto escalar del vector de fuerza por el vector de velocidad, a la que el punto de aplicación de la fuerza se mueve.

Unidades de trabajo y de fuerza. En calidad de unidad de trabajo se emplea el trabajo realizado por una fuerza igual a la unidad, que actúa en la dirección del desplazamiento, por un recorrido igual a uno. De acuerdo con esto:

1) en el SI la unidad de trabajo es el julio (J), igual al trabajo efectuado por una fuerza igual a 1 N por un recorrido igual a 1 m;

2) en el sistema CGS, el ergio (erg), igual al trabajo que realiza una fuerza igual a 1 dina (dyn) por un recorrido de 1 cm;

3) en el sistema MkgfS, el kilogramo-fuerza-metro (kgf·m) igual al trabajo realizado por una fuerza igual a 1 kgf por un recorrido de 1 m.

En las unidades de trabajo hay las siguientes correlaciones

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} = 10^5\ \text{dyn} \cdot 10^2\ \text{cm} = 10^7\ \text{erg};$$

$$1\ \text{kgf} \cdot \text{m} = 1\ \text{kgf} \cdot 1\ \text{m} = 9{,}81\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} = 9{,}81\ \text{J}.$$

Por unidad de potencia tomamos una potencia con la que por la unidad de tiempo se realiza un trabajo igual a la unidad. En el SI la unidad de potencia es el vatio (W), igual a un julio por segundo (J/s). En el sistema CGS (erg/s) ésta no tiene denominación especial.

La correlación entre vatio y erg/s:

$$1\ \mathrm{W} = 10^7\ \mathrm{erg/s}.$$

En el sistema MkgfS la unidad de potencia es el caballo de vapor (CV) igual a 75 kilogramos-fuerza-metros por segundo, 1 CV = 736 W.

Además de las unidades de medida indicadas se hace uso de unidades múltiples y fraccionarias. Sus denominaciones y designaciones se forman de la denominación y designación de la unidad fundamental y de los prefijos indicados en la tabla 20.1. En ella se aducen también

Tabla 20.1. **Denominaciones y designaciones de los prefijos que se emplean para formar las unidades múltiples y fraccionarias**

Denominación	Designación	Factor	Denominación	Designación	Factor
tera	T	10^{12}	centi	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hecto	h	10^{2}	pico	p	10^{-12}
deca	da	10^{1}	femto	f	10^{-15}
deci	d	10^{-1}	atto	a	10^{-18}

los factores, por medio de los cuales las correspondientes unidades múltiples y fraccionarias se forman de las fundamentales.

Por ejemplo, la unidad de trabajo, llamada megajulio es equivalente a 10^6 julios (1 MJ = 10^6 J), mientras que la unidad de potencia, llamada microvatio es equivalente a 10^{-6} vatios (1μW = $= 10^{-6}$ W). De modo análogo: 1 μm = 10^{-6} m, 1 pN = 10^{-12} N.

§ 21. Fuerzas conservativas

Si en cada punto del espacio la partícula sufre la acción de otros cuerpos, se dice que dicha partícula se encuentra en un campo de fuerzas. Por ejemplo, una partícula en las proximidades de la superficie terrestre se halla en el campo de las fuerzas de gravedad: en cada punto del espacio sobre ella actúa una fuerza $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$.

Como segundo ejemplo, examinemos la partícula cargada e, que se encuentra en el campo eléctrico excitado por la carga puntual inmóvil q (fig. 21.1). Semejante campo es característico a causa de que la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto del espacio, pasa por el centro inmóvil (carga q), mientras que la magnitud de la fuerza sólo depende de la distancia hasta dicho centro: $F = F(r)$ (véase la fórmula (13.1)). Recibe el nombre de *central*, un campo de fuerza que posee las enumeradas propiedades.

Llamamos *homogéneo* el campo en todos los puntos del cual las fuerzas que actúan sobre la partícula son iguales en magnitud y dirección ($\mathbf{F}$ = const.).

Un campo que varía con el tiempo denomínase *no estacionario*, mientras que el que queda invariable con el tiempo, *estacionario*.

Puede resultar que para el campo estacionario, el trabajo que sobre la partícula realizan las fuerzas del campo, sólo depende de las posiciones inicial y final de la partícula y no es función del recorrido por el que se mueve la partícula. Las fuerzas que poseen semejante propiedad se llaman *conservativas*.

De la independencia del trabajo de las fuerzas conservativas del recorrido se desprende que el trabajo de semejantes fuerzas por un

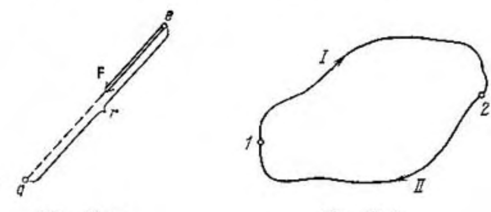


Fig. 21.1 Fig. 21.2

recorrido cerrado es igual a cero. Para demostrarlo, dividamos en dos partes un recorrido cerrado, tomado al azar: el recorrido I, por el que la partícula pasa del punto 1 al 2 y el recorrido II, por el que el cuerpo pasa del punto 2 al 1, con la particularidad de que los puntos 1 y 2 se eligen de modo arbitrario (fig. 21.2). Por todo el recorrido cerrado, el trabajo es igual a la suma de los trabajos que se realizan por cada sector:

$$A = (A_{12})_{\mathrm{I}} + (A_{21})_{\mathrm{II}}. \tag{21.1}$$

Es fácil comprender que los trabajos $(A_{21})_{\mathrm{II}}$ y $(A_{12})_{\mathrm{II}}$ sólo se distinguen por el signo. En efecto, la variación de la dirección de movimiento por la opuesta provoca el cambio de $d\mathbf{s}$ por $-d\mathbf{s}$, a causa de lo cual el valor de la integral $\int \mathbf{F}\,d\mathbf{s}$ varía su signo por el contrario. De este modo, la igualdad (21.1) puede ser escrita así

$$A = (A_{12})_{\mathrm{I}} - (A_{12})_{\mathrm{II}},$$

y, como el trabajo no depende del recorrido, o sea, $(A_{12}) = (A_{12}))_{\mathrm{II}}$, llegamos a la conclusión de que $A = 0$.

De la igualdad a cero del trabajo por un recorrido cerrado podemos deducir con facilidad que el trabajo A_{12} no depende del recorrido. Es posible hacer esto, variando la marcha de racionamientos realizados más arriba.

De esta manera, podemos definir las fuerzas conservativas por dos procedimientos:

1) como fuerzas, cuyo trabajo no depende del recorrido por el que la partícula pasa de una a otra posición;

2) como fuerzas, cuyo trabajo por cualquier recorrido cerrado es igual a cero.

Demostremos que la fuerza de gravedad es conservativa. En cualquier punto dicha fuerza tiene iguales magnitudes y dirección,

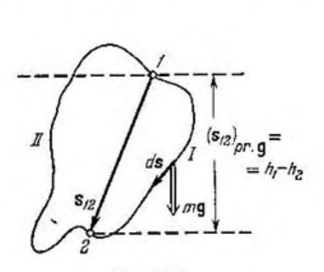


Fig. 21.3

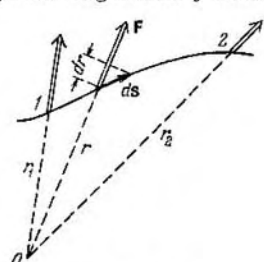


Fig. 21.4

esta última es vertical hacia abajo (fig. 21.3). Por esta razón, independientemente de por cuál de los recorridos (por ejemplo, I o bien II; véase la figura) se mueve la partícula, el trabajo A_{12}, según (20.8), es determinado con la expresión

$$A_{12} = m\mathbf{g}\mathbf{s}_{12} = mg\,(\mathbf{s}_{12})_{\text{pr.}\,g}.$$

En la fig. 21.3 vemos que la proyección del vector $\mathbf{s}_{12}$ sobre la dirección $\mathbf{g}$ es igual a la diferencia de alturas $h_1 - h_2$. Por lo tanto, la expresión para el trabajo puede ser escrita

$$A_{12} = mg\,(h_1 - h_2). \tag{21.2}$$

Es evidente que esta última expresión no depende del recorrido; de aquí se desprende que la fuerza de gravedad es conservativa.

Es fácil darse cuenta de que igual resultado será obtenido para todo campo estacionario homogéneo.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula en un campo central, también son conservativas. De acuerdo con la fórmula (20.7), el trabajo elemental por el recorrido ds (fig. 21.4) es igual a

$$dA = F(r)\,ds_F$$

Pero la proyección de $d\mathbf{s}$ sobre la dirección de la fuerza en el lugar dado, es decir, sobre la dirección del radio vector $\mathbf{r}$, es igual a dr, es decir, al incremento de la distancia de la partícula al centro de

fuerzas O: $ds_F = dr$. Por esto, $dA = F(r)\,dr$, mientras que el trabajo por todo el recorrido

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr. \qquad (21.3)$$

Esta última expresión sólo depende del tipo de la función $F(r)$ y de los valores de r_1 y r_2. De ninguna manera depende del tipo de la trayectoria, de lo que se deduce que la fuerza es conservativa.

Para que el lector no se cree la representación errónea de que toda fuerza que sólo es función de las coordenadas del punto es conservativa, examinemos el siguiente ejemplo. Sea que las componentes de las fuerzas son determinadas por las fórmulas

$$F_x = ay, \; F_y = -ax, \; F_z = 0. \qquad (21.4)$$

El módulo de nuestra fuerza es igual a $F = ar$ y ella está dirigida por la tangente a la circunferencia de radio r (fig. 21.5). En efecto, como sigue de la figura, para una fuerza de semejante magnitud y dirección

$$F_x = ar\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= ar\,\text{sen}\,\alpha = ar\,\frac{y}{r} = ay,$$

$$F_y = ar\cos(\pi - \alpha) = -ar\cos\alpha =$$

$$= -ar\,\frac{x}{r} = -ax,$$

Fig. 21.5

lo que coincide con los valores de (21.4). Tenemos un recorrido cerrado en forma de una circunferencia de radio r, cuyo centro yace en el origen de coordenadas. El trabajo de la fuerza por tal recorrido es, por lo visto, igual a $F \cdot 2\pi r = ar \cdot 2\pi r = 2\pi a r^2$, es decir, se distingue de cero. Por consiguiente, la fuerza no es conservativa.

Las fuerzas de rozamiento son fuerzas típicamente no conservativas. Como la fuerza de rozamiento **F** y la velocidad **v** de la partícula tienen direcciones opuestas[1]), el trabajo de la fuerza de rozamiento en cada sector del recorrido es negativo:

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{v}\,dt = -Fv\,dt = -F\,ds < 0.$$

[1]) Aquí se trata del caso de rozamiento entre un cuerpo en movimiento y cuerpos inmóviles (respecto del sistema de referencia). En ciertas ocasiones, el trabajo de la fuerza de rozamiento puede ser positivo. Por ejemplo, esto sucede cuando la fuerza de rozamiento está condicionada por la interacción del cuerpo dado con otro que se mueve en esa misma dirección, pero con mayor velocidad.

Por esta razón, también será negativo (es decir, diferente de cero) el trabajo en todo recorrido cerrado. De aquí sigue que las fuerzas de rozamiento no son conservativas.

Señalemos, que el campo de las fuerzas conservativas es un caso particular de campo potencial de fuerzas. Un campo de fuerzas recibe el nombre de *potencial* si puede ser descrito mediante la función Π (x, y, z, t), cuyo gradiente (véase el siguiente parágrafo, fórmula (22.6)) determina la fuerza en cada punto del campo: $\mathbf{F} = \nabla\Pi$ (comp. con (22.7)). La función Π denomínase *función potencial* o bien *potencial*. Cuando el potencial no depende explícitamente de tiempo, es decir, $\Pi = \Pi(x, y, z)$, el campo potencial resulta ser estacionario, mientras que sus fuerzas, conservativas. En semejante caso

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

donde $U(x, y, z)$ es la energía potencial de la partícula (véase el siguiente parágrafo).

Para un campo de fuerzas no estacionario, descrito por el potencial $\Pi(x, y, z, t)$, no se pueden identificar las fuerzas potenciales y conservativas.

§ 22. Energía potencial en un campo exterior de fuerzas

Cuando el trabajo de las fuerzas del campo no depende del trayecto, sino que sólo es función de las partículas inicial y final de la partícula, a cada punto del campo se le puede aducir el valor de cierta función $U(x, y, z)$ tal, que la diferencia de los valores de dicha función en los puntos *1* y *2* determinará el trabajo de las fuerzas cuando la partícula pasa del primer punto al segundo:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \tag{22.1}$$

Podemos realizar semejante operación del modo siguiente. Adjudiquemos a cierto punto inicial O el valor arbitrario de una función igual a U_0. A todo otro punto P le aducimos el valor

$$U(P) = U_0 + A_{PO}, \tag{22.2}$$

donde A_{PO} es el trabajo que las fuerzas conservativas ejecutan sobre la partícula al desplazarse ésta del punto P al punto O. Como el trabajo no depende del recorrido, el valor de $U(P)$ determinado de este modo, será unívoco. Indiquemos que la función $U(P)$ tiene la dimensión del trabajo (o energía).

De acuerdo con (22.2) los valores de la función en los puntos *1* y *2* son iguales a

$$U_1 = U_0 + A_{1O};\ U_2 = U_0 + A_{2O}.$$

Formemos la diferencia de estos valores y tomemos en consideración que $A_{2O} = -A_{O2}$ (véase el parágrafo anterior). Como resultado,

obtenemos

$$U_1 - U_2 = A_{1O} - A_{2O} = A_{1O} + A_{O2}.$$

La suma $A_{1O} + A_{O2}$ nos ofrece el trabajo realizado por las fuerzas del campo al desplazarse la partícula del punto *1* al punto *2* por una trayectoria que pasa por el punto O. No obstante, el trabajo que se realiza sobre la partícula durante un desplazamiento del punto *1* al punto *2* por otra cualquier trayectoria (y entre ellas, por las que no pasan por el punto O), será el mismo. Por esta razón, la suma $A_{1O} + A_{O2}$ puede ser simplemente escrita en la forma A_{12}. Como resultado obtenemos la correlación (22.1).

Es decir, con ayuda de la función U es posible determinar el trabajo realizado sobre la partícula por las fuerzas conservativas en cualquier trayecto, que comienza en el punto arbitrario *1* y termina en el punto *2*, tomado al azar.

Supongamos que sobre la partícula sólo actúan las fuerzas conservativas. Entonces, el trabajo efectuado sobre la partícula por el recorrido *1*—*2*, puede ser representado en la forma (22.1). De acuerdo con la fórmula (19.11) dicho trabajo se dirige al incremento de la energía cinética de las partículas. Así, pues, llegamos a la igualdad

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2,$$

de la que se desprende, que

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

El resultado obtenido significa que la magnitud

$$E = T + U \tag{22.3}$$

para una partícula que se encuentra en el campo de las fuerzas conservativas, queda constante, es decir, es la integral de movimiento.

De (22.3) se desprende que U como sumando entra en la integral de movimiento, teniendo dimensión de energía. Por este motivo, la función U (x, y, z) recibe el nombre de *energía potencial* de la partícula en el campo exterior de fuerzas. La magnitud E, igual a la suma de las energías cinética y potencial, se llama *energía total mecánica* de la partícula.

En la correlación (22.1) el trabajo realizado por las fuerzas conservativas sobre una partícula, es igual a la disminución de la energía potencial de dicha partícula. Con otras palabras, podemos decir que el trabajo se ejecuta a cuenta de la reserva de energía potencial.

De (22.2) sigue que la energía potencial es determinada con una precisión hasta cierta constante U_0 aditiva que no conocemos. Sin embargo, esta circunstancia no tiene importancia alguna, ya que en todas las correlaciones físicas entran o la diferencia de los valores de U con dos posiciones del cuerpo, o bien la derivada de la función U según las coordenadas. En la práctica, se ha adoptado considerar

igual a cero la energía potencial del cuerpo en cierta posición, mientras que la energía en otras posiciones se toma con relación a la primera.

Conociendo el tipo de función $U(x, y, z)$ puede ser hallada la fuerza que, en el punto dado del campo, actúa sobre la partícula. Consideremos el desplazamiento dx de la partícula paralelo al eje x. Semejante desplazamiento se acompaña por la realización sobre la partícula de un trabajo $dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = F_x\,dx$ (las componentes dy y dz del desplazamiento son iguales a cero). De acuerdo con (22.1) un trabajo semejante puede ser expresado como el decrecimiento de la energía potencial: $dA = -dU$. Igualando estas dos expresiones para el trabajo, obtenemos

$$F_x\,dx = -dU.$$

De aquí

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (y = \text{const},\ z = \text{const}).$$

El segundo miembro es la derivada de la función $U(x, y, z)$, calculada suponiendo que las variables y y z quedan invariables y que sólo varía la variable x. Tales derivadas reciben el nombre de parciales y, a diferencia de las derivadas de funciones de una variable, se designan por el símbolo $\frac{\partial U}{\partial x}$. Por consiguiente, la componente de la fuerza por el eje x es igual a la derivada parcial, tomada con signo opuesto, de la energía potencial según la variable x: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Para las componentes de la fuerza por los ejes y y z se obtienen expresiones análogas. Así, pues,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{22.4}$$

Conociendo las componentes, es posible hallar el vector de la fuerza:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{22.5}$$

El vector con componentes $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, donde φ es una función escalar de las coordenadas x, y, z recibe el nombre de *gradiente* de la función φ y se designa por el símbolo

$$\text{grad}\ \varphi \ \text{ o bien } \ \nabla\varphi$$

(∇ denomínase *operador nabla* (o simplemente nabla). $\nabla\varphi$ se lee: «gradiente de fi»). De la definición de gradiente, sigue que

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{22.6}$$

La comparación de (22.5) y (22.6) muestra que la fuerza conservativa es igual al gradiente de la energía potencial, tomado con

signo opuesto:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \tag{22.7}$$

Sea que la partícula, sobre la que actúa la fuerza (22.7), se desplaza por un segmento $d\mathbf{s}$ que tiene las componentes dx, dy, dz. Con esto, la fuerza realiza el trabajo

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = -\nabla U\,d\mathbf{s} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz\right).$$

Si tomamos en consideración que $dA = -dU$, para el incremento de la función U obtenemos la siguiente expresión:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz. \tag{22.8}$$

La expresión del tipo (22.8) recibe el nombre de diferencial completa de la respectiva función.

En física, la noción de diferencial total juega un enorme papel, por lo que le dedicaremos algunas líneas. Recibe el nombre de *diferencial completa* de una función unívoca $f(x, y, z)$ el incremento que recibe dicha función al pasar de un punto con coordenadas x, y, z al punto vecino con coordenadas $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Por definición, dicho incremento es igual a

$$df(x, y, z) = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$$

y, por lo tanto, sólo se determina por los valores de la función en los puntos inicial y final. Por esta causa no puede depender de recorrido por el que transcurre la transición. Como semejante recorrido tomemos la línea quebrada, constituida por los segmentos dx, dy, dz (fig. 22.1). En el segmento dx la función $f(x, y, z)$ se comporta como una función de la única variable x y recibe el incremento $(\partial f/\partial x)\,dx$. De manera análoga, en los segmentos dy y dz, la función recibe los incrementos $(\partial f/\partial y)\,dy$ y $(\partial f/\partial z)\,dz$. Así, pues, el incremento total de la función al pasar del punto inicial al final es igual a

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz. \tag{22.9}$$

Hemos llegado a la expresión para la diferencial completa (comp. con (22.8)).

No toda expresión de la forma

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

es la diferencial completa de cierta función $f(x, y, z)$. En particular, la expresión para el trabajo que realiza una fuerza (21.4),

$$dA = ay\,dx - ax\,dy \tag{22.10}$$

no es una diferencial total, ya que no existe tal función U para la que $-\partial U/\partial x = ay$, mientras que $-\partial U/\partial y = -ax$ (véase (21.4)).

Respectivamente, no existe tal función U, cuyo decrecimiento determinara el trabajo (22.10).

De lo dicho se desprende que sólo pueden ser conservativas aquellas fuerzas que satisfacen la condición (22.7), es decir, las fuerzas, cuyas componentes por los ejes de coordenadas son iguales a las derivadas parciales de cierta función $U(x, y, z)$ por las correspondientes

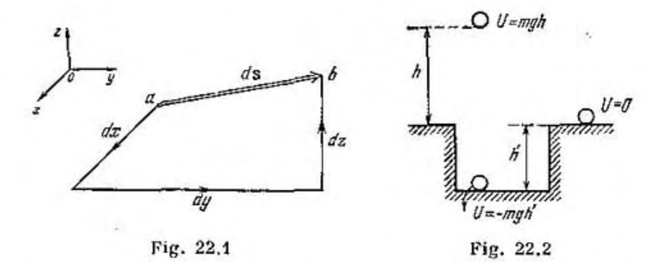


Fig. 22.1 Fig. 22.2

coordenadas, tomadas con signo opuesto. Dicha función es la energía potencial de la partícula.

El aspecto concreto de la función $U(x, y, z)$ depende del carácter del campo de fuerzas. Como ejemplo, hallemos la energía potencial de la partícula en el campo de las fuerzas de gravedad. De acuerdo con (21.2), el trabajo realizado sobre la partícula por las fuerzas de dicho campo, es igual a

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2).$$

Por otro lado, según (22.1)

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

Comparando las dos expresiones para el trabajo, llegamos a la conclusión de que la energía potencial de la partícula en el campo de las fuerzas de gravedad se determina por la expresión

$$U = mgh, \qquad (22.11)$$

donde h se cuenta a partir de un nivel tomado al azar.

El comienzo del cálculo de la energía potencial puede ser elegido de forma arbitraria. Por esta causa, U alcanza incluso valores negativos. Por ejemplo, si tomamos como nula la energía potencial de una partícula que se halla, en la superficie terrestre, la energía potencial de una partícula que se encuentra en el fondo de un pozo de profundidad h', será igual a $U = -mgh'$ (fig. 22.2). Señalemos que la energía cinemática no puede ser negativa.

Supongamos, que sobre la partícula actúa también, además de las fuerzas conservativas, una fuerza no conservativa. $\mathbf{F}^*$. En tal

caso, al pasar la partícula del punto *1* al punto *2*, sobre ella se realizará el trabajo

$$A_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}+\int_1^2 \mathbf{F}^*\,d\mathbf{s}=A_{\text{cons}}+A_{12}^*,$$

donde A_{12}^* es el trabajo de la fuerza no conservativa. El trabajo de las fuerzas conservativas A_{cons} puede representarse con $U_1 - U_2$. Como resultado obtenemos

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^*.$$

El trabajo sumario de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula, se dirige al incremento de la energía cinética de dicha partícula (véase (19.11)). Por lo tanto,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^*,$$

de donde, tomando en consideración que $T + U = E$, obtenemos

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*. \qquad (22.12)$$

El resultado obtenido quiere decir que el trabajo de las fuerzas no conservativas es consumido para el incremento de la energía mecánica total de la partícula.

En el caso, cuando en las posiciones inicial y final la energía cinética de la partícula es igual (en particular, igual a cero), el trabajo de las fuerzas no conservativas es dirigido al incremento de la energía potencial de la partícula:

$$A_{12}^* = U_2 - U_1 \quad (T_2 = T_1). \qquad (22.13)$$

Esta correlación es útil cuando se determina la diferencia de valores de la energía potencial.

Consideremos un sistema constituido por N partículas, que entre sí no interactúan, ubicadas en un campo de fuerzas conservativas. Cada una de estas partículas tiene una energía cinética $T_i = {}^1/_2 m_i v_i^2$ (i es el número de la partícula) y una energía potencial $U_i = U_i(x_i, y_i, z_i)$. Examinando la partícula i-ésima, independientemente de otras partículas, podemos obtener que

$$E_i = T_i + U_i = \text{const}_i.$$

Sumando esta igualdad por todas las partículas, obtenemos la correlación

$$E=\sum_{i=1}^{N} E_i=\sum_{i=1}^{N} T_i+\sum_{i=1}^{N} U_i=\text{const}. \qquad (22.14)$$

De aquí se desprende la aditividad de la energía mecánica total para el sistema que consideramos.

De acuerdo con (22.14) *la energía mecánica total de un sistema de partículas que no interactúan y sobre las que actúan sólo fuerzas conservativas, queda constante.* Esta afirmación expresa el principio de conservación de la energía para el sistema mecánico indicado.

Si además de las fuerzas conservativas, sobre la partícula actúan las fuerzas no conservativas $\mathbf{F}_i^*$, la energía total del sistema no queda constante, con la particularidad de que

$$E_2 - E_1 = \sum_{i=1}^{N} (A_{12}^*)_i, \qquad (22.15)$$

donde $(A_{12}^*)_i$ es el trabajo que realiza la fuerza no conservativa aplicada a la i-ésima partícula, al desplazarse ésta de su posición inicial a la final.

En la terminación del parágrafo anterior, establecimos que el trabajo de la fuerza de rozamiento siempre es negativo. Por esta razón, cuando en el sistema existen fuerza de rozamiento la energía mecánica total del sistema disminuye (se disipa), convirtiéndose en formas no mecánicas de energía (por ejemplo, en la energía interior de los cuerpos o, como suele decirse, en calor). Semejante proceso denomínase *disipación* de la energía. Las fuerzas que provocan la disipación de la energía reciben el nombre de *fuerzas disipativas.* En el caso general, llamaremos fuerzas disipativas aquellas que siempre están dirigidas en sentido opuesto a las velocidades de las partículas y que, por lo tanto, provocan su frenado.

Cabe señalar, que no es obligatorio que las fuerzas no conservativas sean disipativas.

§ 23. Energía potencial de interacción

Hasta el momento hemos examinado sistemas de partículas que entre sí no ejercen interacción. Ahora vamos a pasar a considerar un sistema de dos partículas en interacción. Designemos la fuerza con la que la segunda partícula actúa sobre la primera con el símbolo $\mathbf{F}_{12}$, mientras que la fuerza con la que la primera partícula acciona sobre la segunda, con el símbolo $\mathbf{F}_{21}$. De acuerdo con la tercera ley de Newton $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Introduzcamos el vector $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los radios vectores de las partículas (fig. 23.1). La distancia entre las partículas es igual al módulo de dicho vector. Supongamos que las fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ poseen una magnitud que sólo depende de la distancia R_{12} entre las partículas y que están dirigidas a lo largo de la recta que une las partículas. Como sabemos, esto es válido para las fuerzas de interacción gravitacional y coulombiana (véanse las fórmulas (11.2) y (13.1)).

Tomando en consideración las suposiciones adoptadas, las fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ pueden ser representadas del modo que sigue

$$\mathbf{F}_{12} = f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}, \tag{23.1}$$

donde $\mathbf{e}_{12}$ es el versor del vector $\mathbf{R}_{12}$ (fig. 23.2) y $f(R_{12})$, cierta función R_{12}, positiva si las partículas se atraen y negativa, si se repelen.

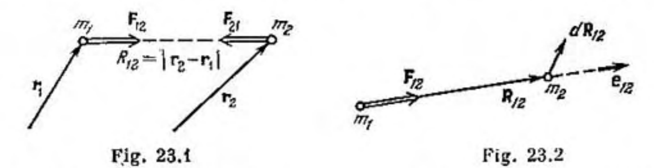


Fig. 23.1 Fig. 23.2

Considerando que el sistema es cerrado (no hay fuerzas externas), escribimos las ecuaciones de movimiento de las dos partículas:

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2\dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

Multipliquemos la primera ecuación por $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1\,dt$ y la segunda, por $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2\,dt$ y sumémoslas [1]). Como resultado obtenemos

$$m_1\mathbf{v}_1\dot{\mathbf{v}}_1\,dt + m_2\mathbf{v}_2\dot{\mathbf{v}}_2\,dt = \mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}\,d\mathbf{r}_2. \tag{23.2}$$

El primer miembro de esta correlación es el incremento de la energía cinética del sistema durante el tiempo dt (véase (19.3)), el segundo, el trabajo de las fuerzas internas durante ese mismo tiempo.

Teniendo en cuenta las expresiones (23.1) el segundo miembro de la fórmula (23.2) puede ser transformado de la manera siguiente:

$$dA_{\text{int}} = \mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}\,d\mathbf{r}_2 = f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{r}_1 - f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{r}_2 = -f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -f(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{R}_{12}. \tag{23.3}$$

En la fig. 23.2 vemos que el producto escalar $\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{R}_{12}$ es igual a dR_{12}, es decir, al incremento de la distancia entre las partículas. Así, pues,

$$dA_{\text{int}} = -f(R_{12})\,dR_{12}. \tag{23.4}$$

La expresión $f(R_{12})\,dR_{12}$ puede ser considerada como el incremento de cierta función de R_{12}. Designemos esta función por $U(R_{12})$, con lo que llegamos a la igualdad

$$f(R_{12})\,dR_{12} = dU(R_{12}). \tag{23.5}$$

Por lo tanto,

$$dA_{\text{int}} = -dU. \tag{23.6}$$

[1]) En este caso, es mejor designar el desplazamiento de la partícula por $d\mathbf{r}$ en lugar de $d\mathbf{s}$.

7−01050

Si tenemos en cuenta todo lo dicho, podemos representar la expresión (23.2) en la forma $dT = -dU$ o bien

$$dE = d\,(T + U) = 0, \qquad (23.7)$$

de donde se deduce que la magnitud $E = T + U$ se conserva para el sistema cerrado que consideramos. La función $U\,(R_{12})$ es la *energía potencial de interacción*. Depende de la distancia entre las partículas.

Supongamos que las partículas se han desplazado de las posiciones con las que la distancia entre ellas era igual a $R_{12}^{(a)}$ a nuevas posiciones, con las que entre las partículas la distancia es igual a $R_{12}^{(b)}$. En correspondencia con (23.6), en este caso las fuerzas internas realizan sobre las partículas un trabajo

$$A_{ab\,\text{int}} = -\int_a^b dU = U\,(R_{12}^{(a)}) - U\,(R_{12}^{(b)}). \qquad (23.8)$$

De (23.8) sigue que el trabajo de las fuerzas (23.1) no depende de los recorridos por los que las partículas se desplazaron y sólo se determina por las distancias inicial y final entre las partículas (por las configuraciones inicial y final del sistema). Así, pues, las fuerzas de interacción del tipo (23.1) son conservativas.

Si las dos partículas se mueven, la energía total del sistema es igual a

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{inter}}\,(R_{12}). \qquad (23.9)$$

Supongamos que la partícula *1* está fijada en cierto punto que tomamos como origen de coordenadas ($\mathbf{r}_1 = 0$). Por esta causa, esta partícula pierde la posibilidad de moverse, por lo que la energía cinética sólo constará de un sumando $^1/_2 m_2 v_2^2$. En este caso, la energía potencial sólo será función de r_2. La expresión (23.9) toma el aspecto

$$E = \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{inter}}\,(r_2). \qquad (23.10)$$

Si examinamos un sistema constituido por una sola partícula *2*, la función $U_{\text{inter}}\,(r_2)$ desempeñará el papel de energía potencial de dicha partícula en el campo de fuerzas de la partícula *1*, a pesar de que, en esencia, esta función es la energía potencial de interacción de las partículas *1* y *2*. En general, la energía potencial de un campo externo de fuerzas es, en realidad, la energía de interacción entre los cuerpos del sistema y los cuerpos que crean con relación al sistema el campo externo de fuerzas.

Dirijámonos de nuevo a un sistema de dos partículas libres («no fijadas») en interacción. Si sobre la primera partícula, además de la fuerza interna, actúa la fuerza externa $\mathbf{F}_1^*$, mientras que sobre la segunda partícula, la fuerza $\mathbf{F}_2^*$, en el segundo miembro de la corre-

lación (23.2) aparecerán los sumandos $\mathbf{F}_1^* d\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{F}_2^* d\mathbf{r}_2$ que en su suma nos darán el trabajo de las fuerzas externas dA_{ext}. Por consiguiente, la fórmula (23.7) toma el aspecto

$$d\,(T + U_{inter}) = dA_{ext}. \qquad (23.11)$$

Cuando la energía cinética de las partículas queda constante (por ejemplo, igual a cero), la correlación (23.11) tiene la forma

$$dU_{inter} = dA_{ext} \qquad (dT = 0). \qquad (23.12)$$

Integrando esta correlación de la configuración a a la configuración b, obtenemos

$$U_{inter}\,(R_{12}^{(b)}) - U_{inter}\,(R_{12}^{(a)}) = A_{ab\,ext}\;(T_b = T_a) \qquad (23.13)$$

(comp. con la fórmula (22.13)).

Propaguemos los resultados obtenidos a un sistema de tres partículas en interacción. Entonces, el trabajo de las fuerzas internas

$$dA_{int} = (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13})\,d\mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23})\,d\mathbf{r}_2 + \\ + (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32})\,d\mathbf{r}_3. \qquad (23.14)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, damos a la expresión (23.14) el aspecto

$$dA_{int} = -\mathbf{F}_{12}d\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{F}_{13}d\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \\ - \mathbf{F}_{23}d\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{R}_{12} - \mathbf{F}_{13}\,d\mathbf{R}_{13} - \\ - \mathbf{F}_{23}\,d\mathbf{R}_{23}, \qquad (23.15)$$

donde $\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$.

Supongamos que podemos representar las fuerzas internas en la forma $\mathbf{F}_{ik} = f_{ik}\,(R_{ik})\,\mathbf{e}_{ik}$ (comp. con (23.1)). Entonces

$$dA_{int} = -f_{12}\,(R_{12})\,\mathbf{e}_{12}\,d\mathbf{R}_{12} - f_{13}\,(R_{13})\,\mathbf{e}_{13}\,d\mathbf{R}_{13} - \\ - f_{23}\,(R_{23})\,\mathbf{e}_{23}\,d\mathbf{R}_{23}.$$

Cada uno de los productos $\mathbf{e}_{ik}\,d\mathbf{R}_{ik}$ es igual al incremento de la distancia entre las respectivas partículas dR_{ik}. Por esta razón

$$dA_{int} = -f_{12}\,(R_{12})\,dR_{12} - f_{13}\,(R_{13})\,dR_{13} - f_{23}\,(R_{23})\,dR_{23} = \\ = -d\,[U_{12}\,(R_{12}) + U_{13}\,(R_{13}) + U_{23}\,(R_{23})] = -dU_{inter}. \qquad (23.16)$$

Aquí,

$$U_{inter} = U_{12}\,(R_{12}) + U_{13}\,(R_{13}) + U_{23}\,(R_{23}) \qquad (23.17)$$

es la *energía potencial de interacción del sistema*. Se compone de la energía de interacción de las partículas tomadas a pares.

Igualando dT a la suma de los trabajos $dA_{int} = -dU_{inter}$ y dA_{ext}, llegamos a la correlación (23.11) en la que por U_{inter} hay que tener en cuenta la expresión (23.17).

7*

Con facilidad podemos generalizar el resultado obtenido para un sistema con cualquier número de partículas. Para un sistema constituido por N partículas que interactúan, la energía potencial de interacción se compone de las energías de interacción de las partículas, tomadas a pares:

$$U_{\text{inter}} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + \ldots + U_{1N}(R_{1N}) + \\ + U_{23}(R_{23}) + \ldots + U_{2N}(R_{2N}) + \ldots + U_{N-1,\,N}(R_{N-1,\,N}). \tag{23.18}$$

Esta suma puede ser escrita de la forma siguiente:

$$U_{\text{inter}} = \sum_{(i<k)} U_{ik}(R_{ik}) \tag{23.19}$$

(presten atención a que en la expresión (23.18) en cada sumando el primer índice tiene menor valor que el segundo). Con motivo de que $U_{ik}(R_{ik}) = U_{ki}(R_{ki})$, podemos representar la energía de interacción del modo siguiente

$$U_{\text{inter}} = \frac{1}{2} \sum_{(i\neq k)} U_{ik}(R_{ik}). \tag{23.20}$$

En las sumas (23.19) y (23.20) los índices i y k adquieren los valores desde 1 hasta N, lo que concuerda con la condición $(i < k)$ o $(i \neq k)$.

Sea que el sistema consta de cuatro partículas, con la particularidad de que interactúan la primera partícula con la segunda y la tercera con la cuarta. En tal caso, la energía total del sistema es

$$E = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + U_{12} + U_{34} = (T_1 + T_2 + U_{12}) + \\ + (T_3 + T_4 + U_{34}) = E' + E''. \tag{23.21}$$

Aquí E' es la energía total del subsistema formado por las partículas *1* y *2*, E'', la energía total del subsistema formado por las partículas *3* y *4*. Suponemos que los subsistemas no están en interacción. La correlación (23.21) demuestra la aditividad de la energía (véase el tercer párrafo del § 18).

En conclusión, hallemos el tipo de la función U_{inter} en aquel caso cuando la fuerza de interacción es razón inversa del cuadrado de la distancia entre las partículas:

$$f(R_{12}) = \frac{\alpha}{R_{12}^2} \tag{23.22}$$

(α es una constante). Recordemos que cuando las partículas se atraen $\alpha > 0$, mientras que al repelerse éstas $\alpha < 0$ (véase el texto que sigue a la fórmula (23.1)).

De acuerdo con (23.5)

$$dU_{\text{inter}} = f(R_{12})\, dR_{12} = \frac{\alpha}{R_{12}^2}\, dR_{12}.$$

Después de integrar obtenemos

$$U_{\text{inter}} = -\frac{\alpha}{R_{12}} + \text{const.} \qquad (23.23)$$

Lo mismo que la energía potencial, en el campo externo de fuerzas la energía potencial de interacción se determina con una precisión hasta cierta constante aditiva. Por regla, se supone que para $R_{12} = \infty$ la energía potencial se reduce a cero (a dicha distancia la fuerza (23.22) se anula, o sea, la interacción entre las partículas desaparece). En semejante caso, la constante aditiva en (23.23) será igual a cero y la expresión para la energía potencial de interacción toma el aspecto

$$U_{\text{inter}} = -\frac{\alpha}{R_{12}}. \qquad (23.24)$$

De acuerdo con (23.13), para alejar las partículas entre sí desde una distancia R_{12} hasta una distancia infinitamente grande, sin que con ello varíen sus velocidades, es necesario realizar el trabajo

$$A_{\text{ext}} = U_{\text{inter}\,\infty} - U_{\text{inter}}(R_{12}).$$

La sustitución de los respectivos valores de la función (23.24), nos proporciona la expresión

$$A_{\text{ext}} = 0 - \left(-\frac{\alpha}{R_{12}}\right) = \frac{\alpha}{R_{12}}. \qquad (23.25)$$

Cuando las partículas se atraen $\alpha > 0$; en correspondencia, para el alejamiento de las partículas entre sí hay que realizar trabajo positivo.

Si las partículas se repelen $\alpha < 0$ y el trabajo (23.25) resulta ser negativo. Semejante trabajo se tiene que realizar para impedir el aumento de la velocidad de movimiento de las partículas que se repelen.

§ 24. Principio de conservación de la energía

Reunamos los resultados obtenidos en los parágrafos anteriores. Consideremos un sistema compuesto por N partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Sea que las partículas ejercen interacción entre sí con fuerzas $\mathbf{F}_{ik}$, cuyos módulos sólo dependen de la distancia R_{ik} que separa las partículas. En el parágrafo anterior fue establecido que tales fuerzas son conservativas. Esto significa que el trabajo realizado sobre las partículas por estas fuerzas es determinado por la configuración inicial y final del sistema. Vamos a suponer, que sobre la partícula i-ésima, además de las fuerzas internas, actúan la fuerza externa conservativa $\mathbf{F}_i$ y la fuerza externa no conservativa $\mathbf{F}_i^*$. Entonces, la ecuación de movimiento de la partícula i-ésima, tendrá

el aspecto

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i=\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N}\mathbf{F}_{ik}+\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_i^*\quad (i=1, 2, \ldots, N). \qquad (24.1)$$

Multipliquemos la i-ésima ecuación por $d\mathbf{s}_i=d\mathbf{r}_i=\mathbf{v}_i\,dt$ y sumando conjuntamente todas las N ecuaciones, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i\,d\mathbf{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N}\mathbf{F}_{ik}\right\}d\mathbf{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\,d\mathbf{s}_i+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^*\,d\mathbf{s}_i. \qquad (24.2)$$

El primer miembro es, ni más ni menos, el incremento de la energía cinética del sistema:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{v}_i\,d\mathbf{v}_i=d\sum_{i=1}^{N}\frac{m_iv_i^2}{2}=dT \qquad (24.3)$$

(véase (19.3)). De las fórmulas (23.14) — (23.19) se desprende que el primer término del segundo miembro es igual al decrecimiento de la energía potencial de interacción de las partículas:

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N}\mathbf{F}_{ik}\right\}d\mathbf{r}_i=-\sum_{(i<k)}\mathbf{F}_{ik}\,d\mathbf{R}_{ik}=-d\sum_{(i<k)}U_{ik}(R_{ik})=-dU_{\text{inter}}. \qquad (24.4)$$

De acuerdo con (22.1) el segundo término en (24.2) es igual al decrecimiento de la energía potencial del sistema en el campo externo de las fuerzas conservativas:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\,d\mathbf{s}_i=-d\sum_{i=1}^{N}U_i(\mathbf{r}_i)=-dU_{\text{ext}}. \qquad (24.5)$$

Por fin, el último término en (24.2) es el trabajo de las fuerzas externas no conservativas:

$$\sum_{i=1}^{N}F_i^*\,d\mathbf{s}_i=\sum_{i=1}^{N}dA_i^*=dA_{\text{ext}}^*. \qquad (24.6)$$

Tomando en consideración las fórmulas (24.3)—(24.6), representamos la correlación (24.2) de la forma siguiente:

$$d\,(T+U_{\text{inter}}+U_{\text{ext}})=dA_{\text{ext}}^*. \qquad (24.7)$$

La magnitud

$$E=T+U_{\text{inter}}+U_{\text{ext}} \qquad (24.8)$$

es la energía mecánica total del sistema. Si no hay fuerzas externas no conservativas, el segundo miembro de la fórmula (24.7) será igual

a cero y, por lo tanto, la energía total del sistema quedará constante:

$$E = T + U_{\text{inter}} + U_{\text{ext}} = \text{const.} \tag{24.9}$$

De este modo llegamos a la conclusión de que *la energía mecánica total de un sistema sobre el que actúan sólo fuerzas conservativas siempre es constante.* Esta afirmación contiene la esencia de una de las leyes fundamentales de mecánica, es decir, el *principio de conservación de la energía mecánica.*

Para un sistema cerrado, o sea, aquel sobre cuyos cuerpos no actúa ninguna fuerza externa, la correlación (24.9) tiene la forma

$$E = T + U_{\text{inter}} = \text{const.} \tag{24.10}$$

En semejante caso, el principio de conservación de la energía se enuncia de la siguiente manera: *la energía mecánica total de un sistema cerrado de cuerpos, entre los que sólo actúan fuerzas conservativas, siempre es constante.*

Si además de las fuerzas conservativas, en un sistema cerrado ejercen acción también fuerzas no conservativas, por ejemplo las de rozamiento, la energía total del sistema no se conserva. Considerando las fuerzas no conservativas como externas, en correspondencia con (24.7) podemos escribir:

$$dE = d\,(T + U_{\text{inter}}) = dA_{\text{no con.}}. \tag{24.11}$$

Después de integrar esta correlación obtenemos

$$E_2 - E_1 = A_{12\text{no con.}}. \tag{24.12}$$

El principio de conservación de la energía para un sistema de partículas que entre sí no ejercen interacción fue formulado en el § 22 (véase el texto que sigue a la fórmula (22.14)).

§ 25. Energía de la deformación elástica

No sólo un sistema de cuerpos en interacción puede poseer energía potencial, sino que también un cuerpo aislado que sufre deformación elástica (por ejemplo, un resorte comprimido, una barra estirada, etc.). En tal caso, la energía potencial depende de la disposición mutua de partes por separado del cuerpo (por ejemplo, de la distancia entre las espiras vecinas del resorte).

De acuerdo con la fórmula (20.2) tanto al estirar, como al comprimir el resorte en una magnitud x, hay que consumir un trabajo $A = {}^1/_2kx^2$. Este trabajo está dirigido al aumento de la energía potencial del resorte. Por consiguiente, la dependencia entre la energía

potencial del resorte y el alargamiento x tiene la forma

$$U=\frac{kx^2}{2}, \qquad (25.1)$$

donde k es el factor de rigidez del resorte (véase el § 14). La fórmula (25.1) está escrita partiendo de la suposición de que la energía potencial de un resorte no deformado es igual a cero. En la fig. 25.1 se muestra la gráfica de la dependencia entre U y x.

Fig. 25.1

Durante la deformación longitudinal elástica de una barra se realiza trabajo, que se determina por la fórmula (20.3). De acuerdo con esto, la energía potencial de una barra que sufre deformación elástica

$$U=\frac{E\varepsilon^2}{2}V. \qquad (25.2)$$

Aquí E es el módulo de Young, ε, el alargamiento relativo, V, el volumen de la barra.

Introduzcamos en nuestras consideraciones la densidad de la energía de la deformación elástica u, que vamos a determinar como la razón entre la energía dU y aquel volumen dV que contiene ésta:

$$u=\frac{dU}{dV}. \qquad (25.3)$$

Como suponemos que la barra es homogénea y la deformación uniforme, es decir, igual en todos los puntos de la barra, la energía (25.2) también estará distribuida por ésta de modo uniforme. Por esta causa, se puede considerar que

$$u=\frac{U}{V}=\frac{E\varepsilon^2}{2}. \qquad (25.4)$$

Esta expresión nos ofrece la densidad de la energía de la deformación elástica durante el alargamiento (o la compresión) en el caso, cuando la deformación no es uniforme. En el último caso, para hallar la densidad de la energía en cierto punto de la barra, hay que poner en (25.4) el valor de ε en el punto dado.

Partiendo de las fórmulas (14.8) — (14.10) es fácil obtener que la densidad de la energía de la deformación elástica durante la cizalladura es igual a

$$u=\frac{G\gamma^2}{2}, \qquad (25.5)$$

donde G es el módulo de cizalladura, γ, la cizalladura relativa.

§ 26. Condiciones de equilibrio de un sistema mecánico

Examinemos un punto material, cuyo movimiento está limitado de forma que tiene sólo un grado de libertad [1]). Esto quiere decir, que su posición puede ser determinada mediante una magnitud, por ejemplo, por la coordenada x. Podemos aducir como ejemplo una bola que se desliza sin rozamiento por un alambre curvado en el plano vertical, fijado rígidamente (fig. 26.1, *a*). Otro ejemplo puede

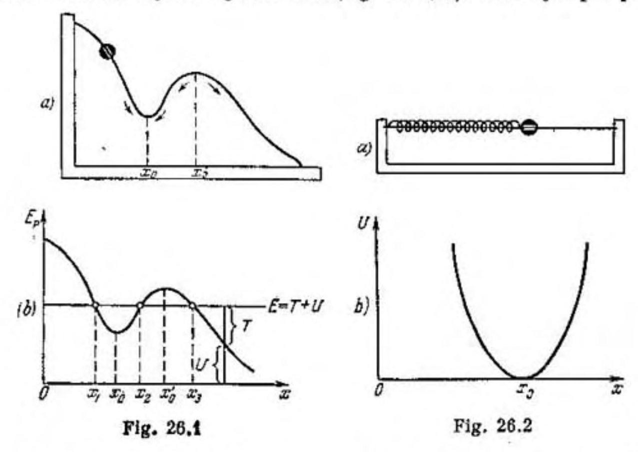


Fig. 26.1

Fig. 26.2

ser una bola sujeta en el extremo de un resorte que sin rozamiento se desliza por una guía horizontal (fig. 26.2, *a*). Sobre la bola actúa una fuerza conservativa: en el primer caso ésta es la fuerza de gravedad, en el segundo, la fuerza elástica del resorte deformado. Las gráficas de la energía potencial $U(x)$ están representadas en las figs. 26.1, *b* y 26.2, *b*.

Como las bolas se mueven por el alambre sin rozamiento, la fuerza con que el alambre actúa sobre la bola es en los dos casos perpendicular a la velocidad de aquélla, es decir, no realiza trabajo sobre la bola. Por esta razón, la energía se conserva:

$$E = T + U = \text{const.} \tag{26.1}$$

De (26.1) se desprende que la energía cinética puede aumentar sólo a cuenta de la disminución de la energía potencial. Por lo tanto, si el estado de la bola es tal que su velocidad es nula, mientras que la

[1]) Recibe el nombre de número de grados de libertad de un sistema mecánico, la cantidad de magnitudes independientes, con ayuda de las cuales podemos prefijar la posición del sistema. Con mayor detalle esto será tratado en el § 97.

energía potencial tiene su valor mínimo, la bola no puede ponerse en movimiento sin influjo del exterior, es decir, se encuentra en equilibrio.

En la gráfica, el mínimo de U corresponde a los valores de x iguales a x_0 (en la fig. 26.2 x_0 es la longitud del resorte no deformado). La condición que corresponde al mínimo de energía potencial tiene el aspecto

$$\frac{dU}{dx}=0. \qquad (26.2)$$

De acuerdo con (22.4) la condición (26.2) es equivalente a que

$$F_x = 0 \qquad (26.3)$$

(cuando U sólo es función de una variable, $\partial U/\partial x = dU/dx$). De este modo, la posición que corresponde al mínimo de energía potencial tiene la propiedad de que la fuerza que actúa sobre el cuerpo es nula.

En el caso representado en la fig. 26.1, las condiciones (26.2) y (26.3) también se cumplen para x igual a x_0' (es decir, para el máximo de U). La posición de la bola determinada por dicho valor de x es asimismo de equilibrio. Sin embargo, éste, a diferencia del equilibrio con $x = x_0$ será inestable: es suficiente sacar la bola ligeramente de esta posición y surge una fuerza que alejará ésta de la posición x_0'. Las fuerzas que aparecen al desplazarse la bola de la posición de equilibrio estable (para la cual $x = x_0$), están dirigidas de tal forma que tienden a retornar la bola a la posición de equilibrio.

Conociendo el tipo de la función con la que se expresa la energía potencial, puede hacerse una serie de conclusiones acerca del carácter del movimiento de la partícula. Aclaremos esto, haciendo uso de la gráfica representada en la fig. 26.1, *b*. Si la energía total tiene el valor indicado en la figura, la partícula puede moverse o en los límites desde x_1 hasta x_2, o bien en los márgenes desde x_3 hasta el infinito. En las regiones $x < x_1$ y $x_2 < x < x_3$ la partícula no puede penetrar, ya que la energía potencial no es posible que sea mayor que la energía total (si esto sucediera, la energía cinética sería negativa). De este modo, la región $x_2 < x < x_3$ es una *barrera de potencial* a través de la cual la partícula no puede pasar con la reserva de energía total que posee. La región $x_1 < x < x_2$ recibe el nombre de *pozo de potencial*.

Si durante su movimiento la partícula no puede alejarse hasta el infinito, semejante movimiento denomínase *finito*. Si la partícula puede alejarse a una distancia cuan se quiera grande, el movimiento se llama *infinito*. En el pozo de potencial la partícula realiza movimiento finito. También será finito el movimiento de una partícula con energía total negativa en el campo central de las fuerzas de atracción (se supone que en el infinito la energía potencial se reduce a cero).

§ 27. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

En los parágrafos anteriores fue examinada la integral aditiva de movimiento, denominada energía. Hallemos una magnitud aditiva más que se conserva para un sistema cerrado. Con este fin, consideremos un sistema de N partículas que entre sí ejercen acción mutua. Supongamos que además de las fuerzas internas $\mathbf{F}_{ik}$, sobre la i-ésima partícula actúan fuerzas externas, cuya resultante es igual a $\mathbf{F}_i$. Escribamos la ecuación (9.1) para todas las N partículas:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1k} + \ldots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_1 = \sum_{k=2}^{N} \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_1,$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \mathbf{F}_{2k} + \ldots + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_2 = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq 2)}}^{N} \mathbf{F}_{2k} + \mathbf{F}_2,$$

. . . .

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \ldots + \mathbf{F}_{ik} + \ldots + \mathbf{F}_{iN} + \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i,$$

. . . .

$$\dot{\mathbf{p}}_N = \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \ldots + \mathbf{F}_{Nk} + \ldots + \mathbf{F}_{N,\,N-1} + \mathbf{F}_N = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{F}_{Nk} + \mathbf{F}_N.$$

Sumemos todas estas N ecuaciones. Como $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$, etc., a la derecha sólo quedan las fuerzas externas. De este modo, llegamos a la correlación

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \qquad (27.1)$$

La suma de las cantidades de movimiento que forman el sistema mecánico, recibe el nombre de *cantidad de movimiento del sistema*. Designando la cantidad de movimiento con el símbolo $\mathbf{p}$, obtenemos

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i. \qquad (27.2)$$

De (27.2) se desprende que la cantidad de movimiento es una magnitud aditiva.

Escribamos la correlación (27.1) en la forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \qquad (27.3)$$

De aquí sigue que al no haber fuerzas externas $d\mathbf{p}/dt = 0$. Por consiguiente, para un sistema cerrado $\mathbf{p}$ es constante. Esta afirmación es el contenido del *principio de conservación de la cantidad de movimiento*, que se enuncia del modo siguiente: *la cantidad de movimiento de un sistema cerrado de puntos materiales siempre es constante.*

Señalemos que la cantidad de movimiente también queda constante para un sistema no cerrado a condición de que la suma de las fuerzas externas es igual a cero (véase (27.3)). Cuando dicha suma no es nula, pero la proyección sobre dirección es igual a cero, se conserva la resultante de la cantidad de movimiento sobre dicha dirección. En efecto, al proyectar todas las magnitudes de la ecuación (27.3) sobre cierta dirección x, obtendremos

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}, \qquad (27.4)$$

de donde se desprende la afirmación que hemos aducido. (Recordemos que $(d\mathbf{p}/dt)_{\mathrm{pr}.x} = dp_x/dt$, véase la fórmula (2.40).)

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas puede ser representado en forma del producto de la masa sumaria de las partículas por la velocidad del centro de masas del sistema:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C. \qquad (27.5)$$

Recibe el nombre de *centro de masas* (o *centro de inercia*) del sistema el punto C, cuya posición se prefija por el radio vector $\mathbf{r}_C$ determinado del modo siguiente:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{m}. \qquad (27.6)$$

Aquí m_i es la masa de la i-ésima partícula, $\mathbf{r}_i$, el radio vector que determina la posición de dicha partícula, m, la masa del sistema.

Las coordenadas cartesianas del centro de masas son iguales a las proyecciones de $\mathbf{r}_C$ sobre los ejes de coordenadas:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \qquad (27.7)$$

Cabe indicar que en el campo homogéneo de las fuerzas de gravedad, el centro de masas coincide con el de gravedad del sistema.

La velocidad del centro de masas se obtiene derivando el radio vector (27.6) por el tiempo:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum m_i\dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i\mathbf{v}_i}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

(véase (27.2)). De aquí se desprende la fórmula (27.5).

Para un sistema cerrado $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$ = const. Por lo tanto, el centro de masas de un sistema cerrado o está en movimiento rectilíneo uniforme, o bien está inmóvil.

El sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo, recibe el nombre de *sistema del centro de masas* o *sistema C*. Está claro que dicho sistema es inercial.

El sistema de referencia relacionado con los instrumentos de medida, denomínase *de laboratorio* o *sistema l*.

§ 28. Choque de dos cuerpos

Cuando dos cuerpos chocan éstos se deforman. En tal caso, la energía cinética que antes del choque poseían los cuerpos, parcial o totalmente se transforma en la energía potencial de la deformación elástica, así como también en la llamada energía interna de los cuerpos. El aumento de esta última se acompaña por el crecimiento de la temperatura de ellos.

Hay dos tipos límites de choques: perfectamente elástico y perfectamente inelástico. Recibe el nombre de perfectamente elástico un choque con el que la energía mecánica de los cuerpos se convierte en otros tipos no mecánicos de energía. Durante semejante choque, la energía cinética se transforma parcial o totalmente en la energía potencial de la deformación elástica. A continuación, los cuerpos retornan a su forma inicial, repeliéndose. Como resultado, la energía potencial de la deformación elástica de nuevo se transforma en energía cinética y los cuerpos se separan a velocidades, cuya magnitud y dirección se determinan por dos condiciones: la conservación de la energía total y la conservación de la cantidad total de movimiento del sistema de cuerpos.

El choque perfectamente inelástico se caracteriza por el hecho de que no surge la energía potencial de deformación; la energía cinética de los cuerpos, parcial o totalmente se transforma en energía interior; después de que los cuerpos chocan, éstos o se mueven a igual velocidad, o bien quedan en reposo. Durante el choque perfectamente inelástico sólo se cumple el principio de conservación de la cantidad de movimiento. En lo que se refiere al principio de conservación de la energía mecánica, éste no se cumple: tiene lugar el principio de conservación de la energía sumaria de diversos tipos, es decir, mecánica e interna.

Para empezar, examinemos el choque perfectamente inelástico de dos partículas (puntos materiales) que forman un sistema cerrado. Sean las masas de las partículas igual a m_1 y m_2 y sus velocidades antes del choque $\mathbf{v}_{10}$ y $\mathbf{v}_{20}$. Como sigue del principio de conservación, la cantidad sumaria de movimiento de las partículas después

del choque debe ser igual que antes de éste:

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v} \qquad (28.1)$$

($\mathbf{v}$ es igual a la velocidad después del choque, idéntica para las dos partículas). De (28.1) se desprende que

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \qquad (28.2)$$

Para los cálculos prácticos, la correlación (28.2) debe ser proyectada sobre las direcciones elegidas correspondientemente.

Ahora examinemos un choque perfectamente elástico, con la particularidad de que nos vamos a limitar al caso del choque central de dos esferas homogéneas. Se denomina central, un choque durante el que las esferas se mueven antes del choque a lo largo de una recta que pasa por sus centros. Al producirse el choque central, la colisión puede transcurrir: 1) si las esferas se mueven al encuentro una de la otra (fig. 28.1, *a*) y 2) si una de las esferas alcanza a la otra (fig. 28.1, *b*).

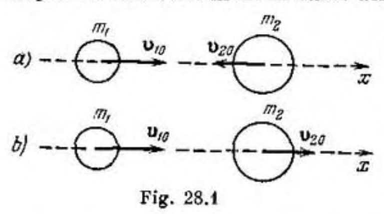


Fig. 28.1

Vamos a suponer que las esferas forman un sistema cerrado o bien que las fuerzas externas aplicadas a ellas se equilibran entre sí. Además, consideraremos que las esferas no giran.

Designemos las masas de las esferas por m_1 y m_2, sus velocidades antes del choque por $\mathbf{v}_{10}$ y $\mathbf{v}_{20}$ y, por fin, las velocidades de las esferas después de choque, por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Escribamos las ecuaciones de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \qquad (28.3)$$

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2. \qquad (28.4)$$

Teniendo en cuenta que $(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, demos a (28.3) la forma

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20})(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}). \qquad (28.5)$$

Transformamos la correlación (28.4) del modo siguiente:

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \qquad (28.6)$$

Partiendo de consideraciones de simetría, es posible afirmar que después del choque las velocidades de las esferas estarán dirigidas a lo largo de la misma recta por la que se desplazaban los centros de las esferas antes del choque. Por lo tanto, todos los vectores en (28.5) y (28.6) son colineares. Para semejantes vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, de $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$ se

deduce que **b** = **c**. Por esta razón, comparando (28.5) y (28.6) podemos llegar a la conclusión de que

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \qquad (28.7)$$

Multiplicando (28.7) por m_2 y sustrayendo el resultado de (28.6) y a continuación, multiplicando (28.7) por m_1 y sumando el resultado con (28.6), obtenemos las velocidades de las esferas después del choque:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2m_2\mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{2m_1\mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \qquad (28.8)$$

Para los cálculos numéricos hay que proyectar las correlaciones (28.8) sobre el eje x, a lo largo del cual las esferas se mueven (véase la fig. 28.1).

Señalemos, que las velocidades de las esferas no pueden ser iguales después de un choque perfectamente elástico. En efecto, igualando las expresiones (28.8) para $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y realizando transformaciones, vemos que

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Por consiguiente, para que las velocidades de las esferas después del choque resulten ser iguales es preciso que éstas también sean iguales antes del choque, pero en semejante caso el choque no puede producirse. De aquí se desprende que la igualdad de las velocidades de las esferas después del choque es incompatible con el principio de conservación de la energía. Así, pues, durante el choque inelástico la energía mecánica no se conserva, es decir, parcialmente se transforma en la energía interna de los cuerpos que chocan, lo que provoca su calentamiento.

Examinemos el caso cuando las masas de las esferas que chocan son iguales: $m_1 = m_2$. De (28.8) sigue que, en tal caso,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{20}, \ \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{10},$$

o sea, que durante la colisión, las esferas intercambian sus velocidades. En particular, si una de las esferas de igual masa, por ejemplo, la segunda, antes del choque estaba en reposo, después de éste se moverá a la misma velocidad que al principio tenía la primera esfera, en lo que atañe a ésta, después del choque quedará inmóvil.

Mediante las fórmulas (28.8) podemos definir la velocidad de la esfera después del choque contra una pared inmóvil o en movimiento (que puede ser considerada como una esfera de masa m_2 y radio infinitamente grandes). Dividiendo el numerador y el denominador de las expresiones (28.8) por m_2 y despreciando los términos que contienen el factor m_1/m_2, tenemos:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10}, \ \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{20}.$$

Como se desprende del resultado que hemos obtenido, la velocidad de la pared queda invariable. Si la pared está inmóvil ($\mathbf{v}_{20} = 0$), la esfera cambia su dirección por la opuesta; cuando la pared se mueve, varía también el valor de la velocidad de la esfera (aumenta en $2v_{20}$ si la pared se desplaza al encuentro de la esfera y disminuye en $2v_{20}$, si la pared se «aleja» de la esfera que la alcanza).

§ 29. Principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento

Ya conocemos dos magnitudes que se conservan: la energía y la cantidad de movimiento. Ahora vamos a hallar la tercera magnitud de este tipo. Con este fin, analicemos un sistema que consta de dos partículas en interacción, sobre las que también actúan fuerzas externas (fig. 29.1). Las ecuaciones de movimiento de las partículas tienen la forma

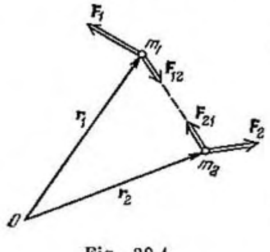


Fig. 29.1

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1,\ m_2\dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2.$$

Partiendo de la izquierda, multipliquemos de forma vectorial la primera ecuación por el radio vector de la primera partícula $\mathbf{r}_1$, mientras que la segunda ecuación, por el radio vector de la segunda partícula $\mathbf{r}_2$:

$$\begin{aligned} m_1[\mathbf{r}_1,\ \dot{\mathbf{v}}_1] &= [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_1], \\ m_2[\mathbf{r}_2,\ \dot{\mathbf{v}}_2] &= [\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_{21}] + [\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_2]. \end{aligned} \tag{29.1}$$

El producto vectorial de la forma $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$ es equivalente a la expresión $d/dt\,[\mathbf{rv}]$. En efecto, de acuerdo con la fórmula (2.55)

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rv}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}], \tag{29.2}$$

ya que $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{vv}] = 0$. Realizando semejante sustitución en las fórmulas (29.1) y teniendo en cuenta que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_1\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_1] &= [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_1], \\ m_2\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{v}_2] &= -[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_2]. \end{aligned} \tag{29.3}$$

La masa es una magnitud escalar constante. Por lo tanto, ella puede ser introducida bajo el signo de la derivada por el tiempo y en

el producto vectorial:

$$m\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{v}]=\frac{d}{dt}[\mathbf{r},\ m\mathbf{v}]=\frac{d}{dt}[\mathbf{r},\ \mathbf{p}].$$

Tomando lo dicho en consideración, sumemos las ecuaciones (29.3). Como resultado obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\{[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{p}_1]+[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{p}_2]\}=[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),\ \mathbf{F}_{12}]+[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_1]+[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_2].$$

Los vectores $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{F}_{12}$ son colineares: por este motivo su producto vectorial es nulo. De tal forma, llegamos a la correlación

$$\frac{d}{dt}\{[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{p}_1]+[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{p}_2]\}=[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{F}_1]+[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{F}_2]. \qquad (29.4)$$

Si el sistema es cerrado, el segundo miembro de la anterior igualdad es cero y, por consiguiente,

$$[\mathbf{r}_1,\ \mathbf{p}_1]+[\mathbf{r}_2,\ \mathbf{p}_2]=\text{const.}$$

Hemos hallado una magnitud aditiva que se conserva, llamada *momento de la cantidad de movimiento* respecto del punto O (véase la fig. 29.1).

Para una partícula aislada, el *momento de la cantidad de movimiento con relación al punto O* recibe el nombre de seudovector

$$\mathbf{M}=[\mathbf{r},\ \mathbf{p}]=[\mathbf{r},\ m\mathbf{v}]. \qquad (29.5)$$

Se llama momento de la cantidad de movimiento de un sistema con relación al punto O la suma vectorial de los momentos de las cantidades de movimiento de las partículas que componen el sistema:

$$\mathbf{M}=\sum_i \mathbf{M}_i=\sum_i [\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i]. \qquad (29.6)$$

La proyección del vector (29.5) sobre cierto eje z denomínase *momento de la cantidad de movimiento de la partícula respecto de dicho eje*

$$M_z=[\mathbf{r}\mathbf{p}]_{\text{pr. } z}. \qquad (29.7)$$

De manera análoga, llamamos *momento de la cantidad de movimiento de un sistema con relación al eje x*, la magnitud escalar

$$M_z=\sum_i [\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i]_{\text{pr. } z}. \qquad (29.8)$$

De la fig. 29.2 se desprende que el módulo del vector del momento de la cantidad de movimiento de una partícula, es igual a

$$M=rp\ \text{sen}\ \alpha=lp, \qquad (29.9)$$

donde $l = r\ \text{sen}\ \alpha$ es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto O a la recta, a lo largo de la cual está dirigida la cantidad

de movimiento de la partícula. Dicha longitud recibe el nombre de *brazo de la cantidad de movimiento respecto del punto O*. La fig. 29.2 se ha confeccionado suponiendo que el punto O, con relación al cual se toma el momento de cantidad de movimiento y el vector **p**, yacen en el plano de la figura. El vector **M** es perpendicular a dicho plano y se aleja de nosotros.

Consideremos dos ejemplos característicos.

1. Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la recta representada en la fig. 29.2 con una línea de trazos. En tal caso, el

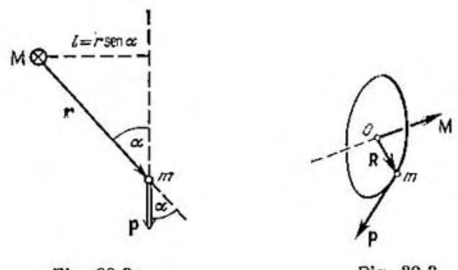


Fig. 29.2 Fig. 29.3

momento de la cantidad de movimiento de la partícula sólo variará en magnitud. El módulo del momento

$$M = mvl, \tag{29.10}$$

quedando el brazo l invariable.

2. La partícula de masa m se mueve por una circunferencia de radio R (fig. 29.3). El módulo del momento de la cantidad de movimiento de la partícula respecto del centro de la circunferencia O es igual a

$$M = mvR. \tag{29.11}$$

El vector **M** es perpendicular al plano de la circunferencia, con la particularidad de que la dirección de movimiento de la partícula y el vector **M** forman un sistema dextrógiro. Como el brazo igual a R es constante, el momento de la cantidad de movimiento sólo puede cambiar a cuenta de la variación del módulo de la velocidad. Durante el movimiento uniforme de la partícula por la circunferencia, el momento de cantidad de movimiento queda constante en magnitud y dirección.

El seudovector

$$\mathbf{N} = [\mathbf{rF}] \tag{29.12}$$

denomínase *momento de la fuerza* **F** *respecto del punto O*, desde el cual se traza el radio vector del punto de aplicación de la fuerza (fig. 29.4).

En la figura vemos que el módulo del momento de fuerza puede ser representado en la forma

$$N = rF \operatorname{sen} \alpha = lF, \tag{29.13}$$

donde $l = r \operatorname{sen} \alpha$ es el *brazo de la fuerza con relación al punto O* (es decir, la longitud de la perpendicular trazada desde el punto O a la recta, a lo largo de la cual la fuerza actúa).

La proyección del vector **N** sobre cierto eje z, que pasa por el punto O respecto del que se determinó **N**, recibe el nombre de *momento de fuerza en lo que atañe* a dicho eje:

$$N_z = [\mathbf{rF}]_{\mathrm{pr.}\,z}. \tag{29.14}$$

Descompongamos el vector de la fuerza **F** (fig. 29.5) en tres componentes perpendiculares entre sí: $\mathbf{F}_{\parallel}$, paralela al eje z, $\mathbf{F}_R$, perpendicular al eje z y que actúa a lo largo de una recta que pasa por el eje y,

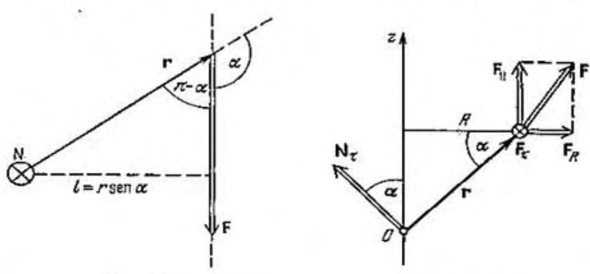


Fig. 29.4 Fig. 29.5

por fin, $\mathbf{F}_\tau$, perpendicular al plano que pasa por el eje y el punto de aplicación de la fuerza (esta componente está designada en la figura con un círculo y una cruz). Si nos imaginamos una circunferencia de radio R, cuyo centro yace en el eje z, la componente $\mathbf{F}_\tau$ estará dirigida por la tangente a dicha circunferencia. El momento de la fuerza F respecto del punto O es igual a la suma de las componentes: $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\parallel} + \mathbf{N}_R + \mathbf{N}_\tau$. Los vectores $\mathbf{N}_{\parallel}$ y $\mathbf{N}_R$ son perpendiculares al eje z, por lo que sus proyecciones sobre dicho eje son nulas. El módulo del momento $\mathbf{N}_\tau$ es igual a rF_τ y forma con el eje z el ángulo α, cuyo coseno es igual a R/r. Por consiguiente, el momento de la componente $\mathbf{F}_\tau$ con relación al eje z alcanza una magnitud $N_\tau \cos \alpha = RF_\tau$. Así, pues, el momento de la fuerza **F** acerca del eje z es igual a

$$N_z = RF_\tau. \tag{29.15}$$

Hasta el momento por F_τ entendíamos el módulo de la componente $\mathbf{F}_\tau$. Sin embargo, F_τ puede ser considerada como la proyección del

vector **F** sobre el versor **τ**, tangente a la circunferencia de radio R y dirigido de modo que el movimiento por la circunferencia en la dirección **τ**, forme con la dirección del eje z un sistema dextrógiro. Con semejante interpretación de F_τ, la formula (29.15) determinará también el signo de N_z.

El momento de la fuerza **N** caracteriza la capacidad de la fuerza de hacer girar el cuerpo alrededor del punto respecto del cual se toma. Hay que señalar, que cuando un cuerpo puede girar en torno del punto O al azar, bajo la acción de la fuerza el cuerpo girará cerca de

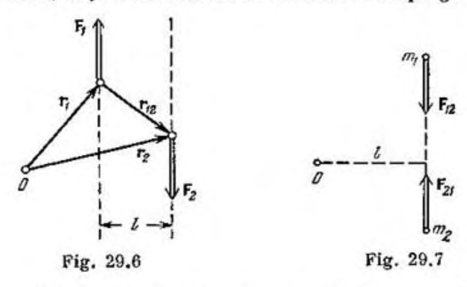


Fig. 29.6

Fig. 29.7

un eje perpendicular al plano donde yacen la fuerza y el punto O, es decir, alrededor de un eje que coincide con la dirección del momento de fuerza respecto del punto dado.

El momento de fuerza con relación al eje z caracteriza la capacidad de la fuerza de hacer girar el cuerpo alrededor de dicho eje. Las componentes $\mathbf{F}_{\parallel}$ y $\mathbf{F}_R$ no pueden provocar la rotación del cuerpo en torno del eje z. Semejante rotación sólo puede ser originada por la componente $\mathbf{F}_\tau$, con la particularidad de que mientras mayor sea el brazo R, dicha componente realizará el giro con mayor facilidad.

Dos fuerzas iguales en magnitud y de direcciones opuestas, que no actúan a lo largo de una misma recta, reciben el nombre de *par de fuerza* (fig. 29.6). La distancia l entre las rectas, a lo largo de las que actúan las fuerzas, denomínase *brazo del par*. El momento sumario del par de fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2].$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, podemos escribir:

$$\mathbf{N} = -[\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_2] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2] = [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \mathbf{F}_2] = [\mathbf{r}_{12}, \mathbf{F}_2], \quad (29.16)$$

donde $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es un vector trazado desde el punto de aplicación de la fuerza $\mathbf{F}_1$ al punto de aplicación de la fuerza $\mathbf{F}_2$. La expresión (29.16) no depende de la elección del punto O. Por lo tanto, el momento de un par de fuerzas respecto de cualquier punto siempre será el mismo. El vector del momento del par de fuerzas es perpendi-

cular al plano en el que yacen las fuerzas (véase la fig. 29.6) y es numéricamente igual al producto del módulo de cualquiera de las fuerzas por el brazo.

Ejerciendo acción entre las partículas, las fuerzas actúan en sentidos opuestos a lo largo de una misma línea (fig. 29.7). Sus momentos respecto del punto O, tomado al azar, son iguales en magnitud y de direcciones opuestas. Por este motivo, los momentos de las fuerzas internas se equilibran a pares para cualquier sistema de partículas, en particular para un sólido la suma de los momentos de todas las fuerzas internas siempre es nula:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{int}} = 0. \tag{29.17}$$

De acuerdo con las definiciones (29.6) y (29.12), la ecuación (29.4) puede ser escrita del modo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}}. \tag{29.18}$$

Esta fórmula parece a la (27.3). De la comparación de estas fórmulas se desprende que de modo semejante a cómo la derivada por el tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la suma de las fuerzas externas, la derivada por el tiempo del momento de la cantidad de movimiento es igual a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores.

De (29.18) sigue que cuando no hay fuerzas externas $d\mathbf{M}/dt = 0$. Por lo tanto, para un sistema cerrado **M** es constante. Esta afirmación constituye el contenido del *principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento*, que se enuncia de la forma siguiente: *el momento de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado de puntos materiales siempre es constante.*

Para un sistema de dos partículas hemos mostrado la correlación (29.18). Pero es fácil generalizarla para un sistema de cualquier número de partículas. Escribamos las ecuaciones de movimiento de las partículas:

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1 = \sum_k \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{F}_1,$$

$$\dots\quad\dots$$

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_N\dot{\mathbf{v}}_N = \sum_k \mathbf{F}_{Nk} + \mathbf{F}_N.$$

Después de multiplicar cada una de las ecuaciones por el respectivo radio vector, obtenemos (véase (29.2)):

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] = \sum_k [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_{1k}] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \sum_k [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N] = \sum_k [\mathbf{r}_N, \mathbf{F}_{Nk}] + [\mathbf{r}_N, \mathbf{F}_N].$$

Sumemos todas las N ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{M}_i = \sum_{\substack{i,\,k \\ (i\neq k)}} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}] + \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i].$$

La primera suma en el segundo miembro es la suma de los momentos de todas las fuerzas internas que, como mostramos, es nula (véase (29.17)). La segunda suma en ese mismo miembro es la suma de las fuerzas externas. Por lo tanto, hemos vuelto a la fórmula (29.18).

Indiquemos, que el momento de la cantidad de movimiento queda también constante para un sistema no cerrado, a condición de que el momento sumario de las fuerzas externas sea cero (véase (29.18)).

Proyectando todas las magnitudes que entran en la ecuación (29.18) sobre cierta dirección z, obtenemos la correlación:

$$\frac{d}{dt}M_z = \sum N_{z\,\text{ext}}, \tag{29.19}$$

de acuerdo con la cual, la derivada por el tiempo del momento de la cantidad de movimiento del sistema respecto del eje z es igual a la suma de los momentos de las fuerzas externas con relación a dicho eje.

De (29.19) se deduce que cuando la suma de los momentos de las fuerzas externas acerca de cierto eje es igual a cero, el momento de cantidad de movimiento respecto de ese eje queda constante.

§ 30. Movimiento en un campo central de fuerzas

Consideremos una partícula que se encuentra en un campo central de fuerzas. No debemos olvidar, que la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto de semejante campo, pasa por el punto O, o sea, por el centro del campo, mientras que la magnitud de la fuerza sólo es función de la distancia hasta dicho centro. Es fácil comprender, que la dependencia entre la fuerza $\mathbf{F}$

y r tiene el aspecto:

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{e}_r, \tag{30.1}$$

donde $\mathbf{e}_r$ es el versor del radio vector (fig. 30.1), mientras que $f(r)$ es la proyección del vector de la fuerza sobre la dirección del radio vector, es decir, F_r. Para la fuerza de repulsión la función $f(r)$ es positiva, para la de atracción, negativa. La fig. 30.1 se ha confeccionado para el caso cuando la partícula se repulsa del centro de la fuerza. Está claro, que la fórmula (30.1) sólo es justa si el origen de coordenadas (es decir, el punto desde donde se trazan los radios vectores) yace en el centro del campo.

El momento de fuerza (30.1) respecto del punto O es evidentemente igual a cero. Por esto, de acuerdo con (29.18) se desprende que el

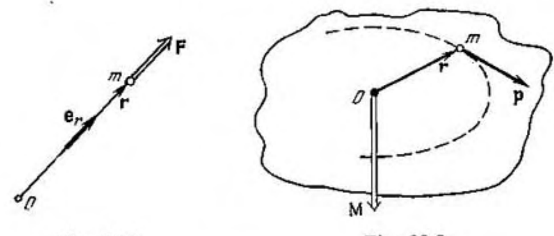


Fig. 30.1 Fig. 30.2

momento de la cantidad de movimiento de una partícula, que se desplaza por un campo central de fuerzas, queda constante. En cada momento de tiempo, el vector $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ es perpendicular al plano formado por los vectores r y p (fig. 30.2). Cuando $\mathbf{M} = \text{const}$, dicho plano estará fijado. Esto quiere decir, que cuando la partícula se mueve por un campo central de fuerzas, su radio vector constantemente se encuentra en un mismo plano, en el que el vector p también yace todo el tiempo. Por lo tanto, la trayectoria de la partícula es una curva plana. El plano, en el que se encuentra la trayectoria, pasa por el centro del campo (véase la fig. 30.2).

En la fig. 30.3 está representado un sector de la trayectoria de la partícula (el vector M se dirige hacia la figura). Durante el tiempo dt el radio vector de la partícula describe el área sombreada dS. Este área es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores r y v dt. Esta última área es igual al módulo del producto vectorial $[\mathbf{r}, \mathbf{v}\,dt]$ (véase el texto que sigue a la fórmula (2.28)). Así, pues, el área del triángulo sombreado

$$dS = \frac{1}{2}\,|\,[\mathbf{rv}]\,|\,dt = \frac{1}{2m}\,|\,[\mathbf{rp}]\,|\,dt = \frac{1}{2m}M\,dt$$

(hemos sacado el factor escalar dt fuera del signo del producto vectorial). Después de dividir por dt los dos miembros de la correlación obtenida, tenemos

$$\frac{dS}{dt}=\frac{M}{2m}. \tag{30.2}$$

La magnitud dS/dt, o sea, el área que describe el radio vector de la partícula por la unidad de tiempo, recibe el nombre de *velocidad areolar*. En el campo central de fuerzas M = const, por lo que dicha velocidad también será constante.

Hallemos en coordenadas polares r y φ (fig. 30.4) la expresión para el momento de la cantidad de movimiento de la partícula. En

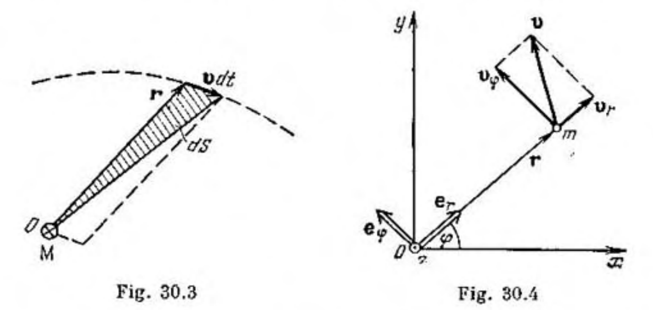


Fig. 30.3

Fig. 30.4

correspondencia con las fórmulas (3.12)—(3.15), el vector de velocidad de la partícula puede ser representado en la forma

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_r+\mathbf{v}_\varphi=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{30.3}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula para $\mathbf{M}$, tendremos:

$$\mathbf{M}=m\,[\mathbf{rv}]=m\,[\mathbf{rv}_r]+m\,[\mathbf{rv}_\varphi].$$

Ya que los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}_r$ son colineares, el primer sumando es nulo. Por lo tanto,

$$\mathbf{M}=m\,[\mathbf{rv}_\varphi]=m\,[\mathbf{r},\ r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi]=mr\dot{\varphi}\,[\mathbf{r},\ \mathbf{e}_\varphi].$$

El producto vectorial $[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\varphi]$ es igual a $r\mathbf{e}_z$, donde $\mathbf{e}_z$ es el versor del eje z (en la fig. 30.4 este versor está dirigido hacia el lector). De este modo,

$$\mathbf{M}=mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z. \tag{30.4}$$

De aquí llegamos a la conclusión de que

$$M_z=mr^2\dot{\varphi}, \tag{30.5}$$

donde M_z es la proyección del momento de la cantidad de movimiento sobre el eje z. El módulo de dicho momento es igual al módulo de la expresión (30.5).

Ahora dirijámonos a la energía de la partícula. Las fuerzas centrales son conservativas (véase el § 21). De acuerdo con (22.1) el trabajo de una fuerza conservativa es igual al decrecimiento de la energía potencial U de la partícula. Por esta causa, para la fuerza (30.1) se realiza la correlación $dA = -dU$, o sea

$$dU = -dA = -f(r)\,\mathbf{e}_r\,d\mathbf{r} = -f(r)\,dr.$$

Después de integrar esta correlación, tendremos

$$U = -\int f(r)\,dr, \tag{30.6}$$

de donde sigue que la energía potencial de una partícula ubicada en el campo de fuerzas centrales, sólo depende de la distancia hasta el centro r: $U = U(r)$.

Particular interés tienen las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia desde el centro de fuerzas. Para ellas, en la fórmula (30.1) la función $f(r)$ tiene el aspecto

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \tag{30.7}$$

donde α es una magnitud constante ($\alpha > 0$ corresponde a la repulsión desde el centro, $\alpha < 0$, a la atracción hacia el centro). Entre semejantes fuerzas podemos enumerar las de gravitación y las coulombianas.

La sustitución de la función (30.7) en la expresión (30.6), nos proporciona:

$$U = -\alpha \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + C,$$

donde C es la constante de integración. Por regla, se acuerda considerar nula la energía potencial en el infinito (es decir, $r = \infty$). En tal caso $C = 0$, de forma que

$$U = \frac{\alpha}{r}. \tag{30.8}$$

Así, pues, la energía mecánica total de una partícula en movimiento por el campo de fuerzas centrales, que son razón inversa del cuadrado de la distancia, se determina por la expresión

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \tag{30.9}$$

En correspondencia con (30.3), sustituyendo el cuadrado de la velocidad $\mathbf{v}$ por la suma de los cuadrados de las velocidades $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}_\varphi$, es

decir, poniendo en lugar de v^2 la expresión $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, tendremos

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{30.10}$$

En el campo central la energía y el momento de la cantidad de movimiento de una partícula se conservan. Por consiguiente, los primeros miembros de las fórmulas (30.5) y (30.10) representan de por sí constantes. Así, pues, llegamos al sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{gathered} mr^2\dot{\varphi} = M_z = \text{const}, \\ m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha}{r} = 2E = \text{const}. \end{gathered} \tag{30.11}$$

Integrando estas ecuaciones, podemos hallar r y φ como funciones de t, es decir, la trayectoria y el carácter del movimiento de la partícula.

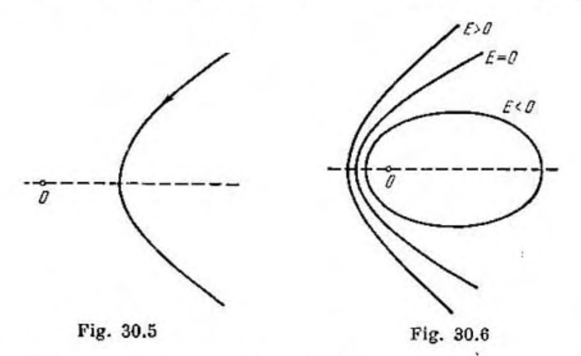


Fig. 30.5 Fig. 30.6

Cabe señalar, que en las ecuaciones (30.11) entran las primeras derivadas de r y φ con relación al tiempo. Por esta razón, se resuelven con mucha mayor facilidad que las ecuaciones desprendidas de las leyes de Newton, que contienen las segundas derivadas de las coordenadas.

La solución del sistema (30.11) sale de los márgenes del presente libro. Nos vamos a limitar a aducir el resultado final. La trayectoria de la partícula es una sección cónica, o sea, una elipse, una parábola o una hipérbola. Cuál de estas curvas se observa en el caso concreto, depende del signo de la constante α y de la magnitud de la energía total de la partícula.

Durante la repulsión (es decir, para $\alpha > 0$) la trayectoria de la partícula sólo puede ser una hipérbola (fig. 30.5). Si $M_z = 0$, esta

última degenera convirtiéndose en una recta, cuya continuación pasa por el centro de fuerzas. Indiquemos que para $\alpha > 0$ la energía total (30.9) nunca será negativa.

Al haber atracción (o sea, para $\alpha < 0$) la energía total puede tener valores tanto positivos, como negativos; en particular es posible que sea cero. Con $E > 0$ la trayectoria es una hipérbola (fig. 30.6). Para $E = 0$ la trayectoria será una parábola. Esto se realiza si la partícula comienza su movimiento del estado de reposo en el infinito (véase (30.9)). Por fin, para $E < 0$ la trayectoria será una elipse. Cuando los valores de la energía y del momento de cantidad de movimiento que satisfacen la condición $E = -m\alpha^2/2M^2$, la elipse degenera convirtiéndose en una circunferencia.

El movimiento por una elipse es finito, por una parábola o hipérbola, infinito (véase el § 26).

§ 31. Problema de los dos cuerpos

Se llama de los dos cuerpos el problema acerca del movimiento de dos partículas que ejercen acciones entre sí. Se supone que el sistema formado por dichas partículas es cerrado. En el § 27 fue aclarado que el centro de masas de un sistema cerrado o está en reposo, o bien en movimiento rectilíneo uniforme. Vamos a resolver el problema en un sistema del centro de masa (sistema C) colocando el origen de coordenadas en el punto C. En tal caso, $\mathbf{r}_C = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2) = 0$, es decir,

$$m_1\mathbf{r}_1 = -m_2\mathbf{r}_2 \quad (31.1)$$

(fig. 31.1, a). Introduzcamos el vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (31.2)$$

Fig. 31.1

que determina la posición de la segunda partícula respecto de la primera (fig. 31.1, b). Resolviendo conjuntamente (31.1) y (31.2), hallamos con facilidad, que

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}. \quad (31.3)$$

De modo semejante a (23.1), podemos escribir que $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = f(r)\,\mathbf{e}_r$, donde $f(r)$ es la función de la distancia entre las partículas, positiva para las fuerzas de atracción (fig. 31.1, c) y negativa para las de repulsión. Escribamos las ecuaciones de movimiento de

las partículas:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r)\,\mathbf{e}_r,\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(r)\,\mathbf{e}_r.$$

Dividamos la primera ecuación por m_1 y la segunda, por m_2 y sustrayamos la primera ecuación de la segunda. He aquí el resultado

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\,\mathbf{e}_r.$$

De acuerdo con (31.2), el primer miembro es $\ddot{\mathbf{r}}$. Así, pues,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\,\mathbf{e}_r. \qquad (31.4)$$

De manera formal, (31.4) puede ser considerada como la ecuación de movimiento de una partícula imaginaria en el campo central de fuerzas. Respecto del centro de fuerzas, la posición de la partícula se determina por el radio vector $\mathbf{r}$. En correspondencia con (31.4), a la partícula imaginaria se le puede aducir la masa μ, que se define de la condición

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \qquad (31.5)$$

De aquí,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (31.6)$$

La magnitud (31.6) recibe el nombre de *masa reducida* de la partícula.

De este modo, el problema de los dos cuerpos se reduce al problema del movimiento de una partícula en el campo central de fuerzas. Hallando $\mathbf{r}$ mediante (31.4) como una función de t, con ayuda de las fórmulas (31.3) podemos definir $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$. Los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se trazan desde el centro de masas del sistema C. Por esta razón, para poder hacer uso de las fórmulas (31.3), también debemos trazar el radio vector $\mathbf{r}$ de la partícula imaginaria desde el punto C (para las partículas reales, el vector (31.2) se traza desde la primera partícula a la segunda).

De las fórmulas (31.2) y la fig. 31.1, vemos que ambas partículas se desplazan respecto del centro de masas por trayectorias geométricas semejantes [1]), con la particularidad de que la recta que une las partículas pasa por el centro de masas permanentemente.

[1]) En el caso, cuando la fuerza de interacción es razón inversa del cuadrado de la distancia entre las partículas, estas trayectorias son elipses, parábolas o hipérbolas (véase el § 30).

CAPÍTULO IV

SISTEMAS NO INERCIALES DE REFERENCIA

§ 32. Fuerzas de inercia

Las leyes de Newton sólo se cumplen en los sitemas inerciales de referencia. Con relación a todos los sistemas inerciales de referencia el cuerpo se mueve con igual aceleración $\mathbf{w}$. Como todo sistema no inercial de referencia se mueve según los sistemas inerciales con cierta aceleración, la aceleración de un cuerpo en un sistema no inercial de referencia $\mathbf{w}'$ será diferente de $\mathbf{w}$. Designemos con el símbolo $\mathbf{a}$ la diferencia de aceleración de un cuerpo en sistemas inercial y no inercial de referencia:

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{a}. \tag{32.1}$$

Para un sistema no inercial de referencia en movimiento de traslación $\mathbf{a}$ es igual en todos los puntos del espacio ($\mathbf{a} = \text{const}$), y es, ni más ni menos, la aceleración del sistema no inercial de referencia. Para un sistema de este tipo en rotación, en diversos puntos del espacio $\mathbf{a}$ será diferente ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{r}'$ es el radio vector que determina la posición del punto en lo que atañe al sistema no inercial de referencia).

Supongamos que es igual a $\mathbf{F}$ la resultante de todas las fuerzas condicionadas por la acción ejercida por otros cuerpos sobre el cuerpo que examinamos. Entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del cuerpo respecto de cualquier sistema inercial de referencia es igual a

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m}\mathbf{F}.$$

En lo que se refiere a la aceleración del cuerpo con relación a cierto sistema no inercial de referencia, de acuerdo con (32.1), podemos representarla como

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - \mathbf{a}.$$

De aquí se desprende que incluso cuando $\mathbf{F} = 0$ el cuerpo se moverá con relación al sistema no inercial de referencia con una aceleración $-\mathbf{a}$, es decir, de modo como si sobre éste actuara una fuerza igual a $-m\mathbf{a}$.

Lo dicho significa, que al describir el movimiento en sistemas no inerciales de referencia se puede hacer uso de las ecuaciones de Newton, si junto con las fuerzas condicionadas por el efecto que ejerce un cuerpo sobre otro, se toman en consideración las llamadas *fuer-*

zas de inercia $\mathbf{F}_{in}$ que deben suponerse iguales al producto de la masa del cuerpo por la diferencia de sus aceleraciones respecto de los sistemas inercial y no inercial, tomada con signo opuesto:

$$\mathbf{F}_{in} = -m(\mathbf{w} - \mathbf{w}') = -m\mathbf{a}. \tag{32.2}$$

De modo correspondiente, la ecuación de la segunda ley de Newton en un sistema no inercial de referencia, tendrá el aspecto

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in}. \tag{32.3}$$

El siguiente ejemplo aclarará nuestra afirmación. Examinemos un carrito en el que está fijado un soporte sobre el cual una bola se encuentra suspendida de un hilo (fig. 32.1). Cuando el carrito está en reposo o se mueve sin aceleración, el hilo ocupa la posición vertical y la fuerza de la gravedad $\mathbf{P}$ se equilibra por la reacción del hilo $\mathbf{F}_r$. Ahora pongamos el carrito en movimiento de traslación con aceleración $\mathbf{a}$. El hilo se desviará de la vertical a un ángulo tal que la resultante de las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}_r$ comunique a la bola una aceleración $\mathbf{a}$. Respecto del sistema de referencia relacionado con el carrito, la bola está en reposo a pesar de que la resultante de las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}_r$ se diferencia de cero. La carencia de aceleración de la bola en lo que atañe a este sistema de referencia puede ser explicada de manera formal por el hecho de que además de las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}_r$, iguales en la suma a $m\mathbf{a}$, sobre la bola actúa también la fuerza de inercia $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$.

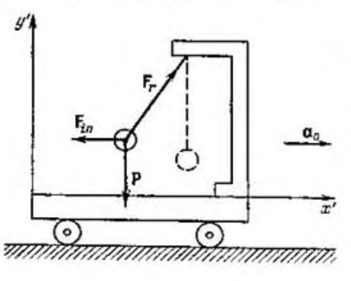


Fig. 32.1

La introducción de las fuerzas de inercia da la posibilidad de describir el movimiento de los cuerpos en cualesquiera sistemas de referencia (tanto inerciales, como no inerciales) con ayuda de las mismas ecuaciones de movimiento.

Hay que comprender con claridad que las fuerzas de inercia no se pueden poner a la misma altura que tales fuerzas como las elásticas, gravitacionales y de rozamiento, es decir, las fuerzas condicionadas por la actuación sobre el cuerpo de otros cuerpos. Las fuerzas de inercia están condicionadas por las propiedades del sistema de referencia en el que se consideran los fenómenos mecánicos. En este sentido pueden ser llamadas fuerzas aparentes.

La introducción de las fuerzas de inercia en la consideración no es en principio necesaria. Desde este punto de vista, cualquier movimiento siempre puede ser examinado respecto de un sistema iner-

cial de referencia. No obstante, con frecuencia es prácticamente de interés examinar el movimiento de los cuerpos con relación a sistemas no inerciales de referencia, por ejemplo, acerca de la superficie terrestre. El empleo de las fuerzas de inercia ofrece la posibilidad de resolver el correspondiente problema directamente en lo que atañe a semejante sistema de referencia, lo que con frecuencia resulta ser mucho más sencillo que el análisis del movimiento de un sistema inercial de referencia.

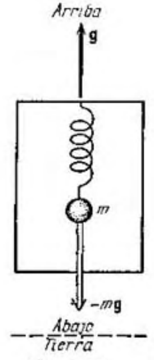


Fig. 32.2

La propiedad característica de las fuerzas de inercia es su proporcionalidad a la masa del cuerpo. Gracias a esto, dichas fuerzas son análogas a las de gravitación. Imaginémonos que nos encontramos en una cabina cerrada, alejada de todas las fuerzas externas. Dicha cabina se mueve con aceleración **g** en la dirección que vamos a llamar «hacia arriba» (fig. 32.2). En tal caso, todos los cuerpos que se encuentran en el interior de la cabina se comportarán como si sobre ellos se ejerciera la fuerza de inercia $-m\mathbf{g}$. En particular, el resorte que tiene suspendido en su extremo un cuerpo de masa m, se alargará de tal forma que la fuerza elástica equilibre la fuerza de inercia $-m\mathbf{g}$. Sin embargo, iguales fenómenos serían observados si la cabina estuviera inmóvil y se encontrara junto a la superficie de la Tierra. Como no tenemos la posibilidad de «ver» tras los límites de la cabina, ninguna clase de experimentos realizados en el interior de aquélla permitirían establecer qué es lo que condiciona la fuerza $-m\mathbf{g}$, el movimiento acelerado de la cabina o la acción del campo gravitacional de la Tierra. Este es el motivo de que se hable de la equivalencia de las fuerzas de inercia y gravitacionales. Semejante equivalencia es la base de la teoría general de la relatividad de Einstein.

§ 33. Fuerza centrífuga de inercia

Examinemos un disco que gira alrededor de un eje vertical z', perpendicular a él, a una velocidad angular ω (fig. 33.1). Junto con el disco gira una bola asentada sobre un rayo y unida con el centro del disco mediante un resorte. La bola ocupa en el rayo una posición tal con la que la fuerza de tensión del muelle $\mathbf{F}_{res}$ es igual al producto de la masa de la bola m por su aceleración $\mathbf{w}_n = -\omega^2\mathbf{R}$ (véase (5.10)); $\mathbf{R}$ es el radio vector trazado hasta la bola desde el centro del disco. Su módulo R nos da la distancia hasta la bola desde el centro del disco:

$$\mathbf{F}_{res} = -m\omega^2\mathbf{R}. \qquad (33.1)$$

Con relación al sistema de referencia ligado con el disco, la bola está en reposo. De modo formal esto puede ser explicado por el hecho de que, además de la fuerza (33.1), sobre la bola actúa la fuerza de inercia

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = m\omega^2\mathbf{R}, \tag{33.2}$$

dirigida a lo largo del radio desde el centro del disco.

La fuerza de inercia (33.2) que surge en un sistema de referencia en rotación (respecto de sistemas inerciales), recibe el nombre de *fuerza centrífuga de inercia*. Esta fuerza actúa sobre el cuerpo en un sistema de referencia en rotación, independientemente de si en este sistema el cuerpo está en reposo (como suponíamos hasta el momento) o se mueve respecto de él a una velocidad $\mathbf{v}'$.

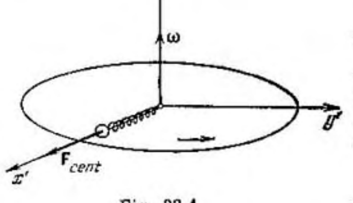


Fig. 33.1

Si caracterizamos la posición del cuerpo en un sistema de referencia en rotación por el radio vector $\mathbf{r}'$, la fuerza centrífuga de inercia puede ser representada en forma de un producto vectorial doble:

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = m\,[\boldsymbol{\omega},\ [\mathbf{r}',\ \boldsymbol{\omega}]]. \tag{33.3}$$

En efecto, el vector $\mathbf{b} = [\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}]$ está dirigido perpendicularmente a los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{F}_{\text{cent}}$ hacia nosotros (fig. 33.2) y su módulo es igual a $\omega r' \operatorname{sen} \alpha = \omega R$. La dirección del producto vectorial de los vectores $m\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{b}$, perpendiculares entre sí, coincide con $\mathbf{F}_{\text{cent}}$ y su módulo es igual a $m\omega b = m\omega^2 R = F_{\text{cent}}$.

Al resolver con precisión los problemas del movimiento de los cuerpos respecto de la superficie terrestre, hay que tomar en consideración la fuerza centrífuga de inercia igual a $m\omega^2 R$, donde m es la masa del cuerpo, ω, la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno de su eje, R, la distancia desde el cuerpo al eje terrestre (fig. 33.3). En aquellos casos, cuando la altura de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra es pequeña, se puede considerar que R es igual a $R_{\text{T}} \cos \varphi$ (R_{T} es el radio de la Tierra, φ, la latitud del lugar). Entonces, la expresión para la fuerza centrífuga de inercia tendrá el aspecto

$$F_{\text{cent}} = m\omega^2 R_{\text{T}} \cos \varphi. \tag{33.4}$$

La aceleración de la caída libre $\mathbf{g}$ de los cuerpos, que se observa con relación a la Tierra, está condicionada por la acción de la fuerza $\mathbf{F}_g$, con la que el cuerpo se atrae por la Tierra, y la fuerza $\mathbf{F}_{\text{cent}}$. La resultante de estas fuerzas

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{cent}} \tag{33.5}$$

es la fuerza de la gravedad, igual a $m\mathbf{g}$ (véase (16.1)).

La diferencia entre la fuerza de la gravedad **P** y la fuerza de atracción a la Tierra $\mathbf{F}_g$ es pequeña, ya que la fuerza centrífuga de inercia es mucho menor que $\mathbf{F}_g$. Por ejemplo, para una masa igual a 1 kg el valor máximo de F_{cent} se observa en el ecuador y equivale a

$$m\omega^2 R_{\text{T}} = 1\cdot(2\pi/86400)^2\cdot 6{,}4\cdot 10^6 = 0{,}035 \text{ N},$$

mientras que $\mathbf{F}_g$ es aproximadamente igual a 9,8 N, es decir, casi 300 veces mayor.

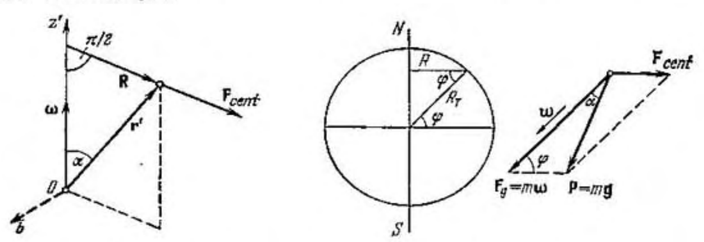


Fig. 33.2 Fig. 33.3

El ángulo α entre las direcciones de $\mathbf{F}_g$ y **P** (véase la fig. 33.3) puede ser definido haciendo uso del teorema de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{F_{\text{cent}}}{R} = \frac{m\omega^2 R_{\text{T}}\cos\varphi}{mg} \approx \frac{0{,}035}{9{,}8}\cos\varphi \approx 0{,}0035\cos\varphi,$$

de donde

$$\operatorname{sen}\alpha \approx 0{,}0035 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \approx 0{,}0018 \operatorname{sen} 2\varphi.$$

El seno de un ángulo pequeño puede ser sustituido aproximadamente por el valor del propio ángulo. Como resultado

$$\alpha \approx 0{,}0018 \operatorname{sen} 2\varphi. \qquad (33.6)$$

De este modo, el ángulo α varía en los márgenes desde cero (en el ecuador, donde $\varphi = 0$ y en los polos, donde $\varphi = 90°$) hasta 0,0018 rad ó 6′ (en la latitud de 45°).

La dirección de la fuerza **P** coincide con la del hilo tensado por una carga, que recibe el nombre de dirección de la plomada o vertical. La fuerza $\mathbf{F}_g$ está dirigida al centro de la Tierra. Por consiguiente, la vertical está dirigida al centro de la Tierra sólo en los polos y en el ecuador, desviándose en las latitudes intermedias a un ángulo α determinado por la fórmula (33.6).

Ladiferencia $F_g - P$ es el cero en los polos y alcanza el máximo en el ecuador, donde es igual al 0,3% de la fuerza F_g. A causa del achatamiento del globo terrestre en los polos, la fuerza F_g varía en cierto grado con la latitud, siendo en el ecuador, aproximadamente,

el 0,2% menor que en los polos. Como resultado, la aceleración de la caída libre cambia según la latitud en los límites de 9,780 m/s² en el ecuador a 9,832 m/s² en los polos; g = 9,80665 m/s² se ha aceptado como valor normal (estándar) de dicha aceleración.

Cabe indicar, que respecto de un sistema inercial de referencia, digamos heliocéntrico, un cuerpo que cae libremente se mueve con una aceleración $\mathbf{w} = \mathbf{F}_g/m$ (y no $\mathbf{g}$). En la fig. 33.3 vemos que de la igualdad de la aceleración g para diversos cuerpos se deduce la equivalencia de las aceleraciones w. En efecto, los triángulos construidos sobre los vectores $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{P}$ para diferentes cuerpos, son semejantes (los ángulos α y φ son iguales para todos los cuerpos en el punto dado de la superficie terrestre). Por lo tanto, la razón F_g/P, que coincide con el cociente w/g, es la misma para todos los cuerpos, de donde sigue que para iguales g se obtienen iguales w.

§ 34. Fuerza de Coriolis

Cuando un cuerpo se mueve con relación a un sistema de referencia en rotación, además de fuerza centrífuga de inercia, surge otra denominada *fuerza de Coriolis* o *fuerza de inercia de Coriolis*.

La aparición de la fuerza de Coriolis puede ser observada en el siguiente ejemplo. Tomemos un disco horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical. Tracemos en el disco la recta radial OA (fig. 34.1, a). A una velocidad $\mathbf{v}'$ lancemos una bola en la dirección de O a A. Si el disco no gira, la bola rodará a lo largo de la recta trazada. Si, por lo contrario, ponemos el disco en rotación en la dirección indicada por la flecha, la bola rodará por la curva OB de trazos, con la particularidad de que la velocidad $\mathbf{v}'$ de la bola cambiará su dirección. Por consiguiente, respecto del sistema de referencia en rotación, la bola se comporta como si sobre ella actuara la fuerza $\mathbf{F}_C$ perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}'$.

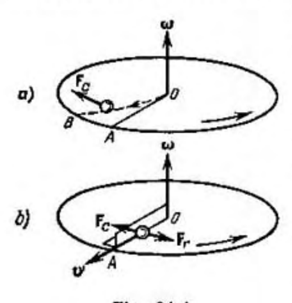
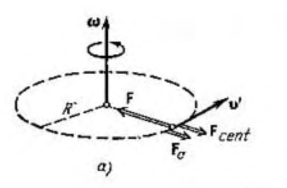


Fig. 34.1

Para obligar que la bola se ruede por el disco en rotación a lo largo de la recta radial, hay que crear una guía, por ejemplo, en forma de la arista OA (fig. 34.1, b). Durante la rodadura de la bola, la arista de guía ejerce sobre ella cierta fuerza $\mathbf{F}_r$. Respecto del sistema en rotación (del disco), la bola se mueve a velocidad de dirección constante. De modo formal, esto puede ser explicado por el hecho de que la fuerza $\mathbf{F}_r$ se equilibra con la fuerza de inercia $\mathbf{F}_C$

aplicada a la bola que es perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}'$. La fuerza $\mathbf{F}_C$ es, precisamente, la fuerza de inercia de Coriolis.

Para empezar, hallemos la expresión de la fuerza de Coriolis para un caso particular, cuando la partícula m respecto de un sistema de referencia en rotación, se mueve uniformemente por una circunferencia que yace en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro se encuentra en dicho eje (fig. 34.2). Designemos con $\mathbf{v}'$ la velocidad de la partícula con relación al sistema en rotación. En lo que atañe al sistema inmóvil de referencia (inercial) la velocidad



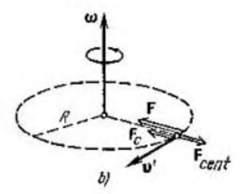


Fig. 34.2

de la partícula $\mathbf{v}$ es una magnitud igual a $\mathbf{v}' + \omega R$ en el caso (*a*) y $| v' - \omega R |$ en el caso (*b*), donde ω es la velocidad del sistema en rotación, R, el radio de la circunferencia (véase (5.7)).

Con el fin de que la partícula se mueva con relación al sistema inmóvil por la circunferencia a una velocidad $v = v' + \omega R$, sobre ella debe actuar la fuerza $\mathbf{F}$ dirigida hacia el centro de la circunferencia, por ejemplo, la fuerza de tensión del hilo con el que la partícula está atada al centro de la circunferencia (véase la fig. 34.2, *a*). La magnitud de esta fuerza es igual a

$$F = mw_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \qquad (34.1)$$

En lo que se refiere al sistema en rotación, la partícula se mueve con aceleración $w'_n = v'^2/R$, es decir, como si sobre ella actuara la fuerza

$$mw'_n = \frac{mv'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R \qquad (34.2)$$

(véase (34.1)). De este modo, en el sistema en rotación la partícula se comporta como si sobre ella actuaran, además de la fuerza $\mathbf{F}$ dirigida hacia el centro de la circunferencia, dos fuerzas más dirigidas en sentido opuesto al centro: $\mathbf{F}_{cent} = m\omega^2\mathbf{R}$ y la fuerza $\mathbf{F}_C$, cuyo módulo es igual a $2mv'\omega$ (fig. 34.2, *a*). Es fácil comprender que la fuerza $\mathbf{F}_C$ puede ser representada en la forma

$$\mathbf{F}_C = 2m\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \qquad (34.3)$$

La fuerza (34.3) es, precisamente, la fuerza de inercia de Coriolis. Para $\mathbf{v}' = 0$ esta fuerza no existe. La fuerza $\mathbf{F}_{\text{cent}}$ no depende de $\mathbf{v}'$, como ya hemos indicado, actúa sobre los cuerpos tanto en reposo, como sobre los que están en movimiento.

En el caso representado en la fig. 34.2, *b*

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' - \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R.$$

Correspondientemente

$$\frac{mv'^2}{R} = F + 2mv'\omega - m\omega^2 R.$$

Por lo tanto, en el sistema en rotación la partícula se comporta como si sobre ella actuaran dos fuerzas dirigidas hacia el centro de la circunferencia: $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_C$, así como la fuerza dirigida desde el centro $\mathbf{F}_{\text{cent}} = m\omega^2\mathbf{R}$ (véase la fig. 34.2, *b*). En este caso, la fuerza $\mathbf{F}_C$ puede ser representada en la forma (34.3).

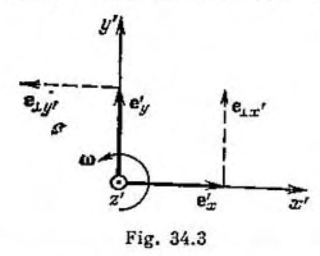


Fig. 34.3

Pasemos ahora a determinar la fuerza de Coriolis para el caso cuando la partícula se mueve al azar respecto del sistema de referencia en rotación. Liguemos con el sistema en rotación los ejes de coordenadas x', y', z', con la particularidad de que vamos a hacer coincidir el eje z' con el eje de rotación (fig. 34.3). En semejante caso, el radio vector de la partícula puede ser representado como

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z, \qquad (34.4)$$

donde $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$, $\mathbf{e}'_z$ son los versores de los ejes de coordenadas. Los versores $\mathbf{e}'_x$ y $\mathbf{e}'_y$ giran junto con el sistema de referencia a una velocidad angular ω, mientras que el versor $\mathbf{e}'_z$ queda inmóvil.

Con ayuda del radio vector $\mathbf{r}$, se debe determinar la posición de la partícula con relación al sistema inmóvil. Sin embargo, los símbolos $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$ designan un mismo vector, trazado desde el origen de coordenadas hasta la partícula. Un observador «viviente» en el sistema de referencia en rotación designaría dicho vector con el símbolo $\mathbf{r}'$; según sus observaciones, los versores $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$, $\mathbf{e}'_z$ están inmóviles, por lo que al derivar la expresión (34.4) trataría estos versores como constantes. El observador inmóvil haría uso del símbolo $\mathbf{r}'$; para él los versores $\mathbf{e}'_x$, $\mathbf{e}'_y$ giran a una velocidad ω (el versor $\mathbf{e}'_z$ está inmóvil). Por esta razón, al derivar la expresión (34.4) igual a $\mathbf{r}$, el observador inmóvil debe tratar a $\mathbf{e}'_x$ y $\mathbf{e}'_y$ como funciones de t,

cuyas derivadas son iguales a:

$$\dot{\mathbf{e}}'_x = \omega \mathbf{e}'_y, \quad \dot{\mathbf{e}}'_y = -\omega \mathbf{e}'_x \qquad (34.5)$$

(véase la fig. 34.3 y la fórmula (2.56); el versor $\mathbf{e}_{\perp x'}$, que es perpendicular a $\mathbf{e}'_x$, es igual a $\mathbf{e}'_y$, el versor $\mathbf{e}_{\perp y'}$, que es perpendicular a $\mathbf{e}'_y$, es igual a $-\mathbf{e}'_x$). Para las segundas derivadas de los versores según el tiempo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\ddot{\mathbf{e}}'_x = \omega \dot{\mathbf{e}}'_y = -\omega^2 \mathbf{e}'_x, \quad \ddot{\mathbf{e}}'_y = -\omega \dot{\mathbf{e}}'_x = -\omega^2 \mathbf{e}'_y. \qquad (34.6)$$

Hallemos la velocidad de la partícula con relación al sistema de referencia en rotación. Con este objeto, derivemos el radio vector (34.4) según el tiempo, considerando que los versores son constantes:

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}' \mathbf{e}'_x + \dot{y}' \mathbf{e}'_y + \dot{z}' \mathbf{e}'_z. \qquad (34.7)$$

La segunda derivación de la anterior expresión nos proporciona la aceleración de la partícula respecto del sistema de referencia en rotación:

$$\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{v}}' = \ddot{x}' \mathbf{e}'_x + \ddot{y}' \mathbf{e}'_y + \ddot{z}' \mathbf{e}'_z. \qquad (34.8)$$

Hallemos ahora la velocidad de la partícula con relación al sistema inmóvil de referencia. Con este fin, derivemos el radio vector (34.4) "desde el punto de vista" del observador inmóvil. Haciendo uso de la designación $\mathbf{r}$ en lugar de $\mathbf{r}'$ (recordemos que $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'$), obtendremos:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}' \mathbf{e}'_x + x' \dot{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}' \mathbf{e}'_y + y' \dot{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}' \mathbf{e}'_z. \qquad (34.9)$$

Derivando una vez más esta expresión según t, hallamos la aceleración de la partícula en lo que atañe al sistema inmóvil:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}' \mathbf{e}'_x + 2\dot{x}' \dot{\mathbf{e}}'_x + x' \ddot{\mathbf{e}}'_x + \ddot{y}' \mathbf{e}'_y + 2\dot{y}' \dot{\mathbf{e}}'_y + y' \ddot{\mathbf{e}}'_y + \ddot{z}' \mathbf{e}'_z.$$

Tomando en consideración las fórmulas (34.5), (34.6) y (34.8), la correlación obtenida puede ser transformada de la siguiente forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\omega (\dot{x}' \mathbf{e}'_y - \dot{y}' \mathbf{e}'_x) - \omega^2 (x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y). \qquad (34.10)$$

Consideremos el producto vectorial $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$. Presentémoslo en forma del determinante (véase (2.33)):

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix}. \qquad (34.11)$$

De acuerdo con (34.7) $v'_x = \dot{x}'$, $v'_y = \dot{y}'$, $v'_z = \dot{z}'$, además, con la dirección de los ejes de coordenadas elegida por nosotros $\omega_x =$

$= \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$. La sustitución de estos valores en (34.11) nos proporciona

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = -\mathbf{e}'_x \omega \dot{y}' + \mathbf{e}'_y \omega \dot{x}'. \qquad (34.12)$$

El resultado obtenido muestra que el segundo término de la fórmula (34.10) puede ser escrito en la forma $2\,[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$. La expresión entre paréntesis en el último término de la fórmula (34.10) es igual a la componente del radio vector $\mathbf{r}'$ perpendicular al eje de rotación (al eje z') (véase (34.4)). Designemos dicha componente con el símbolo $\mathbf{R}$ (comp. con la fig. 5.5). Teniendo en cuenta todo lo dicho, podemos escribir la correlación (34.10) del modo siguiente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\,[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] - \omega^2 \mathbf{R}. \qquad (34.13)$$

De (34.13) se desprende que la aceleración de la partícula respecto del sistema inmóvil de referencia puede representarse en forma de la suma de tres aceleraciones: la aceleración con relación al sistema en rotación $\mathbf{w}'$, la aceleración igual a $-\omega^2\mathbf{R}$ [1]) y la aceleración

$$\mathbf{w}_C = 2\,[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'], \qquad (34.14)$$

que se denomina *aceleración de Corioli*

Para que la partícula se mueva con la aceleración (34.13), sobre ella deben actuar ciertos cuerpos con una fuerza resultante $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$. De acuerdo con (34.13)

$$m\mathbf{w}' = m\mathbf{w} - 2m\,[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] + m\omega^2\mathbf{R} = \mathbf{F} + 2m\,[\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}] + m\omega^2\mathbf{R} \qquad (34.15)$$

(la permutación de los factores hace variar el signo del producto vectorial). El resultado obtenido significa que durante la confección de la ecuación de la segunda ley de Newton, en el sistema de referencia en rotación, además de las fuerzas de interacción hay que tener en cuenta la fuerza centrífuga de inercia determinada por la fórmula (33.2), así como la fuerza de Coriolis, que en el caso más general se define con la fórmula (34.3). Cabe señalar, que la fuerza de Coriolis siempre yace en el plano perpendicular al eje de rotación.

De la comparación de las fórmulas (34.9), (34.7) y (34.5) sigue que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y = \mathbf{v}' + \omega\,(x'\mathbf{e}'_y - y'\mathbf{e}'_x).$$

Por medio de cálculos análogos a los que llevaron a la correlación (34.13), podemos cerciorarnos de que el último término de la expre-

[1]) La aceleración $\mathbf{w}_0 = -\omega^2\mathbf{R}$ recibe el nombre de *aceleración de arrastre*. Es aquella que tendría la partícula en reposo en un sistema de referencia en movimiento (en nuestro caso, en rotación).

sión obtenida es igual a $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$. Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']. \tag{34.16}$$

Con $\mathbf{v}' = 0$ esta fórmula se convierte en (5.8).

Ejemplos de movimientos con los que se manifiesta la fuerza de inercia de Coriolis. Al interpretar los fenómenos ligados con el movimiento de los cuerpos respecto de la superficie terrestre, en una serie de casos hay que tomar en consideracian la influencia de las fuerzas de Coriolis. Por ejemplo, durante la caída libre de los cuerpos,

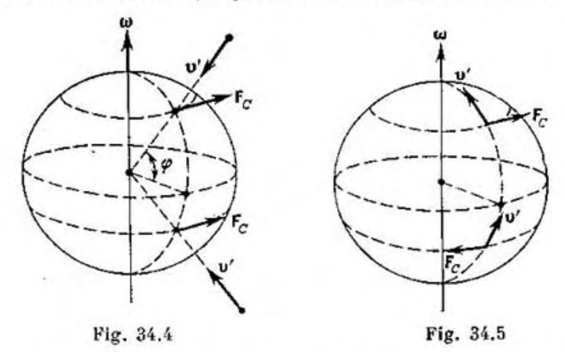


Fig. 34.4

Fig. 34.5

sobre ellos actúa la fuerza de Coriolis que condiciona la desviación de la línea de la plomada hacia oriente (fig. 34.4). Dicha fuerza tiene su máximo valor en el ecuador y es nula en los polos.

Un proyectil que vuela también sufre desviaciones provocadas por las fuerzas de inercia de Coriolis (fig. 34.5). Al ser disparado un cañón dirigido hacia el norte, el proyectil se desviará hacia oriente en el hemisferio septentrional y hacia occidente, en el meridional. Al disparar a lo largo de un meridiano hacia el sur, las direcciones de las desviaciones serán las opuestas. Al disparar a lo largo del acuador, las fuerzas de Coriolis tenderán a desviar el proyectial hacia la superficie terrestre si el disparo fue realizado hacia occidente y lo harán ascender si el disparo se ejecutó hacia oriente. Dejamos que el lector se cerciore por sí mismo de que la fuerza de Coriolis, que actúa sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de un meridiano en cualquier dirección (hacia el norte o sur), está dirigida respecto del sentido del movimiento a la derecha en el hemisferio septentrional y a la izquierda, en el meridional. Este fenómeno provoca que los ríos siempre derrubían la orilla derecha en el hemisferio septentrional y la izquierda, en el meridional. Estas mismas causas explican el desigual desgaste de los carriles durante el movimiento de doble vía.

También se manifiestan las fuerzas de Coriolis en la oscilación del péndulo. En la fig. 34.6 se muestra la trayectoria del peso del péndulo (para simplificar hemos supuesto que el péndulo se encuentra en el polo). En el Polo Norte la fuerza de Coriolis estará siempre dirigida hacia la derecha según la marcha del péndulo, en el Polo Sur, hacia la izquierda. Como resultado, la trayectoria tiene la forma de un rosetón.

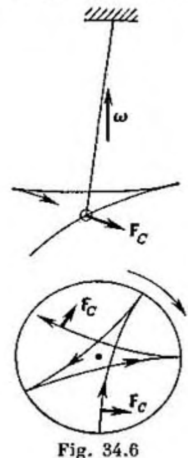


Fig. 34.6

Como vemos en la figura, el plano de oscilación del péndulo gira respecto de la Tierra en dirección horaria, con la particularidad de que en el transcurso del día y noche dicho plano da una vuelta. Con relación a un sistema heliocéntrico de referencia la cuestión residirá en que el plano de oscilación quedará invariable, mientras que la Tierra gira respecto de él efectuando una vuelta por día y noche. Puede ser demostrado que en la latitud φ el plano de oscilación del péndulo gira por veinticuatro horas a un ángulo 2π sen φ.

De este modo, al observar la rotación del plano de oscilación de un péndulo (los péndulos empleados con este fin denomínanse péndulos de Foucault) obtenemos la demostración directa de la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

§ 35. Principios de conservación en sistemas no inerciales de referencia

Si se tienen en cuenta las fuerzas de inercia, las ecuaciones de movimiento en un sistema no inercial, en nada se diferencian de dichas ecuaciones en un sistema inercial de referencia. Por esta razón, todos los corolarios que siguen de las ecuaciones de movimiento, en particular las correlaciones (24.12), (27.3) y (29.18), también son válidas en los sistemas no inerciales de referencia.

En semejante sistema, la fórmula (24.12) tiene el aspecto

$$E_2 - E_1 = A_{12\,\text{no cons}} + A_{12\,\text{iner}}, \tag{35.1}$$

donde $A_{12\,\text{iner}}$ es el trabajo de las fuerzas de inercia.

Las fórmulas (27.3) y (29.18) tienen la siguiente forma en un sistema no inercial:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}_{\text{iner}}, \tag{35.2}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}} + \sum \mathbf{N}_{\text{iner}}. \tag{35.3}$$

Aquí $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ es la fuerza condicionada por la interacción, $\mathbf{F}_{\text{iner}}$, la fuerza de inercia; $\mathbf{N}_{\text{ext}}$ y $\mathbf{N}_{\text{iner}}$ son los momentos de las fuerzas indicadas.

La fuerza centrífuga de inercia $\mathbf{F}_{\text{cent}} = m\omega^2\mathbf{R}$ es conservativa. En efecto, el trabajo de esta fuerza

$$A_{12\,\text{cent}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{cent}}\, d\mathbf{r} = m\omega^2 \int_1^2 \mathbf{R}\, d\mathbf{r}.$$

En la fig. 35.1 vemos que la proyección del vector $d\mathbf{r}$ sobre la dirección del vector $\mathbf{R}$, igual a dR, es el incremento del módulo $\mathbf{R}$. Por consiguiente, $\mathbf{R}\, d\mathbf{r} = R\, dr = d\,(R^2/2)$. De este modo,

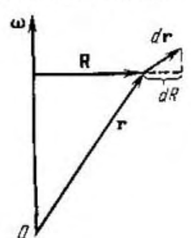


Fig. 35.1

$$A_{12\,\text{cent}} = m\omega^2 \int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = m\omega^2 \frac{R_2^2}{2} - m\omega^2 \frac{R_1^2}{2}. \tag{35.4}$$

La expresión obtenida no depende, por lo visto, del recorrido por el que transcurría el desplazamiento del punto *1* al punto *2*.

El carácter conservativo de la fuerza $\mathbf{F}_{\text{cent}}$ permite introducir la energía potencial de la partícula U_{cent} (energía centírfuga), cuyo decrecimiento determina el trabajo de la fuerza centrífuga de inercia:

$$A_{12\text{cent}} = U_{\text{cent}\,1} - U_{\text{cent}\,2} \tag{35.5}$$

(véase la fórmula (22.1)). De la comparación de las fórmulas (35.4) y (35.5) llegamos a la conclusión de que

$$U_{\text{cent}} = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2 + \text{const.}$$

La constante puede hacerse igual a cero. En tal caso, obtenemos la siguiente expresión para la energía centrífuga:

$$U_{\text{cent}} = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2. \tag{35.6}$$

Si añadimos la expresión (35.6) a la energía potencial de la partícula, en la magnitud $A_{12\,\text{iner}}$ de la fórmula (35.1) no hay que incluir el trabajo de la fuerza centrífuga de inercia.

CAPÍTULO V

MECÁNICA DEL SÓLIDO

§ 36. Movimiento de un sólido

En el § 1 nos hemos familiarizado con dos tipos fundamentales de movimiento de un sólido —de traslación y de rotación.

Durante el movimiento de traslación todos los puntos del sólido, en un mismo intervalo de tiempo, reciben iguales desplazamientos en magnitud y dirección, por lo que las velocidades y aceleraciones en cada momento de tiempo son iguales. Por esta causa, es suficiente

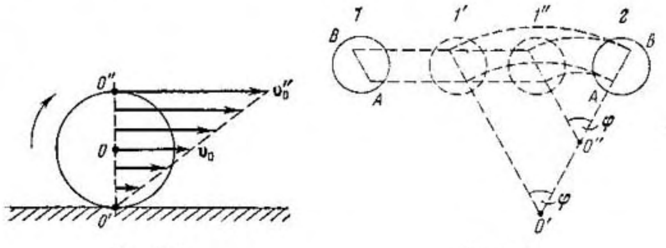


Fig. 36.1

Fig. 36.2

definir el movimiento de uno de los puntos del sólido (por ejemplo, de su centro de masas) para que sea por completo caracterizado el movimiento de todo el sólido.

Cuando el movimiento es de rotación todos los puntos del sólido se mueven por circunferencias, cuyos centros yacen sobre una misma recta, llamada eje de rotación. Para describir el movimiento de rotación hay que prefijar en el espacio la posición del eje de rotación y la velocidad angular del cuerpo en cada momento de tiempo.

Resulta que cualquier movimiento de un sólido puede ser representado como la superposición de los dos tipos fundamentales de movimiento indicados más arriba. Vamos a demostrar esta afirmación para el caso de un movimiento *plano*, para el que todos los puntos del sólido se desplazan por planos paralelos. Como ejemplo de movimiento plano podemos aducir la rodadura de un cilindro por un plano (fig. 36.1).

El desplazamiento arbitrario de un sólido de la posición *1* a la *2* (fig. 36.2) puede ser representado como la suma de dos desplazamientos: el desplazamiento de traslación de la posición *1* a la posi-

ción *1'* ó *1"* y del giro alrededor del eje *O'* ó *O"*. Es evidente, que semejante división del desplazamiento en el de traslación y de rotación se puede realizar por medio de un conjunto innumerable de procedimientos, pero en cualquier caso el giro se realiza a un mismo ángulo φ.

De acuerdo con lo dicho, el desplazamiento elemental de cualquier punto del sólido $d\mathbf{s}$ puede descomponerse en dos desplazamientos, o sea, de «traslación» $d\mathbf{s}_{tras}$ y de «rotación» $d\mathbf{s}_{rot}$:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s}_{tras} + d\mathbf{s}_{rot},$$

con la particularidad de que $d\mathbf{s}_{tras}$ es igual para todos los puntos. Como hemos visto, semejante descomposición del desplazamiento $d\mathbf{s}$ puede realizarse de diferente forma, con esto en cada caso el desplazamiento de rotación $d\mathbf{s}_{rot}$ se ejecuta por el giro del cuerpo a un mismo ángulo $d\varphi$ (pero respecto de diferentes ejes), mientras que $d\mathbf{s}_{tras}$ y $d\mathbf{s}_{rot}$ resultan ser diferentes.

Dividiendo $d\mathbf{s}$ por el correspondiente intervalo de tiempo dt, obtenemos la velocidad del punto

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_{tras}}{dt} + \frac{d\mathbf{s}_{rot}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

donde $\mathbf{v}_0$ es la velocidad del movimiento de traslación, igual para todos los puntos y $\mathbf{v}'$, la velocidad del sólido diferente para distintos puntos, acondicionada por la rotación.

Así, pues, el movimiento plano de un sólido puede ser representado como la suma de dos movimientos, es decir, da traslación a una velocidad $\mathbf{v}_0$ y de rotación a una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (el vector $\boldsymbol{\omega}$ está dirigido en la fig. 36.1 perpendicularmente al plano de la figura, tras ésta). Es posible realizar semejante representación de un movimiento compuesto mediante múltiples procedimientos que se diferencian por los valores de $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}'$, pero que corresponden a iguales valores de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo, el movimiento de un cilindro que rueda sin deslizamiento por un plano (fig. 36.1), puede ser representado como un movimiento de traslación a velocidad $\mathbf{v}_0$ y la rotación simultánea a velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje *O* ó bien como un movimiento de traslación a velocidad $\mathbf{v}_0'' = 2\mathbf{v}_0$ y de rotación a la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en torno del eje *O"*, o bien, para acabar, como sólo una rotación de nuevo a la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje *O'*.

Indicando que el sistema de referencia respecto del que examinamos el movimiento compuesto del sólido está inmóvil, el movimiento del sólido puede ser representado como la rotación a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, en un sistema de referencia que se mueve progresivamente a una velocidad $\mathbf{v}_0$ con relación al sistema inmóvil.

La velocidad lineal $\mathbf{v}'$ del punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}$, condicionada por la rotación del sólido, es igual a $\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ (véase (5.8)).

Por lo tanto, la velocidad de este punto durante el movimiento compuesto puede ser representada en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{36.1}$$

Durante el movimiento plano, el desplazamiento elemental siempre puede ser representado como el giro alrededor de cierto eje que recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación*. Éste puede encontrarse en los límites del sólido o fuera de él. Hablando en general, la posición del eje instantáneo de rotación respecto de un sistema inmóvil de referencia y con relación al propio cuerpo, varía con el tiempo. En el caso del cilindro que rueda (fig. 36.1) el eje instantáneo O' coincide con la línea de contacto entre el cilindro y el plano. Durante la rodadura del cilindro, el eje instantáneo se desplaza tanto por el plano (es decir, respecto del sistema inmóvil de referencia), como también por la superficie del cilindro.

Para cada momento de tiempo es posible considerar que la velocidad de todos los puntos del sólido está condicionada por la rotación en torno del eje instantáneo correspondiente. Por consiguiente, el movimiento plano de un sólido puede ser considerado como una serie de rotaciones elementales sucesivas alrededor de ejes instantáneos.

Durante el movimiento no plano, el desplazamiento elemental del sólido puede ser representado como el giro en torno de un eje instantáneo sólo en el caso cuando los vectores $\mathbf{v}_0$ y $\boldsymbol{\omega}$ son perpendiculares entre sí. Si el ángulo entre éstos se diferencia de $\pi/2$, el movimiento del sólido en cada momento de tiempo representará la superposición de dos movimientos —de rotación entorno de cierto eje y de traslación a lo largo de ese mismo eje.

§ 37. Movimiento del centro de masas de un sólido

Si dividimos un sólido en masas elementales m_i, podemos representarlo como un sistema de puntos materiales cuya disposición mutua queda invariable. Cualquiera de dichas masas elementales, puede hallarse tanto bajo la acción de las fuerzas internas, condicionadas por su interacción con otras masas elementales del sólido que examinamos, como de las fuerzas externas. Por ejemplo, si el sólido se encuentra en el campo de fuerzas de la gravitación terrestre, sobre cada masa elemental del sólido m_i actuará una fuerza externa igual a $m_i\mathbf{g}$.

Escribamos para cada masa elemental la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \tag{37.1}$$

donde $\mathbf{f}_i$ es la resultante de todas las fuerzas internas y $\mathbf{F}_i$, la resultante de todas las fuerzas externas aplicadas a la masa elemental dada. Sumando las ecuaciones (37.1) para todas las masas elementa-

les, obtendremos

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i. \qquad (37.2)$$

No obstante, la suma de todas las fuerzas internas que actúan en el sistema, es igual a cero. Por esta razón, la ecuación (37.2) se simplifica del modo siguiente:

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i. \qquad (37.3)$$

En esta igualdad, en el segundo miembro se encuentra la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido.

La suma del primer miembro de (37.3) puede ser sustituida por el producto de la masa m del cuerpo por la aceleración de su centro de masas $\mathbf{w}_C$. En efecto, de acuerdo con (27.6)

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_C.$$

Derivando dos veces esta correlación según el tiempo y tomando en consideración que $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$, mientras que $\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{w}_C$, podemos escribir:

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = m\mathbf{w}_C. \qquad (37.4)$$

Comparando las fórmulas (37.3) y (37.4), llegamos a la ecuación

$$m\mathbf{w}_C = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}, \qquad (37.5)$$

lo que significa que *el centro de masas de un sólido muévese como se movería bajo la acción de todas las fuerzas aplicadas al sólido, un punto material con igual masa que el sólido.*

La ecuación (37.5) ofrece la posibilidad de establecer el movimiento del centro de masas de un sólido, si se conoce su masa y las fuerzas aplicadas a él. En el caso del movimiento de traslación, esta ecuación determinará la aceleración no sólo del centro de masas, sino que también de cualquier otro punto del cuerpo.

§ 38. Rotación de un sólido alrededor de un eje inmóvil

Consideremos un sólido que puede girar en torno de un eje vertical inmóvil (fig. 38.1). Para excluir el desplazamiento del eje por el espacio, asentémoslo sobre cojinetes. La brida *Br*, que se apoya en el cojinete inferior, evita el desplazamiento vertical del eje.

Un cuerpo rígido puede ser considerado como un sistema de partículas (puntos materiales) entre las que las distancias son invariables. Para todo sistema de partículas, es válida la ecuación obtenida en el § 29

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}} \qquad (38.1)$$

(véase (29.18)). Esta ecuación también es justa para un sólido. En el último caso, **M** es el momento de la cantidad de movimiento del sólido; el segundo miembro de (38.1) es la suma de los momentos de las fuerzas externas, ejercidas sobre el sólido.

Tomemos en el eje de rotación el punto O y caractericemos la posición de las partículas que constituyen el sólido con ayuda de los radios vectores **r**, trazados desde dicho punto (en la fig. 38.1 se muestra la i-ésima partícula de masa m_i; mediante un círculo con cruz se muestra la velocidad $\mathbf{v}_i$ de la partícula, dirigida hacia la figura). En correspondencia con (29.5), el momento de la cantidad de movimiento de la partícula i-ésima respecto del punto O es igual a

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i, \ m_i\mathbf{v}_i] = m_i [\mathbf{r}_i, \ \mathbf{v}_i]. \tag{38.2}$$

Fig. 38.1

Los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$ son perpendiculares entre sí para todas las partículas del sólido. Por esta causa, el módulo del vector (38.2)

$$M_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i, \tag{38.3}$$

donde R_i es la distanlcia entre la partícula y el eje de rotación (véase la fórmula (5.7)).

Cabe indicar, que de acuerdo con (38.3) el módulo del vector $\mathbf{M}_i$ es proporcional a la velocidad de rotación del sólido ω; en lo que se refiere a la dirección del vector $\mathbf{M}_i$, ésta no depende de ω, ya que dicho vector yace en el plano que pasa por el eje de rotación y por la partícula m_i y es perpendicular a $\mathbf{r}_i$.

Es fácil cerciorarse de que para todas las partículas que forman el sólido, el ángulo entre los vectores $\mathbf{M}_i$ y $\boldsymbol{\omega}$ es agudo. Por esto, las proyecciones de estos vectores sobre el eje z, que coincide con el eje de rotación, tienen el mismo signo. Teniendo en cuenta lo dicho, podemos escribir que

$$M_{zi} = M_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = \\ = m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_z. \tag{38.4}$$

Aquí α_i es el ángulo entre el vector $\mathbf{M}_i$ y el eje z. Al cambiar la dirección del eje z por la opuesta, las dos proyecciones M_{zi} y ω_z cambian de signo, sin embargo, la igualdad (38.4) sigue siendo válida.

Sumando la expresión (38.4) respecto de todas las partículas, obtenemos el momento de la cantidad de movimiento del sólido con relación al eje z, que coincide con el de rotación:

$$M_z = \sum M_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2. \tag{38.5}$$

La magnitud I, igual a la suma de los productos de las masas elementales por los cuadrados de sus distancias desde cierto eje, recibe el nombre de *momento de inercia* del sólido con relación al eje dado:

$$I = \sum m_i R_i^2. \tag{38.6}$$

La suma se realiza por todas las masas elementales m_i en las que puede ser divido el cuerpo.

Tomando en consideración la fórmula (38.6), la expresión (38.5) puede aducirse en la forma

$$M_z = I\omega_z. \tag{38.7}$$

La fórmula obtenida es análoga a $p_z = mv_z$. Aquí, el momento de inercia desempeña el papel de masa y la velocidad angular, el de velocidad lineal.

Del tipo de la expresión (38.7) se desprende que la magnitud M_z no depende desde qué punto O (que yace en el eje de rotación) se toma el momento $\mathbf{M}$.

De acuerdo con (29.19)

$$\frac{d}{dt} M_z = \sum N_{z\,\text{ext}}.$$

Poniendo aquí la expresión (38.7) para M_z, llegamos a la ecuación

$$I\beta_z = \sum N_{z\,\text{ext}}, \tag{38.8}$$

donde $\beta_z = \dot{\omega}_z$ es la proyección de la aceleración sobre el eje z. La expresión (38.8) es análoga a la ecuación $mw_z = \sum F_z$. En este caso, el momento de inercia juega el papel de masa, la aceleración angular, el de aceleración lineal y, por fin, el momento sumario de las fuerzas externas desempeña el papel de fuerza resultante.

La suma de las expresiones (38.2) nos proporciona el momento de la cantidad de movimiento del sólido con relación al punto O (véase la fig. 38.1):

$$\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i = \Sigma m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i]. \tag{38.9}$$

En el caso general, la dirección del vector $\mathbf{M}$ no coincide con el eje de rotación z del sólido y gira junto con éste en torno de dicho eje describiendo un cono (fig. 38.2).

De las consideraciones de simetría, queda claro que para un cuerpo homogéneo [1]) simétrico en lo que atañe al eje de rotación (para un sólido de revolución homogéneo), en momento de la cantidad de movimiento con relación al punto O, que yace en el eje de rotación, coincide en dirección con el vector $\boldsymbol{\omega}$. En semejante caso, el módulo del momento de la cantidad de movimiento M es igual a $|M_z|$, es

[1]) En mecánica se llama homogéneo un cuerpo con igual densidad por todo su volumen (véase el § 39).

decir, al módulo de la proyección de **M** sobre el eje z. Tomando en consideración la expresión (38.7), obtenemos

$$M = I \mid \omega_z \mid = I\omega.$$

Para terminar, teniendo en cuenta que los vectores **M** y **ω** tienen igual dirección, llegamos a la correlación

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{38.10}$$

Cabe recordar, que a diferencia de la correlación (38.7), válida para todo el sólido, (38.10) sólo sirve en el caso de un sólido que gira

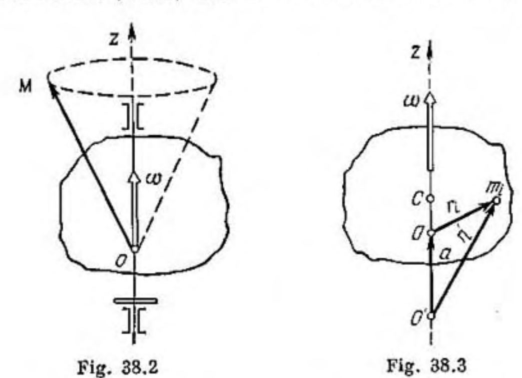


Fig. 38.2 Fig. 38.3

alrededor del eje de simetría y, como veremos más adelante, es válida también para un sólido asimétrico que gira alrededor de uno de sus ejes fundamentales de inercia.

Cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa C del sólido, el valor del momento **M** no depende de la posición del punto O en el eje de rotación, respecto del cual dicho momento se toma. En efecto, tomemos en el eje de rotación los puntos O y O', distanciados entre sí por el segmento **a** (fig. 38.3). En la figura vemos que $\mathbf{r}_i' = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$. El momento de la cantidad de movimiento con relación al punto O'

$$\mathbf{M}' = \sum m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_i] = \sum m_i [(\mathbf{a} + \mathbf{r}_i), \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{a}, \mathbf{v}_i] + \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i].$$

El segundo sumando del segundo miembro es el momento de la cantidad de movimiento **M** con relación al punto O. El primer sumando se puede transformar del modo siguiente:

$$\sum m_i [\mathbf{a}, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, \sum m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, m\mathbf{v}_C].$$

Como el centro de masas yace en el eje de rotación $\mathbf{v}_C = 0$, por lo que $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Para un sólido homogéneo que gira alrededor del eje de simetría, la independencia de $\mathbf{M}$ de la posición del punto O se desprende del tipo de la fórmula (38.10).

Cuando un cuerpo homogéneo simétrico gira alrededor de un eje vertical, en los cojinetes no surgen fuerzas de presión lateral (véase la fig. 38.1). Al no haber fuerza de la gravedad, los cojinetes podrían ser retirados, ya que incluso sin ellos el eje conservaría su posición en el espacio. Recibe el nombre de *eje libre* de un sólido, aquel cuya posición en el espacio queda invariable cuando alrededor de él el sólido gira no habiendo fuerzas externas.

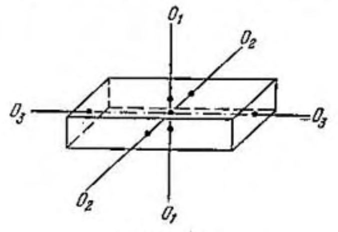


Fig. 38.4

Puede ser demostrado, que para un cuerpo de cualquier forma con distribución arbitraria de la masa, existen tres ejes perpendiculares entre sí, que pasan por el centro de masas y que pueden servir de ejes libres; se denominan *ejes principales de inercia* del sólido.

En un paralelopípedo homogéneo (fig. 38.4), los ejes principales de inercia serán, por lo visto, O_1O_1, O_2O_2 y O_3O_3, que pasan por los centros de las caras opuestas.

En un sólido con simetría axial (por ejemplo, en un cilindro homogéneo [1])) uno de los ejes principales de inercia es el de simetría, pudiendo ser otros cualesquiera dos ejes perpendiculares entre sí que yacen en un plano perpendicular al eje de simetría y que pasan por el centro de masas del sólido (fig. 38.5). De este modo, en un cuerpo con simetría axial sólo está fijado uno de los ejes principales de inercia.

En un sólido con simetría central, es decir, una esfera, cuya densidad sólo depende de la distancia desde el centro, los ejes principales de inercia son tres cualesquiera ejes perpendiculares entre sí que pasan por el centro de masas. Esto significa, que ninguno de los ejes principales de inercia está fijado.

Reciben el nombre de *momentos principales de inercia* de un sólido, aquellos que se crean respecto de los ejes principales. En el caso general, estos momentos son diferentes: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Para un sólido con simetría axial dos momentos principales de inercia tienen el mismo valor, mientras que el tercero difiere de ellos: $I_1 = I_2 \neq I_3$. Por fin, para un sólido con simetría central los tres momentos principales de inercia son iguales: $I_1 = I_2 = I_3$.

[1]) Es suficiente que la densidad del sólido en cada sección sea sólo función de la distancia desde el eje de simetría.

No sólo una esfera homogénea posee iguales valores de los momentos principales de inercia, esta propiedad también es propia de un cubo homogéneo, semejante igualdad puede observarse en sólidos de forma arbitraria en absoluto, si la masa está distribuida de la forma correspondiente. Todos los sólidos de este tipo reciben el nombre de *peonzas esféricas*. Para ellas es característico que cualquier eje que pasa por el centro de masas tiene propiedades del eje libre y, por

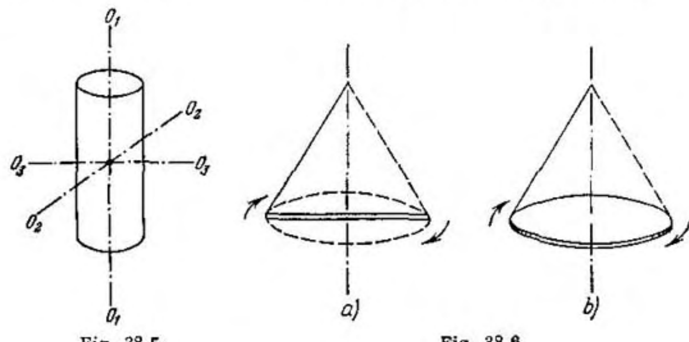


Fig. 38.5

Fig. 38.6

lo tanto, como para la esfera, ninguno de los ejes principales de inercia está fijado. Todas las peonzas esféricas se comportan del mismo modo durante su rotación en iguales condiciones.

Los sólidos para los que $I_1 = I_2 \neq I_3$ se comportan como sólidos homogéneos de revolución y son denominados *peonzas simétricas*. Por fin, los sólidos con $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ se llaman *peonzas asimétricas*.

Cuando un sólido gira sin que sobre él actúe ningún influjo externo, sólo será estable la rotación en torno de los ejes principales, que corresponden a los valores máximo y mínimo del momento de inercia. Por lo contrario, será inestable la rotación alrededor de un eje que corresponde a un momento intermedio en magnitud. Esto significa, que las fuerzas que surgen con la menor desviación del eje de rotación del eje principal, actúan en una dirección tal que el valor de la desviación crece. Al desviarse la rotación del eje estable, bajo la acción de las fuerzas que en tal caso surgen, él retorna por sí mismo a la rotación en torno del correspondiente eje principal.

Podemos cerciorarnos de lo dicho si intentamos lanzar cierto cuerpo, que tenga la forma de un paralelepípedo (por ejemplo, una caja de cerillas), poniéndola al mismo tiempo en rotación [1]). Con

[1]) La acción de la fuerza de la gravedad no será en este caso determinante. Ésta sólo condicionará la caída del sólido, que transcurre junto con la rotación.

ello, se advertirá que al caer el cuerpo puede girar de forma estable alrededor de los ejes que pasan por las caras mayores o menores. Los intentos de lanzar el cuerpo de manera que gire en torno del eje que pasa por las caras medias, serán infructuosos.

Al haber influjo del exterior, por ejemplo, en lo que atañe a un hilo del que está suspendido el sólido en rotación, sólo es estable el giro alrededor del eje principal, que corresponde al valor máximo del momento de inercia. Por esta misma causa, una barra fina suspendida de un hilo, sujeto por uno de sus extremos, durante la rotación rápida girará, al fin de cuentas, en torno de un eje perpendicular a ella misma y que pasa por su centro (fig. 38.6, *a*). De modo análogo se comporta un disco suspendido de hilo sujeto en su borde (fig. 38.6, *b*).

Hasta el momento hemos hablado de sólidos con distribución invariable de la masa. Supongamos ahora que el sólido puede perder durante cierto tiempo la propiedad de invariabilidad de la disposición mutua de sus partes, con la particularidad de que en el transcurso de dicho tiempo se produce la redistribución de la masa del sólido, a causa de cual el momento de inercia varía desde el valor I_1 hasta I_2. Si semejante redistribución se realiza en condiciones cuando $\sum \mathbf{N}_{ext} = 0$, de acuerdo con el principio de conservación del momento de cantidad de movimiento, debe cumplirse la igualdad

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (38.11)$$

donde ω_1 es el valor inicial de la velocidad angular del sólido, ω_2, la velocidad final. Así, pues, la variación del momento de inercia provoca el correspondiente cambio de la velocidad angular. Por regla, esto se explica mostrando un fenómeno que consiste en que un hombre estando de pie en un banco giratorio, al poner las manos en cruz gira más lentamente que al apretarlas al pecho, en este último caso la velocidad de rotación aumenta.

§ 39. Momento de inercia

De la definición (véase (38.6))

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2 \text{ [1]}$$

se deduce que el momento de inercia es una magnitud aditiva. Esto quiere decir, que dicho momento de un sólido es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes.

La noción de momento de inercia fue introducida al estudiar la rotación de un sólido. Pero hay que tener en cuenta que esta magnitud existe independientemente de la rotación. Cada sólido, independientemente de si está en rotación o en reposo, posee cierto momento de

[1] En este parágrafo es conveniente designar la masa elemental del sólido con el símbolo Δm_i en vez de m_i.

inercia respecto de cualquier eje, lo mismo que un sólido tiene masa sin depender de si está en movimiento o en reposo.

La distribución de la masa en los límites del sólido puede ser caracterizada por una magnitud llamada *densidad*. Cuando el sólido es homogéneo, es decir, en el caso cuando por todos sus puntos las propiedades de éste son iguales, llamamos densidad a una magnitud igual a

$$\rho = m/V, \tag{39.1}$$

donde m es la masa del sólido y V, su volumen. Así, pues, para un sólido homogéneo, la densidad es la masa por unidad de volumen del mismo.

Para un sólido con la masa distribuida no uniformemente, la expresión (39.1) proporciona la densidad media. En tal caso, para el punto dado la densidad se define del modo siguiente:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{39.2}$$

En esta expresión Δm es la masa contenida en el volumen ΔV, que durante el paso al límite se concentra en el punto donde se determina la densidad.

El paso al límite (39.2) no debe entenderse como ΔV literalmente se concentra en un punto. Al entenderlo así, para dos puntos que, prácticamente, coinciden, uno de los cuales se halla en el núcleo de un átomo y el otro, en el intervalo entre los núcleos, obtendríamos resultados que en mucho se diferenciarían (para el primer punto una enorme magnitud, para el segundo, cero). Por esta causa, la distribución de ΔV debe efectuarse hasta que se obtenga un volumen que desde el *punto de vista de la física* sea infinitamente pequeño. Por semejante volumen se entiende un volumen que, por un lado, sea suficientemente pequeño para que las propiedades macroscópicas (o sea, tales que son propias de un gran conjunto de átomos) en sus márgenes puedan ser consideradas iguales, mientras que, por otro lado, suficientemente grande para que no surja discontinuidad de la sustancia.

En correspondencia con (39.2) la masa elemental Δm_i es igual al producto de la densidad del sólido ρ_i en el punto dado por el respectivo volumen elemental ΔV_i:

$$\Delta m_i = \rho_i \, \Delta V_i.$$

Por lo tanto, el momento de inercia puede ser representado de la forma siguiente:

$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i. \tag{39.3}$$

Si la densidad del sólido es constante, ésta puede ser sacada tras el signo de la suma:

$$I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i. \tag{39.4}$$

Las correlaciones (39.3) y (39.4) son aproximadas, con la particularidad de que su precisión aumenta al disminuir los volúmenes elementales ΔV_i y las masas elementales Δm_i que a aquéllos corresponden. Por consiguiente, el problema de la definición de los momentos de inercia se reduce a la integración:

$$I=\int R^2\,dm=\int \rho R^2\,dV. \tag{39.5}$$

Las integrales en (39.5) se toman por todo el volumen del sólido. Las magnitudes ρ y R son en estas integrales funciones de un punto, o sea, por ejemplo, de las coordenadas cartesianas x, y, z.

Aduzcamos como ejemplo la determinación del momento de inercia de un disco homogéneo respecto del eje perpendicular al plano

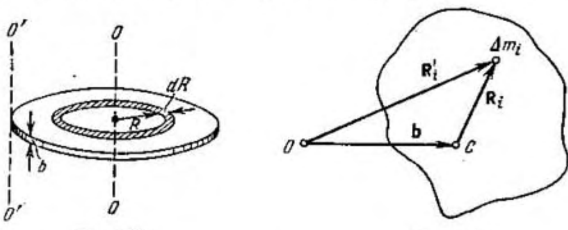


Fig. 39.1

Fig. 39.2

del disco y que pasa por su centro (fig. 39.1). Dividamos el disco en capas anulares de grosor dR. Todos los puntos de una capa se hallarán a la misma distancia del eje, igual a R. El volumen de semejante capa

$$dV=b2\pi R\,dR,$$

donde b es el grosor del disco. Como éste es homogéneo, su densidad es idéntica en todos los puntos y ρ en (39.5) puede sacarse tras el signo de la integral:

$$I=\rho\int R^2\,dV=\rho\int_0^{R_0} R^2 b2\pi R\,dr,$$

donde R_0 es el radio del disco. Saquemos el factor constante $2\pi b$ tras el signo de integración:

$$I=2\pi b\rho\int_0^{R_0} R^3\,dR=2\pi b\rho\,\frac{R_0^4}{4}.$$

Por fin, introduciendo la masa del disco m, igual al producto de la densidad ρ por el volumen del disco $b\pi R_0^2$, obtenemos:

$$I=\frac{mR_0^2}{2}. \tag{39.6}$$

En el ejemplo analizado, la determinación del momento de inercia se simplificó a causa de que el sólido era homogéneo y simétrico y el momento de inercia se definía con relación al eje de simetría. Si quisiéramos hallar el momento de inercia del disco en lo que atañe, por ejemplo, al eje $O'O'$, perpendicular al sólido y que pasa por su borde (véase la fig. 39.1), los cálculos serían, sin duda alguna, mucho más complicados. En semejantes casos, la definición del momento de inercia se simplifica de forma considerable haciendo uso del *teorema de Steiner*, que se enuncia de la manera siguiente: *el momento de inercia I con relación a un eje tomado al azar es igual a la suma del momento de inercia I_C, respecto de un eje paralelo al dado y que pasa por el centro de masas del cuerpo, más el producto de la masa del cuerpo m por el cuadrado de la distancia a entre los ejes*:

$$I = I_C + ma^2. \tag{39.7}$$

De acuerdo con el teorema de Steiner, el momento de inercia de un disco respecto del eje $O'O'$ es igual al momento de inercia que hemos hallado (39.6) con relación al eje que pasa por el centro del disco, más mR_0^2 (la distancia entre los ejes $O'O'$ y OO es igual al radio del disco R_0):

$$I = \frac{mR_0^2}{2} + mR_0^2 = \frac{3}{2} mR_0^2.$$

Así pues, en esencia el teorema de Steiner reduce la determinación del momento de inercia respecto de un eje arbitrario, al cálculo de dicho momento con relación a un eje que pasa por el centro de masas del sólido.

Para demostrar el teorema de Steiner consideremos el eje C que pasa por el centro de masas de un sólido y el eje O paralelo al primero y que dista de él a una distancia a (fig. 39.2; los dos ejes son perpendiculares al plano de la figura). Designemos con $\mathbf{R}_i$ un vector perpendicular al eje C, trazado desde éste a la masa elemental Δm_i y con $\mathbf{R}_i'$, un vector análogo trazado desde el eje O. Introduzcamos también un vector $\mathbf{a}$ perpendicular a los ejes que une los correspondientes puntos de los ejes O y C. Para cualquier par de puntos opuestos, este vector tiene igual magnitud (igual a la distancia a entre los ejes), e igual dirección. Entre los vectores enumerados hay la siguiente correlación

$$\mathbf{R}_i' = \mathbf{a} + \mathbf{R}_i.$$

El cuadrado de la distancia desde el eje C a la masa elemental Δm_i, es igual a $R_i^2 = \mathbf{R}_i^2$, mientras que desde el eje O:

$$R_i'^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{R}_i)^2 = a^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_i + R_i^2.$$

Teniendo en cuenta la última correlación, el momento de inercia respecto del eje O puede ser representado en la forma

$$I = \sum \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\mathbf{a} \sum \Delta m_i \mathbf{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2 \tag{39.8}$$

(los factores constantes se sacan tras el signo de la suma). El último término de esta expresión es el momento de inercia del sólido en lo que atañe al eje C. Vamos a designarlo con I_C. La suma de las masas elementales nos proporciona la masa del sólido m. La suma $\sum \Delta m_i \mathbf{R}_i$ es igual al producto de la masa del sólido por el vector $\mathbf{R}$, trazado

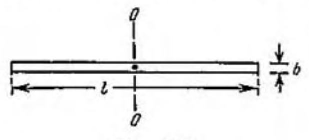


Fig. 39.3

desde el eje C al centro de masas del sólido. Como el centro de inercia yace en el eje C, dicho vector $\mathbf{R}$ y, por consiguiente, todo el segundo término en (39.8) son iguales a cero. De este modo, llegamos a la conclusión de que

$$I = ma^2 + I_C,$$

que es lo queríamos demostrar (véase (39.7)).

Para finalizar, aduciremos los valores de los momentos de inercia de ciertos sólidos (se supone que los sólidos son homogéneos, m es la masa del sólido).

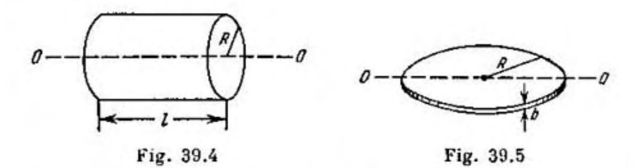


Fig. 39.4 Fig. 39.5

1. El cuerpo es una barra fina y larga con sección de cualquier forma. La dimensión transversal máxima de la barra b es mucho menor que su longitud l ($b \ll l$). El momento de inercia respecto de un eje perpendicular al de la barra y que pasa por su mitad (fig. 39.3) es igual a

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Para un disco o cilindro, con cualquier razón entre R y l (fig. 39.4), el momento de inercia respecto de un eje que coincide con el eje geométrico del cilindro,

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. El cuerpo es un fino disco. El grosor de éste b es mucho menor que su radio R ($b \ll R$). El momento de inercia con relación a un eje que coincide con el diámetro del disco (fig. 39.5) es igual a

$$I = \frac{1}{4} mR^2.$$

4. El momento de inercia de una esfera de radio R respecto de un eje que pasa por su centro

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

§ 40. Concepto de tensor de inercia

En el § 38 fue establecido que para un cuerpo homogéneo que gira en torno del eje de simetría, la relación entre los vectores $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ tiene una forma muy sencilla:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (40.1)$$

(véase (38.10)) o bien

$$M_x = I\omega_x, \quad M_y = I\omega_y, \quad M_z = I\omega_z. \qquad (40.2)$$

Esto se explica por el hecho de que para semejante sólido los vectores $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son colineares. Sin embargo, en el caso general los vectores $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ forman un ángulo diferente de cero (véase la fig. 38.2), de manera que la ligazón entre ellos no puede ser expresada por la fórmula (40.1).

Intentemos aclarar cómo es posible ligar de forma analítica los vectores $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ en el caso más general. Vamos a partir de que los módulos de $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son proporcionales entre sí. En efecto, de acuerdo con (38.3) los módulos de los vectores elementales $\mathbf{M}_i$ son proporcionales al módulo de $\boldsymbol{\omega}$, por lo que el módulo de la suma de estos vectores también será proporcional a $\boldsymbol{\omega}$. Es fácil comprender, que tal proporcionalidad tendrá lugar si cada una de las componentes del vector $\mathbf{M}$ dependa linealmente de las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ M_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ M_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \qquad (40.3)$$

Las magnitudes I_{xx}, I_{xy}, etc., son aquí coeficientes de proporcionalidad que tienen la dimensión del momento de inercia (comp. con (40.2)). Al aumentar $\boldsymbol{\omega}$ cierto número de veces, cada una de sus componentes ω_x, ω_y, ω_z aumentará igual número de veces, lo mismo que cada una de las componentes M_x, M_y, M_z, por lo tanto, el propio vector $\mathbf{M}$ aumentará en igual magnitud.

La orientación mutua de los vectores $\mathbf{M}$ y $\boldsymbol{\omega}$ determínase por los valores de los coeficientes de proporcionalidad. Sea, por ejemplo,

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$, mientras que los demás coeficientes son nulos. En tal caso, las fórmulas (40.3) se convierten en las correlaciones (40.2), es decir, los vectores **M** y **ω** resultan ser colineares. Supongamos ahora, que el vector **ω** está dirigido a lo largo del eje z y que los coeficientes I_{xz}, I_{yz}, I_{zz} se diferencian de cero. Entonces, $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. La sustitución de estos valores en (40.3) nos ofrece

$$M_x = I_{xz}\omega \neq 0, \quad M_y = I_{yz}\omega \neq 0, \quad M_z = I_{zz}\omega \neq 0.$$

Las tres componentes del vector **M** han resultado ser diferentes de cero, lo que quiere decir que el vector **M** forma cierto ángulo con el vector **ω**, dirigido por el eje z.

De lo dicho se desprende que en el caso más general, la relación entre el momento de la cantidad de movimiento y la velocidad angular del sólido, puede ser expresada con ayuda de las fórmulas (40.3). Fórmulas análogas pueden ser escritas para cualesquiera vectores **a** y **b**, cuyos módulos con proporcionales entre sí:

$$\begin{aligned} b_x &= T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z, \\ b_y &= T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z, \\ b_z &= T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z. \end{aligned} \qquad (40.4)$$

Estas fórmulas se puede escribir de forma más compacta, como una sola expresión

$$b_i = \sum_{k=x,\,y,\,z} T_{ik}a_k \quad (i = x,\, y,\, z). \qquad (40.5)$$

Haciendo $i = x$ y después de realizar la suma, con la que el índice k adquiere los valores x, y, z, obtenemos la primera fórmula (40.4), haciendo $i = y$, la segunda, etc.

El conjunto de nueve magnitudes T_{xx}, T_{xy}, . . ., T_{zz} recibe el nombre de *tensor de segundo rango* [1]), mientras que la operación expresada con las fórmulas (40.4), recibe el nombre de multiplicación del vector **a** por el tensor **T**. Como resultado de semejante multiplicación se obtiene un nuevo vector **b**.

Se ha adoptado escribir el tensor en forma de una tabla cuadrada:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \qquad (40.6)$$

(en lugar de x, y, z pueden escribirse los índices 1, 2, 3). Las magnitudes T_{xx}, T_{xy}, . . . denomínanse *componentes* del tensor. Las componentes T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, dispuestas por la diagonal de la tabla (40.6),

[1]) Se llama tensor de segundo rango el conjunto de nueve magnitudes T_{xx}, T_{xy}, . . ., T_{zz} que al girar los ejes de coordenadas según determinadas reglas se transforman (véase el Apéndice III).

se llaman *diagonales*. Los valores de las componentes dependen de la elección de los ejes de coordenadas sobre los que se proyectan los vectores **a** y **b** (de la elección de los ejes dependen también las componentes de estos vectores).

De la comparación de las fórmulas (40.3) y (40.4) sigue que los coeficientes en las fórmulas (40.3) son las componentes del tensor de segundo rango:

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (40.7)$$

Este se denomina *tensor de inercia* de un sólido, que caracteriza las propiedades de inercia de éste durante la rotación.

Fig. 40.1

Para hallar los valores de las componentes del tensor de inercia, partiremos de la determinación de momento de la cantidad de movimiento del sólido:

$$\mathbf{M}=\sum m_i\,[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{v}_i] \qquad (40.8)$$

(véase (38.9)). Tracemos los vectores $\mathbf{r}_i$ desde el centro de masas del sólido (fig. 40.1). Sustituyamos en la expresión (40.8) la velocidad $\mathbf{v}_i$ por el producto vectorial $[\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{r}_i]$ (véase la fórmula (5.8)). Como resultado obtenemos

$$\mathbf{M}=\sum m_i\,[\mathbf{r}_i\,[\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{r}_i]].$$

Ahora hagamos uso de la fórmula «bac menos cab» (fórmula (2.35)):

$$\mathbf{M}=\sum m_i\,\{\boldsymbol{\omega}\,(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i)-\mathbf{r}_i\,(\mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega})\}. \qquad (40.9)$$

Cabe recordar que la suma se efectúa por todas las masas elementales, en las que mentalmente hemos dividido el sólido.

Liguemos al sólido un sistema cartesiano de coordenadas [1]) (véase la fig. 40.1) y escribamos los productos escalares, que figuran en la expresión (40.9), con ayuda de las componentes de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_i$ por los ejes de dicho sistema (véase (2.23)). Ubiquemos en el centro de masas C del sólido el origen de coordenadas (recordemos que desde ese punto hemos trazado los vectores $\mathbf{r}_i$). Teniendo en cuenta que $r_{xi}=x_i$, $r_{yi}=y_i$, $r_{zi}=z_i$, tendremos:

$$\mathbf{M}=\sum m_i\,\{\boldsymbol{\omega}\,(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\mathbf{r}_i\,(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)\}. \qquad (40.10)$$

[1]) Remarquemos, que los ejes de este sistema están rígidamente unidos al sólido y giran junto con él.

Hallemos la proyección de este vector sobre el eje x:

$$M_x = \sum m_i \{\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\} =$$
$$= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i. \quad (40.11)$$

De forma análoga se hallan las proyecciones del vector **M** en los ejes y, z:

$$M_y = -\omega_x \sum m_i y_i x_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i, \quad (40.12)$$

$$M_z = -\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (40.13)$$

La comparación de las expresiones obtenidas con las fórmulas (40.3) nos permite hallar los valores de las componentes del tensor de inercia. Escribamos de inmediato estos valores en forma de una tabla:

$$I = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (40.14)$$

Las componentes diagonales del tensor son los momentos de inercia respecto de los correspondientes ejes de coordenadas estudiados en el parágrafo anterior. Estas componentes reciben el nombre de *momentos de inercia axiales*. Las componentes no diagonales denomínanse *momentos de inercia centrífugos*. Cabe indicar, que las componentes no diagonales del tensor (40.14) satisfacen la condición: $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$. El tensor que satisface semejante condición se llama *simétrico*.

Prácticamente, las componentes del tensor de inercia se calculan integrando. Por ejemplo, la componente I_{xx} se determina por la fórmula

$$I_{xx} = \int \rho (x, y, z) (y^2 + z^2) \, dV,$$

donde $\rho (x, y, z)$ es la densidad, dV, el volumen elemental. La integración se realiza por todo el volumen del sólido.

Hallemos las componentes del tensor de inercia para un paralelepípedo rectangular homogéneo, eligiendo los ejes de coordenadas como se muestra en la fig. 40.2. El origen de coordenadas coincide con el centro de masas C del sólido. Para calcular el momento axial de inercia I_{zz} dividimos el sólido en bandas con área de la base $dx\,dy$. Todos los elementos de la banda tienen los mismos valores de las coordenadas x e y. El volumen de la banda es igual a $2c\,dx\,dy$, mientras que su masa $dm = \rho 2c\,dx\,dy$. Por esta causa, la aportación de la banda en I_{zz} se determina con la expresión

$$dI_{zz\,\text{banda}} = 2\rho c\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Después de integrar esta expresión por x, hallamos la aportación en I_{zz} que proporciona la capa de longitud $2a$, anchura $2c$ y grosor dy, mostrada en la fig. 40.2:

$$dI_{zz\,\text{capa}} = \int_{-a}^{+a} 2\rho c\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\rho c\,dy \int_{-a}^{+a} x^2\,dx +$$

$$+ 2\rho c y^2\,dy \int_{-a}^{+a} dx = \left(\frac{4}{3}\rho c a^3 + 4\rho c a y^2\right) dy \qquad (40.15)$$

(como el sólido es homogéneo, ρ no depende de las coordenadas x, y, z).

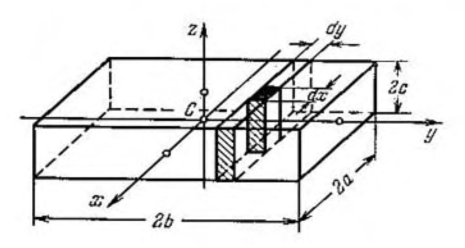


Fig. 40.2

Por fin, integrando la expresión (40.15) por y, obtenemos I_{zz} de todo el cuerpo:

$$I_{zz} = \int_{-b}^{+b} \left(\frac{4}{3}\rho c a^3 + 4\rho c a y^2\right) dy =$$

$$= \frac{4}{3}\rho c a^3 \int_{-b}^{+b} dy + 4\rho c a \int_{-b}^{+b} y^2\,dy = \frac{8}{3}\rho c a^3 b + \frac{8}{3}\rho c a b^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\rho\,(2a)\,(2b)\,(2c)\,(a^2+b^2) = \frac{1}{3} m\,(a^2+b^2)$$

(m es la masa del sólido). Cálculos análogos nos ofrecen

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m\,(b^2+c^2), \quad I_{yy} = \frac{1}{3} m\,(a^2+c^2).$$

Calculemos ahora uno de los momentos centrífugos, por ejemplo, I_{xy}. La aportación de una banda con base $dx\,dy$ en dicho momento es igual a

$$dI_{xy\,\text{banda}} = -\rho x y 2c\,dx\,dy,$$

y la aportación de la capa

$$dI_{xy\,\text{capa}} = -2\rho cy\,dy\int_{-a}^{+a} x\,dx = 0.$$

De acuerdo con este resultado, el momento de todo el sólido también es nulo. Un resultado análogo obtenemos para los demás momentos centrífugos. De este modo, con la elección de los ejes de coordenadas mostrada en la fig. 40.2, el tensor del momento de inercia de un paralelepípedo rectangular homogéneo, tiene el aspecto

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \qquad (40.16)$$

(hemos conservado en cada componente diagonal un solo índice).

Semejante resultado se obtiene gracias a que en calidad de ejes de coordenadas fueron elegidos los ejes principales de inercia del

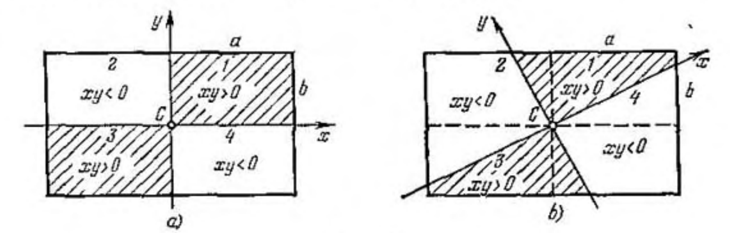


Fig. 40.3

sólido (véase el § 38). Al elegir los ejes de coordenadas de otro modo, los momentos centrífugos de inercia resultan ser diferentes de cero. Podemos cerciorarnos de esto con ayuda de los siguientes razonamientos. Con la elección de los ejes mostrada en la fig. 40.3, *a*, las áreas de los rectángulos *1*, *2*, *3* y *4* son iguales. En dos de ellos el producto xy es positivo, en los otros dos, negativo. Esto conduce a que la integral de xy, tomada por toda el área, resulta ser igual a cero. Con la elección de los ejes, mostrada en la fig. 40.3, *b*, las áreas de las figuras *1* y *3* sombreadas, son menores que las áreas de las figuras no sombreadas *2* y *4* ($a > b$). Por esta razón, la integral de dx, tomada por el área sumaria, será diferente de cero. Del correspondiente modo, tampoco será nulo el momento centrífugo I_{xy}.

El resultado obtenido es general para todos los sólidos, independientemente de su forma y distribución de la masa. Si tomamos como ejes de coordenadas los ejes principales de inercia del sólido, el tensor de inercia tiene la forma (40.16). Las magnitudes I_x, I_y, I_z

(pero no I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} en (40.7); al girar los ejes de coordenadas varían todas las componentes del tensor, incluidas las diagonales) reciben el nombre de *momentos principales de inercia* del sólido. Cabe remarcar, que dichos momentos denomínanse momentos axiales calculados no en ejes arbitrarios, sino que en los principales.

Los ejes principales de inercia son perpendiculares entre sí y se cruzan en el centro de masas del sólido. En el caso general (cuando $I_x \neq I_y \neq I_z$) estos ejes se pueden elegir según un solo procedimiento. Para la peonza esférica (es decir, para un sólido en el que $I_x = I_y = I_z$; véase el § 38) la posición de los ejes principales resulta ser por completo indeterminada. En la peonza simétrica ($I_x = I_y \neq \neq I_z$) sólo está fijado el eje z, los otros dos son indeterminados.

Supongamos que el sólido gira alrededor de uno de sus ejes principales de inercia, digamos, en torno del eje z. Tomando los ejes principales como ejes de coordenadas, obtenemos $\omega_z = \omega$, $\omega_x = = \omega_y = 0$. Como con semejante elección de los ejes de coordenadas, el tensor de inercia tiene la forma (40.16), las fórmulas (40.3) nos conducen a los siguientes valores de las componentes del momento de la cantidad de movimiento:

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = I_z\omega.$$

Por lo tanto, el vector **M** tiene la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$. Igual resultado obtenemos al girar el sólido alrededor de otros ejes principales. En todos esos casos

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{40.17}$$

donde I es el correspondiente momento de inercia del sólido. En el § 38 obtuvimos esta fórmula para un sólido homogéneo en rotación alrededor de su eje de simetría (véase (38.10)). Ahora hemos establecido que la fórmula (40.17) es justa en aquellos casos, cuando un sólido tomado al azar gira en torno de una de sus ejes principales de inercia.

En conclusión, aclaremos en qué casos la fórmula $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$ (véase (38.1)), que siempre es válida, puede ser escrita en la forma

$$I\boldsymbol{\beta} = \mathbf{N}. \tag{40.18}$$

Por lo visto, podemos hacer esto, ante todo, cuando el sólido gira cerca del eje principal y el momento de fuerza **N** está dirigido a lo largo de dicho eje. En efecto, en tal caso el momento **N** provoca el incremento de $d\mathbf{M}$, colinear a **M** ($d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt$). Por esta causa, la rotación siempre transcurre en torno del eje principal, de forma que la correlación $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ no se viola. No obstante, en tal caso la fórmula vectorial (40.18) nada nuevo nos ofrece en comparación con la fórmula

$$I\beta_z = N_z \tag{40.19}$$

(z es el eje de rotación).

Cuando **N** no es colinear a **M** (por ejemplo, para **N** perpendicular a **M**), con el tiempo, el eje de rotación se desplaza con relación al sólido; por esta razón, incluso cuando la correlación $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ se cumple en el momento inicial, con el tiempo dicha correlación deja de cumplirse y la ecuación (40.18) pierde su sentido. Sólo cuando el sólido es una peonza esférica, no tiene importancia el desplazamiento del eje de rotación respecto del cuerpo. Para la peonza esférica, cualesquiera de los ejes es principal y tiene el mismo valor que el momento de inercia I; por esto, la ecuación (40.18) es justa con cualquier dirección mutua de los vectores **N** y $\boldsymbol{\omega}$.

§ 41. Energía cinética de un sólido en rotación

Comencemos examinando la rotación de un sólido alrededor de un eje inmóvil que vamos a llamar z (fig. 41.1). La velocidad lineal de la masa elemental m_i es igual a $v_i = \omega R_i$, donde R_i es la distancia desde la masa m_i al eje z. Por consiguiente, para la energía cinética de la i-ésima masa elemental, se obtiene la expresión

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

La energía cinética del sólido se compone de las energías cinéticas de sus partes:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

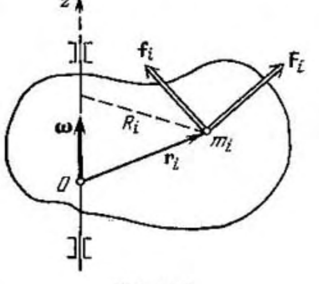


Fig. 41.1

La suma en el segundo miembro de esta correlación es el momento de inercia I del sólido con relación al eje de rotación. Así, pues, la energía cinética de un sólido que gira en torno de un eje inmóvil, es igual a

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{41.1}$$

Sea que sobre la masa m_i actúan [1] la fuerza interna $\mathbf{f}_i$ y la fuerza externa $\mathbf{F}_i$ (véase la fig. 41.1). De acuerdo con (20.5) estas fuerzas realizan durante el tiempo dt un trabajo

$$dA_i = \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i \, dt + \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i \, dt = \mathbf{f}_i \, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] \, dt + \mathbf{F}_i \, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] \, dt.$$

[1] La fuerza resultante $\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i$ yace en un plano perpendicular al eje de rotación.

Después de realizar en los productos mixtos de los vectores la permutación cíclica de los factores (véase (2.34)), tenemos

$$dA_i = \boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{f}_i]\,dt + \boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_i]\,dt = \boldsymbol{\omega}\mathbf{N}_i^{(\mathrm{int})}\,dt + \boldsymbol{\omega}\mathbf{N}_i\,dt, \quad (41.2)$$

donde $\mathbf{N}_i^{(\mathrm{int})}$ es el momento de la fuerza interna respecto del eje O, $\mathbf{N}_i$, momento análogo de la fuerza externa.

Al sumar la expresión (41.2) por todas las masas elementales, se obtiene el trabajo elemental que se realiza sobre el sólido durante el tiempo dt:

$$dA = \sum dA_i = \boldsymbol{\omega}\,\{\sum \mathbf{N}_i^{(\mathrm{int})}\}\,dt + \boldsymbol{\omega}\,\{\sum \mathbf{N}_i\}\,dt.$$

La suma de los momentos de las fuerzas internas es igual a cero (véase (29.17)). Por lo tanto, designando el momento sumario de las fuerzas externas por $\mathbf{N}$, llegamos a la expresión

$$dA = \boldsymbol{\omega}\mathbf{N}\,dt = \omega N_\omega\,dt \quad (41.3)$$

(hemos hecho uso de la fórmula (2.21)). Por fin, tomando en consideración que $\omega\,dt$ es el ángulo $d\varphi$, al que gira el sólido durante el tiempo dt tenemos:

$$dA = N_\omega\,d\varphi. \quad (41.4)$$

El signo del trabajo depende del signo de N_ω, es decir, del signo de la proyección del vector $\mathbf{N}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$.

Así, pues, cuando un sólido gira, las fuerzas internas no realizan trabajo y el de las fuerzas externas se determina por la fórmula (41.4).

A la fórmula (41.4) podemos llegar haciendo uso de que el trabajo realizado por todas las fuerzas aplicadas al sólido se dirige al incremento de su energía cinética (véase (19.11)). Tomando la diferencial de los dos miembros de la igualdad (41.1), llegamos a la correlación

$$dT = d\,(I\omega^2/2) = d\,(I\boldsymbol{\omega}^2/2) = I\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega\beta}\,dt =$$
$$= I\omega\beta_\omega\,dt = I\beta_\omega\,d\varphi.$$

De acuerdo con (38.8) $I\beta_\omega = N_\omega$, de forma que sustituyendo dT por dA llegamos a la fórmula (41.4).

En la tabla 41.1 se comparan las fórmulas de mecánica del movimiento de rotación con las fórmulas análogas del movimiento de traslación (mecánica del punto). De esta comparación es fácil concluir que en todos los casos, el papel de masa es desempeñado por el momento de inercia, el papel de fuerza, por el momento de fuerza, el papel de cantidad de movimiento, por el momento de la cantidad de movimiento, etc.

La fórmula (41.1) ha sido obtenida para el caso, cuando el sólido gira alrededor de un eje inmóvil fijado en el sólido. Supongamos ahora, que el sólido gira de forma arbitraria con relación a un punto inmóvil que coincide con su centro de masas. Liguemos de forma

Tabla 41.1

Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
$\mathbf{v}$ — velocidad lineal	ω — velocidad angular
$\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}$ — aceleración lineal m — masa $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ — cantidad de movimiento	$\beta=\dot{\omega}$ — aceleración angular I — momento de inercia $M_z=I\omega_z$ — momento de la cantidad de movimiento*)
$\mathbf{F}$ — fuerza	$\mathbf{N}$ o N_z — momento de fuerza
$\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$ $m\mathbf{w}=\mathbf{F}$ $T=mv^2/2$ $dA=F_s ds=F_v ds$	$\dot{\mathbf{M}}=\mathbf{N}$ $I\beta_z=N_z$*) $T=I\omega^2/2$*) $dA=N_\omega d\varphi$

*) Para un eje inmóvil de rotación

rígida con el sólido un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo origen se ubica en el centro de masas del sólido. La velocidad de la i-ésima masa elemental $\mathbf{v}_i=[\omega\mathbf{r}_i]$. Así, pues, la energía cinética del sólido se puede escribir

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i[\omega\mathbf{r}_i]^2=\frac{1}{2}\sum m_i\omega^2 r_i^2\operatorname{sen}^2\alpha_i,$$

donde α_i es el ángulo entre los vectores ω y $\mathbf{r}_i$. Sustituyendo $\operatorname{sen}^2\alpha_i$ por $1-\cos^2\alpha_i$ y tomando en consideración que $\omega r_i\cos\alpha_i=\omega\mathbf{r}_i$, obtenemos:

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\{\omega^2\mathbf{r}_i^2-(\omega\mathbf{r}_i)^2\}.$$

Escribamos los productos escalares por intermedio de las proyecciones de los vectores ω y $\mathbf{r}_i$ sobre los ejes del sistema de coordenadas relacionado con el cuerpo:

$$\begin{aligned}T=\frac{1}{2}\sum m_i\{(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\\-(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)\}=\\=\frac{1}{2}\sum m_i\{(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\omega_x^2x_i^2-\\-\omega_x\omega_y x_i y_i-\omega_x\omega_z x_i z_i-\omega_y\omega_x y_i x_i-\\-\omega_y^2y_i^2-\omega_y\omega_z y_i z_i-\omega_z\omega_x z_i x_i-\omega_z\omega_y z_i y_i-\omega_z^2 z_i^2\}.\end{aligned}$$

Por fin, uniendo los sumandos con iguales productos de las componentes de la velocidad angular y sacando dichos productos tras el

signo de la suma tenemos:

$$T=\frac{1}{2}\Big\{\omega_x^2\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\omega_y^2\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+$$
$$+\omega_z^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-\omega_x\omega_y\sum m_ix_iy_i-$$
$$-\omega_x\omega_z\sum m_ix_iz_i-\omega_y\omega_x\sum m_iy_ix_i-$$
$$-\omega_y\omega_z\sum m_iy_iz_i-\omega_z\omega_x\sum m_iz_ix_i-\omega_z\omega_y\sum m_iz_iy_i\Big\}.$$

Las sumas por las que se multiplican los productos de las componentes de la velocidad angular son las componentes del tensor de inercia (véase (40.14)). Por lo tanto, llegamos a la fórmula

$$T=\frac{1}{2}\{I_{xx}\omega_x^2+I_{xy}\omega_x\omega_y+I_{xz}\omega_x\omega_z+I_{yx}\omega_y\omega_x+$$
$$+I_{yy}\omega_y^2+I_{yz}\omega_y\omega_z+I_{zx}\omega_z\omega_x+I_{zy}\omega_z\omega_y+I_{zz}\omega_z^2\}. \qquad (41.5)$$

Esta fórmula puede ser escrita en la forma

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=x,\,y,\,z} I_{ik}\omega_i\omega_k. \qquad (41.6)$$

Durante la suma, los índices i y k, independientemente entre sí, recorren los valores x, y, z.

Si los ejes del sistema de coordenadas relacionado con el sólido se eligen de modo que coincidan con los ejes principales de inercia del sólido, los momentos centrífugos de inercia se anulan y la expresión (41.5) se simplifica de la manera siguiente:

$$T=\frac{1}{2}\{I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2\}. \qquad (41.7)$$

Aquí I_x, I_y, I_z son los momentos principales de inercia del sólido. Para una peonza esférica estos momentos tienen el mismo valor de I, de forma que la fórmula (41.7) toma el aspecto $T = {}^1/_2 I\omega^2$ (comp. con (41.1)). Durante la rotación de un sólido tomado al azar alrededor de uno de los ejes principales de inercia, digamos el eje z, $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ y la fórmula (41.7) se convierte en la (41.1).

Así, pues, en tres casos, la energía cinética de un sólido en rotación, es igual a la mitad del producto del momento de inercia por el cuadrado de la velocidad angular: 1) para un sólido que gira en torno de un eje inmóvil, 2) para un sólido que gira alrededor de uno de los ejes principales de inercia, 3) para la peonza esférica. En los demás casos la energía cinética se determina con las fórmulas más complicadas (41.5) ó (41.7).

§ 42. Energía cinética de un sólido durante el movimiento plano

El movimiento plano de un sólido puede ser representado como la superposición de dos movimientos: de traslación a cierta velocidad $\mathbf{v}_0$ y de rotación alrededor del correspondiente eje a una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (véase el § 36). De acuerdo con la fórmula (36.1) la velocidad de la i-ésima masa elemental del sólido

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i],$$

donde $\mathbf{v}_0$ es la velocidad de cierto punto O del sólido, $\mathbf{r}_i$, el radio vector que determina la posición de la masa elemental respecto del punto O.

La energía cinética de la i-ésima masa elemental

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \{\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]\}^2.$$

Después de elevar al cuadrado, tendremos

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{v_0^2 + 2\mathbf{v}_0 [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]^2\}.$$

El producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ por $\mathbf{r}_i$ tiene módulo igual a ωR_i, donde R_i es la distancia desde el eje de rotación a la masa m_i (véase la fig. 5.5 y el texto que precede a la fórmula (5.8)). Por lo tanto, el tercer sumando entre corchetes es igual a $\omega^2 R_i^2$. Realicemos en el segundo sumando la permutación cíclica de los factores (véase (2.34)). Como resultado llegamos a la expresión

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{v_0^2 + 2 [\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}] \mathbf{r}_i + \omega^2 R_i^2\}. \qquad (42.1)$$

Para obtener la energía cinética del sólido, sumemos la expresión (42.1) por todas las masas elementales, con la particularidad de que hemos de sacar los factores constantes tras los signos de la suma:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + [\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}] \sum m_i \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

La suma de las masas elementales $\sum m_i$ es la suma del sólido m. La expresión $\sum m_i \mathbf{r}_i$ es igual al producto de la masa del sólido por radio vector $\mathbf{r}_C$ del centro de masas del sólido. Por fin, $\sum m_i R_i^2$ es el momento de inercia I_0 del sólido con relación al eje que pasa por el punto O. Por esto, podemos escribir que

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m\mathbf{r}_C [\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \qquad (42.2)$$

Si tomamos el centro de masas C del cuerpo como punto O, el radio vector $\mathbf{r}_C$ será cero, de modo que el segundo sumando desapare-

cerá. Por esto, designando por $\mathbf{v}_C$ la velocidad del centro de masas y por I_C el momento de inercia del sólido en lo que atañe al eje de rotación, que pasa por el punto C, para la energía cinética, obtenemos la fórmula

$$T=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{I_C\omega^2}{2}. \tag{42.3}$$

De este modo, la energía cinética de un sólido durante el movimiento plano se compone de la energía del movimiento de traslación a la velocidad igual a la del centro de masas y la energía de rotación en torno de un eje que pasa por el centro de masas del sólido.

§ 43. Aplicación de las leyes de dinámica del sólido

El movimiento de un sólido se describe con dos ecuaciones:

$$m\mathbf{w}_C=\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}, \tag{43.1}$$

$$\dot{\mathbf{M}}=\sum \mathbf{N}_{\text{ext}} \tag{43.2}$$

(véanse las fórmulas (37.5) y (38.1)). Por lo tanto, el movimiento de un sólido se determina por las fuerzas externas que sobre él actúan y por los momentos de dichas fuerzas.

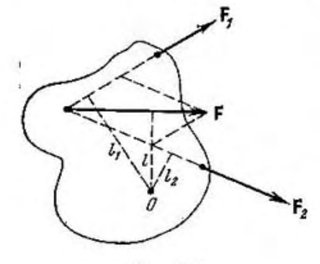


Fig. 43.1

Los momentos de fuerzas se pueden tomar con relación a cualquier punto inmóvil o que se mueve sin aceleración. Tomando el momento de las fuerzas externas respecto de un punto en movimiento con aceleración, escribiríamos, en esencia, la ecuación (43.2) en un sistema no inercial de referencia. En semejante caso, además de las fuerzas externas, condicionadas por la interacción del sólido dado con otros sólidos, hay que tener en cuenta las fuerzas de inercia y sus momentos.

Los puntos de aplicación de las fuerzas, ejercidas sobre el sólido, pueden ser trasladadas a lo largo de las líneas de acción de las fuerzas, ya que con ello no varían ni la suma de las fuerzas, ni tampoco sus momentos (durante el traslado de la fuerza a lo largo de la línea de acción, queda invariable el brazo respecto de cualquier punto). Este hecho permite sustituir varias fuerzas por una sola, equivalente a ellas por la acción que ejerce sobre el sólido. Por ejemplo, dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, que yacen en un mismo plano (fig. 43.1), pueden ser sustituidas por la fuerza $\mathbf{F}$ equivalente a ellas y cuyo punto de aplicación puede

ser también elegido al azar por la dirección a lo largo de la cual ella actúa.

El conjunto de fuerzas paralelas que actúan sobre el cuerpo, puede ser sustituido por su resultante, igual a la suma de todas las fuerzas y aplicada en tal punto del sólido, de forma que su momento sea equivalente a la suma de los momentos de las fuerzas por separado.

Hallemos la resultante de las fuerzas de la gravedad. Estas fuerzas están aplicadas a todos los elementos del sólido, con la particularidad de que sobre la masa elemental m_i actúa la fuerza $m_i\mathbf{g}$. La suma de las fuerzas $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, donde $m = \sum m_i$ es la masa del cuerpo. El momento sumario de las fuerzas de la gravedad respecto de cierto punto O es igual a

$$\mathbf{N} = \sum [\mathbf{r}_i (m_i\mathbf{g})],$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el radio vector que determina la posición de la masa m_i según el punto O. Traspasando el factor escalar m_i del segundo factor al primero y, a continuación, sacando el factor común $\mathbf{g}$ tras el signo de la suma, obtenemos:

$$\mathbf{N} = [(\sum m_i\mathbf{r}_i), \ \mathbf{g}].$$

La suma que se encuentra entre paréntesis es igual al producto de la masa del sólido por el radio vector $\mathbf{r}_C$ del centro de masas C. Por esto

$$\mathbf{N} = [(m\mathbf{r}_C), \ \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C, \ (m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_C, \ \mathbf{P}]. \qquad (43.3)$$

De este modo, el momento sumario de las fuerzas de la gravedad con relación a un punto O arbitrario, coincide con el momento de la fuerza $m\mathbf{g}$, aplicado en el punto C. Así, pues, la resultante de las fuerzas de la gravedad $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ y está aplicada al centro de masas del sólido. Cabe señalar que esto sólo es válido en el caso cuando en los límites del cuerpo el campo de las fuerzas de la gravedad es homogéneo (al deducir la fórmula (43.3), considerábamos que $\mathbf{g} = \text{const}$).

De (43.3) se desprende que el momento de las fuerzas de la gravedad respecto del centro de masas es nulo (en tal caso $\mathbf{r}_C = 0$). Recibe el nombre de *centro de gravedad* de un sólido, el punto respecto del cual el momento de las fuerzas de la gravedad es igual a cero. De este modo, cuando en los límites del sólido el campo gravitatorio es homogéneo, el centro de masas coincide con el de gravedad.

Si el campo gravitatorio es homogéneo, las fuerzas de la gravedad aplicadas a diversas masas elementales tienen igual dirección y son proporcionales a m_i. Las fuerzas de inercia que surgen en un sistema no inercial de referencia, en movimiento de traslación con relación a sistemas inerciales, tienen una misma propiedad. En efecto, en tal caso, las fuerzas de inercia aplicadas a las masas elementales m_i son iguales a $m_i\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del sistema no inercial (véase (32.2)). Al repetir los razonamientos que nos llevaron a la

fórmula (43.3) (con esto, $m_i\mathbf{g}$ debe sustituirse por $-m_i\mathbf{a}$), es posible mostrar que la resultante de las fuerzas de inercia es $-m\mathbf{a}$ y que está aplicada al centro de masas del sólido. Cabe remarcar, que esto sólo es justo para los sistemas de referencia en movimiento de traslación.

En lo que atañe al centro de masas, el momento de las fuerzas de inercia es nulo (en un sistema en movimiento de traslación). Por esta causa, al confeccionar la ecuación (43.2) para los momentos tomados respecto del centro de masas, no es preciso tomar en consideración las fuerzas de inercia.

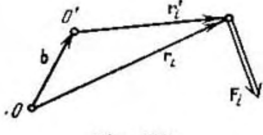


Fig. 43.2

Aclaremos las condiciones de equilibrio de un sólido. Éste puede encontrarse en reposo, si no hay causas que provoquen el surgimiento del movimiento de traslación o de rotación. De acuerdo con las ecuaciones (43.1) y (43.2) para esto es necesario y suficiente que se cumplan dos condiciones:

1) la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo, debe ser nula:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0; \tag{43.4}$$

2) el momento resultante de las fuerzas externas con relación a cualquier punto debe ser nulo:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{ext}} = 0. \tag{43.5}$$

Cuando la condición (43.4) se cumple, de la igualdad a cero de la suma de los momentos para un punto cualesquiera O sigue la igualdad a cero de la suma de los momentos respecto de cualquier otro punto O'. En realidad, sea para cierto punto O

$$\sum \mathbf{N}_i = \sum [\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_i] = 0. \tag{43.6}$$

Tomemos otro punto O', cuya posición con relación a O está determinada con el vector $\mathbf{b}$. En la fig. 43.2 vemos que $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{b}$. Por consiguiente, la suma de los momentos según el punto O' es igual a

$$\sum \mathbf{N}'_i = \sum [\mathbf{r}'_i,\ \mathbf{F}_i] = \sum [(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}),\ \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_i] - \sum [\mathbf{b},\ \mathbf{F}_i].$$

En correspondencia con (43.6), la primera suma es cero. Sacando el factor constante $\mathbf{b}$ tras el paréntesis de la segunda suma obtenemos la expresión $-[\mathbf{b}, \sum \mathbf{F}_i]$ que también es nula como sigue de (43.4). Así, pues, de (43.4) y de la condición (43.6) para el punto O, se desprende la condición (43.6) para el punto O'.

Señalemos que la condición vectorial (43.5) es equivalente a tres escalares:

$$\sum N_{x\,\text{ext}} = 0, \ \sum N_{y\,\text{ext}} = 0, \ \sum N_{z\,\text{ext}} = 0. \tag{43.7}$$

De forma que las condiciones de equilibrio de un sólido se determinan con las ecuaciones (43.4) y (43.5) o con las ecuaciones (43.4) y (43.7).

En conclusión, consideremos un ejemplo de aplicación de las leyes de dinámica del sólido. Supongamos que un cilindro homogéneo de radio R y masa m rueda sin deslizamiento por un plano inclinado (fig. 43.3). El ángulo de inclinación del plano es igual a α, mientras que la altura, h ($h \gg R$). La velocidad inicial del cilindro es igual a cero. Es preciso hallar la velocidad del centro de masas y la velocidad angular de rotación del cilindro, cuando éste sale al sector horizontal. Ofrecemos dos variantes de la solución.

Primer procedimiento de solución. El cilindro se moverá bajo la acción de tres fuerzas: la fuerza $\mathbf{P} = mg$, la fuerza de rozamiento

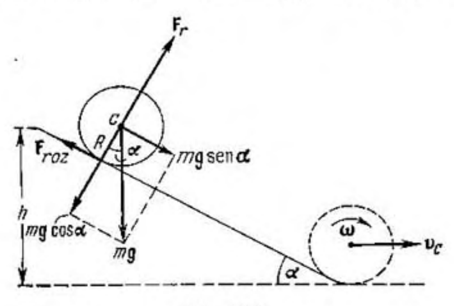


Fig. 43.3

$\mathbf{F}_{roz}$ y la fuerza de la presión normal $\mathbf{F}_n$ (véase el § 17). Por la dirección hacia la normal la aceleración del cilindro es cero. Por lo tanto, la fuerza de la presión normal es igual por su módulo a la componente normal de la fuerza $\mathbf{P}$, cuyo valor es $mg \cos \alpha$.

Entre el cilindro y el plano surge el rozamiento en los puntos donde hacen contacto entre sí. Cuando no hay deslizamiento, estos puntos del cilindro están inmóviles (forman el eje instantáneo de rotación), por lo que la fuerza de rozamiento, sobre la que hablamos, es la fuerza de rozamiento en reposo. Del § 15 sabemos que la fuerza de rozamiento en reposo puede tener valores desde cero hasta su valor máximo F_0, que se determina con el producto de coeficiente de rozamiento por la fuerza de la presión normal, que aprieta entre sí los cuerpos en contacto ($F_0 = kmg \cos \alpha$). En el caso que examinamos, la fuerza de rozamiento toma el valor necesario para que no haya deslizamiento. Durante la rodadura del cilindro por el plano no habrá deslizamiento si la velocidad lineal de los puntos de contacto es igual a cero, lo que a su vez se realiza cuando la velocidad del centro de

inercia v_C en cada momento de tiempo equivale a la velocidad angular de rotación ω del cilindro multiplicada por su radio R:

$$v_C = \omega R. \qquad (43.8)$$

En correspondencia, la aceleración del centro de masas w_C será igual a la aceleración angular β multiplicada por R:

$$w_C = \beta R. \qquad (43.9)$$

Si la fuerza de rozamiento necesaria para que se cumplan las condiciones (43.8) y (43.9) no sobrepasa el valor máximo de F_0, el cilindro rodará sin deslizamiento. En caso contrario, la rodadura sin deslizamiento es imposible.

La ecuación (43.1) tendrá, en nuestro caso, la forma siguiente

$$m\mathbf{w}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{roz} + \mathbf{F}_n.$$

Después de proyectarla sobre la dirección de movimiento obtenemos

$$mw_C = mg \operatorname{sen} \alpha - F_{roz}. \qquad (43.10)$$

Para un cilindro homogéneo que gira en torno del eje de simetría, $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$. Por este motivo, la ecuación (43.2) puede ser escrita así

$$I\beta = \sum N_z, \qquad (43.11)$$

donde z es el eje del cilindro (véase (38.8)). En la ecuación (43.11), escrita respecto del eje del cilindro, sólo se diferencia de cero el momento de la fuerza de rozamiento. Las demás fuerzas, incluida la resultante de las fuerzas de inercia, tienen una dirección que pasa por el eje del cilindro, por lo que sus momentos con relación a dicho eje son nulos. Así, pues, la ecuación (43.11) será escrita del modo siguiente:

$$I\beta = RF_{roz}. \qquad (43.12)$$

Aquí, I que es el momento de inercia del cilindro según su eje, es igual a ${}^1/_2 mR^2$.

En las ecuaciones (43.10) y (43.12) hay tres magnitudes incógnitas: F_{roz}, w_C y β. Las últimas dos magnitudes están ligadas por la condición (43.9), que se deduce de la carencia de deslizamiento. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (43.9), (43.10) y (43.12) hallaremos los valores de las magnitudes buscadas (teniendo en cuenta que $I = {}^1/_2 mR^2$):

$$F_{roz} = {}^1/_3 mg \operatorname{sen} \alpha, \qquad (43.13)$$

$$w_C = {}^2/_3 g \operatorname{sen} \alpha, \qquad (43.14)$$

$$\beta = {}^2/_3 (g/R) \operatorname{sen} \alpha. \qquad (43.15)$$

Ahora, cuando ya conocemos el valor de la fuerza de rozamiento en reposo, necesario para que el cilindro ruede sin deslizamiento, podemos hallar la condición con la que semejante rodadura es posible.

Para el rozamiento sin deslizamiento la fuerza (43.13) no debe superar el valor máximo de la fuerza de rozamiento en reposo F_0, igual a $kmg \cos \alpha$:

$$^1/_3 mg \operatorname{sen} \alpha \leqslant kmg \cos \alpha,$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 3k.$$

Por lo tanto, si la tangente del ángulo de inclinación del plano supera el valor triple del coeficiente de rozamiento en reposo entre el cilindro y el plano, la rodadura no puede transcurrir sin deslizamiento.

De la constancia de w_C (véase (43.14)) sigue que el centro de masas del cilindro está en movimiento uniformemente acelerado. Durante el tiempo de rodadura t_{rod} el cilindro recorre un camino $h/\operatorname{sen} \alpha$. Con el movimiento uniformemente acelerado el recorrido, la aceleración y el tiempo están ligados con la correlación $s = {}^1/_2 wt^2$. Poniendo el valor de s, se obtiene

$$h/\operatorname{sen} \alpha = {}^1/_2 w_C t_{rod}^2,$$

de donde, teniendo en cuenta el valor de (43.14) para w_C, llegamos a la fórmula

$$t_{rod} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Lo mismo que w_C, este tiempo no depende de la masa y del radio del cilindro [1]; sólo se determina por el ángulo de inclinación α del plano y por la diferencia de niveles de sus bordes h.

La velocidad del centro de masas al salir el cilindro al sector horizontal será igual a

$$v_C = w_C t_{rod} = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

mientras que la velocidad angular del cilindro

$$\omega = \beta t_{rod} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Señalemos que la fuerza de rozamiento en reposo no realiza trabajo sobre el cilindro, ya que los puntos del cilindro sobre los que se aplica dicha fuerza están inmóviles en cada momento de tiempo (véase (20.5)).

Para el plano horizontal ($\alpha = 0$) con las fórmulas (43.14) y (43.15) obtenemos que si al cilindro previamente se le comunica cierta velocidad de traslación y la correspondiente velocidad angular (tal que no haya deslizamiento), éste se moverá sin aceleración. En realidad el movimiento será retardado. Este retardo está condicionado por la fuerza de rozamiento de rodadura que está dirigida de tal forma, que su momento disminuye la velocidad angular ω, mientras que la

[1]) Esto sólo es justo para un cilindro homogéneo y enterizo.

propia fuerza provoca la correspondiente aceleración del centro de masas (otra vez, tal que no surja el deslizamiento). La fuerza de rozamiento de rodadura ejerce trabajo negativo sobre el cuerpo que rueda.

Durante la resolución del problema sobre la rodadura de un cilindro por un plano inclinado, el rozamiento de rodadura se desprecia.

Segundo procedimiento de solución. Como la fuerza de rozamiento no realiza trabajo (despreciamos el rozamiento de rodadura), la energía total del cilindro, queda constante. En el momento inicial la energía cinética es cero, la potencial, igual a mgh. Al final de la rodadura la energía potencial resulta ser nula, pero aparece la energía cinética igual a (véase (42.3))

$$T=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Como no hay deslizamiento, v_C y ω están entre sí ligadas por la correlación $v_C=\omega R$. Poniendo en la expresión para la energía cinética $\omega=v_C/R$ e $I_C={}^1/_2 mR^2$, obtenemos:

$$T=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{mv_C^2}{4}=\frac{3}{4}mv_C^2.$$

Al principio y al final de la rodadura, la energía cinética debe ser igual:

$$\frac{3}{4}mv_C^2=mgh,$$

de donde

$$v_C=\sqrt{\frac{3}{4}gh},$$

y la velocidad angular

$$\omega=\frac{v_C}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Presten atención a que el segundo procedimiento es mucho más sencillo que el primero.

§ 44. Giroscopios

El giroscopio (o peonza) es un cuerpo macizo simétrico, que gira a gran velocidad alrededor del eje de simetría, al que daremos el nombre de eje de giroscopio. Éste es uno de los ejes principales de inercia. Por esta razón, si dicho eje no gira en el espacio, el momento de cantidad de movimiento es igual a $\mathbf{M}=I\omega$ donde I es el momento de inercia respecto del eje del giroscopio. Ahora, supongamos que el eje del giroscopio gira a cierta velocidad ω'. En tal caso, la resultante de la rotación del giroscopio transcurre alrededor de un eje que no coincide con el de simetría y la dirección del vector $\mathbf{M}$ no

coincidirá con la del eje del giroscopio. Sin embargo, si la velocidad de rotación del eje ω' es despreciablemente pequeña en comparación con la velocidad de la propia rotación del giroscopio ω ($\omega' \ll \omega$), podemos considerar, aproximadamente, que el vector **M** es igual a $I\omega$ y que está dirigido a lo largo del eje del giroscopio. Al observarse esta condición, el giro del vector **M** y el del eje del giroscopio serán equivalentes. En adelante vamos a suponer que la condición $\omega' \ll \omega$ se observa.

Si intentamos provocar el giro del eje del giroscopio, se observa un curioso fenómeno que recibe el nombre de *efecto giroscópico*: bajo la acción de las fuerzas que, al parecer, deberían provocar el giro del eje OO del giroscopio alrededor de la recta $O'O'$ (fig. 44.1), el eje del giroscopio gira alrededor de la recta $O''O''$ (se supone que el eje OO y la recta $O'O'$ yacen en el plano de la figura, mientras que la recta $O''O''$ y las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, son perpendiculares a dicho plano). La conducta del giroscopio, que a primera vista es contranatural, resulta que corresponde en absoluto a las leyes de dinámica del movimiento de rotación. En efecto, el momento de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ está dirigido a lo largo de la recta $O'O'$. Durante el tiempo dt el momento de la cantidad de movimiento del giroscopio **M** recibe el incremento $d\mathbf{M} = \mathbf{N}\, dt$, que tiene la misma dirección que **N**. Al pasar el tiempo dt, el momento de la cantidad de movimiento del giroscopio será igual a la resultante $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + d\mathbf{M}$ que yace en el plano de la figura. La dirección del vector $\mathbf{M}'$ coincide con la nueva dirección del eje del giroscopio. Así, pues, éste girará en torno de la recta $O''O''$ a cierto ángulo $d\varphi$. En la fig. 44.1 vemos que $d\varphi = |d\mathbf{M}|/M = N\, dt/M$. De aquí se desprende, que el giro del eje del giroscopio a la nueva posición se produjo a una velocidad angular $\omega' = d\varphi/dt = N/M$. Reescribamos esta correlación en la forma: $N = \omega' M$. Los vectores **N**, **M** y $\boldsymbol{\omega}'$ son perpendiculares entre sí (el vector $\boldsymbol{\omega}'$ está dirigido a lo largo de la recta $O''O''$ hacia el lector). Por esta causa, la relación entre ellos se puede escribir en la forma

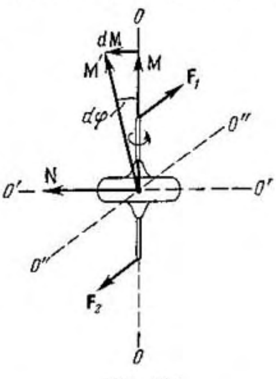


Fig. 44.1

$$\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}', \mathbf{M}]. \qquad (44.1)$$

Esta fórmula ha sido obtenida para el caso cuando los vectores $\boldsymbol{\omega}'$ y **M** son perpendiculares entre sí. No obstante, ella también es válida para el caso más general. Como vemos en la fig. 44.2, durante

el giro del eje del giroscopio en torno del vector $\boldsymbol{\omega}'$ a un ángulo $d\varphi$, el vector $\mathbf{M}$ recibe un incremento, cuyo módulo es igual a $|d\mathbf{M}| = M \operatorname{sen} \alpha \, d\varphi$. Al mismo tiempo $|d\mathbf{M}| = N\,dt$. De forma que $M \operatorname{sen} \alpha \, d\varphi = N\,dt$, de donde $N = \omega' M \operatorname{sen} \alpha$. Con ayuda de la fig. 44.2 es fácil comprender que en tal caso es válida la fórmula (44.1) (los vectores $\boldsymbol{\omega}'$ y $\mathbf{M}$ yacen en el plano de la figura, el vector $d\mathbf{M}$ se aleja del lector, por lo que está representado con un círculo y una cruz). Cabe recordar, que la fórmula (44.1) sólo es justa cuando $\omega' \ll \omega$.

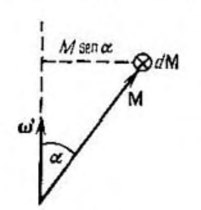


Fig. 44.2

Durante los intentos de provocar del modo prefijado el giro del eje del giroscopio, a causa del efecto giroscópico, surgen las llamadas *fuerzas giroscópicas* que actúan en los cojinetes sobre los que gira el eje del giroscopio. Por ejemplo, durante el giro forzado del eje del giroscopio OO alrededor de la recta $O'O'$ (fig. 44.3), el eje del giroscopio tiende a girar en torno de la recta $O''O''$. Para evitar esta rotación, al eje del giroscopio deben estar aplicadas las fuerzas $\mathbf{F}_1'$ y $\mathbf{F}_2'$

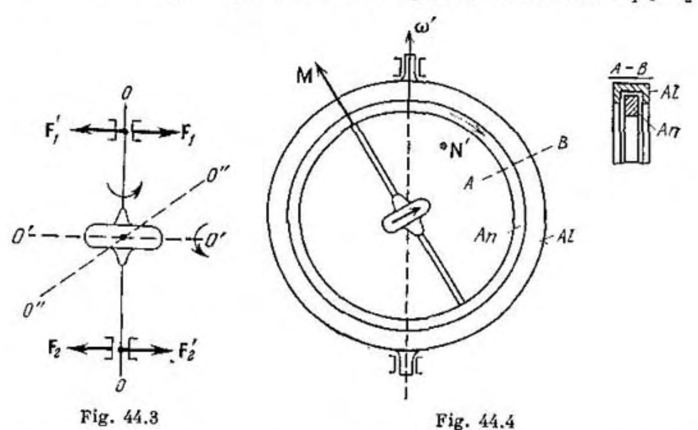


Fig. 44.3 Fig. 44.4

que actúan por los cojinetes. Según la tercera ley de Newton, el eje del giroscopio ejercerá sobre los cojinetes una acción con fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, que son fuerzas giroscópicas. Durante el giro forzado del eje del giroscopio a una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}'$, el momento de fuerzas con el que los cojinetes actúan sobre dicho eje, se determina con la fórmula (44.1). El momento de las fuerzas giroscópicas, que el eje

ejerce sobre los cojinetes es igual a

$$N' = [M\omega']. \tag{44.2}$$

Supongamos que el eje del giroscopio está sujeto en el anillo *An* que puede girar libremente en el alojamiento *Al* (fig. 44.4). Pongamos el alojamiento en rotación a una velocidad angular ω', en torno de un eje que yace en su propio plano. En tal caso, como ya hemos aclarado, surge el momento de las fuerzas giroscópicas que se determina con la fórmula (44.2) y que actúa sobre el anillo. Bajo el efecto de este momento, el anillo girará por el alojamiento en la dirección indicada por la flecha, hasta el momento cuando el eje del giroscopio se establezca en la dirección de rotación del alojamiento y el momento (44.2) no sea cero. Aquí, la dirección de la rotación propia del giroscopio y la del alojamiento coincidirán. Con **M** y ω' dirigidos en sentidos opuestos, el momento (44.2) también es nulo. Sin embargo, la correspondiente posición del eje del giroscopio será inestable: durante la más pequeña discrepancia de 180° del ángulo entre **M** y ω', aparece el momento **N'** que hará girar el eje hasta que dicho ángulo se haga igual a cero.

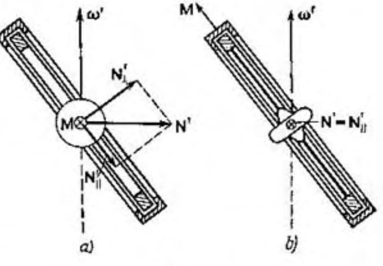


Fig. 44.5

Supongamos ahora, que el alojamiento gira a una velocidad angular ω' alrededor de un eje que yace en su propio plano (fig. 44.5). En la posición del anillo, con la que el momento de la cantidad del movimiento del giroscopio **M** es perpendicular a ω' (fig. 44.5, *a*), el vector **N'** está dirigido como se muestra en la figura. La componente $N'_{\perp}$ de este vector produce la rotación del anillo en el alojamiento, por lo que el ángulo entre los vectores **M** y ω' disminuirá. La componente $N'_{\parallel}$ tiende a originar el flambeo del anillo respecto del alojamiento. Cuando el anillo ocupe una posición tal, con la que el ángulo entre los vectores **M** y ω' tome su valor mínimo posible (fig. 44.5, *b*), la componente $N'_{\perp}$ será nula, ya que en tal caso el momento de las fuerzas giroscópicas **N'** se halla en el plano del anillo; semejante momento no puede provocar la rotación del anillo en el alojamiento. De este modo, bajo la acción de las fuerzas giroscópicas, el anillo ocupa en el alojamiento una posición tal, con la que es mínimo el ángulo entre el eje del giroscopio y el de rotación del alojamiento.

El comportamiento descrito del giroscopio se halla en la base de un instrumento llamado ***brújula giroscópica***. El aparato es un

giroscopio que puede girar con libertad en el plano horizontal. A causa de la influencia que ejerce la rotación diaria de la Tierra, el eje de la brújula giroscópica se establece en tal posición, con la que el ángulo entre dicho eje y el de rotación de la Tierra sea el mínimo (fig. 44.6). En esta posición, el eje de la brújula resulta hallarse en el plano medional y, por lo tanto, con alta precisión, indica hacia el norte. La brújula giroscópica se distingue ventajosamente de la brújula magnética, ya que no es preciso introducir correcciones con motivo

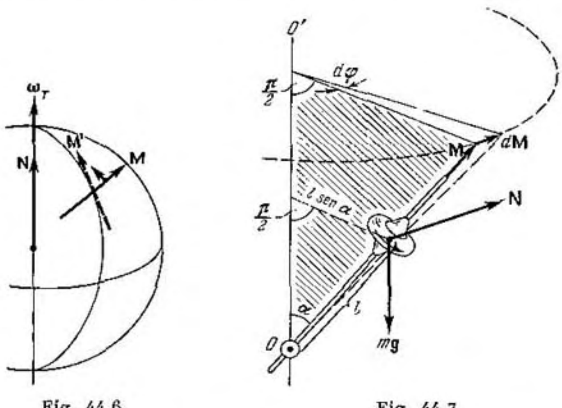


Fig. 44.6 Fig. 44.7

de la llamada declinación magnética [1]), así como tampoco hay que tomar medidas para la compensación del influjo sobre la aguja de los objetos ferromagnéticos que se hallan en su entorno (por ejemplo, el casco de acero del buque, etc.).

Supongamos que el eje del giroscopio puede girar libremente en torno de cierto punto O (fig. 44.7). Examinemos la conducta de semejante giroscopio en el campo de las fuerzas de la gravedad. El momento de las fuerzas aplicadas al giroscopio, es igual a la magnitud

$$N = mgl \text{ sen } \alpha, \quad (44.3)$$

donde m es la masa del giroscopio; l, la distancia desde el punto O hasta el centro de masas del giroscopio; α, el ángulo formado por el eje del giroscopio y la vertical. El vector **N** está dirigido perpendicularmente al plano vertical que pasa por el eje del giroscopio (en la fig. 44.7 dicho plano está sombreado).

[1]) Recibe el nombre de declinación magnética el ángulo entre los meridianos magnético y geográfico.

Bajo la acción de momento de fuerzas **N** el momento de la cantidad de movimiento **M**, en el transcurso del tiempo dt recibe el incremento $d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt$, perpendicular al vector **M**. El cambio que al recibir el incremento $d\mathbf{M}$ sufre el vector **M**, corresponde a un giro tal del eje del giroscopio, con el que el ángulo α no varía. Con esto, el plano vertical que pasa por el eje del giroscopio, girará a un ángulo $d\varphi$. A este mismo ángulo gira en el plano horizontal el vector **N**. Como resultado, al pasar el tiempo dt la disposición mutua de los vectores **M** y **N** será la misma que en momento inicial.

Durante el siguiente elemento de tiempo dt, el vector **M** de nuevo recibe el incremento $d\mathbf{M}$, que será perpendicular a la nueva dirección de vector **M** (dirección que se creó después del anterior giro elemental), etc. En total, el eje del giroscopio girará a una velocidad angular ω', alrededor del eje vertical que pasa por el punto O, describiendo un cono con ángulo de abertura 2α (comp. con la fig. 44.2). (Con $\alpha = \pi/2$ el cono degenera en el plano). En este caso, el vector **M** sólo variará en dirección, mientras que en magnitud será constante, ya que los incrementos elementales $d\mathbf{M}$ serán todo el tiempo perpendiculares al vector **M** [1]).

Así, pues, en el campo de fuerzas de la gravedad, el eje del giroscopio con un punto inmóvil, gira en torno de la vertical describiendo un cono. Semejante movimiento del giroscopio recibe el nombre de *precesión*. La velocidad angular de la precesión ω' puede ser hallada tomando en consideración que de acuerdo con (44.1) $N = \omega' M \operatorname{sen} \alpha$. Igualando este valor con la expresión (44.3), obtenemos que $\omega' M \operatorname{sen} \alpha = mgl \operatorname{sen} \alpha$, de donde

$$\omega' = \frac{mgl}{M} = \frac{mgl}{I\omega}. \tag{44.4}$$

De (44.4) sigue que la velocidad de la precesión no depende del ángulo de inclinación del eje del giroscopio con relación a la vertical (ángulo α).

También podemos obtener la fórmula (44.4) del modo siguiente. En correspondencia con la fig. 44.7 el ángulo $d\varphi$, al que gira el plano que pasa por el eje del cono y por el del giroscopio, puede ser representado como la razón entre $|\,d\mathbf{M}\,|$ y $M \operatorname{sen} \alpha$ (el origen del vector **M** se supone que está en el punto O):

$$d\varphi = \frac{|d\mathbf{M}|}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{N\,dt}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{mgl \operatorname{sen} \alpha \cdot dt}{M \operatorname{sen} \alpha}. \tag{44.5}$$

Está claro, que $\omega' = d\varphi/dt$. Dividiendo la expresión (44.5) por dt llegamos a la fórmula (44.4).

---

[1]) De modo análogo se comporta el vector de velocidad con el movimiento uniforme de un punto por una circunferencia. El vector **v** durante el tiempo dt recibe el incremento $d\mathbf{v} = \mathbf{w}_n dt$ (w_n = const). Como resultado varía la dirección del vector **v**, mientras que su magnitud queda invariable.

Hemos estudiado la teoría aproximada del giroscopio. De acuerdo con ella, junto con la rotación alrededor de la vertical, se producen las vibraciones del eje en el plano vertical, acompañadas por las variaciones de ángulo α en los límites de α_1 a α_2. Estas vibraciones del eje reciben el nombre de *nutaciones*. En función de las condiciones

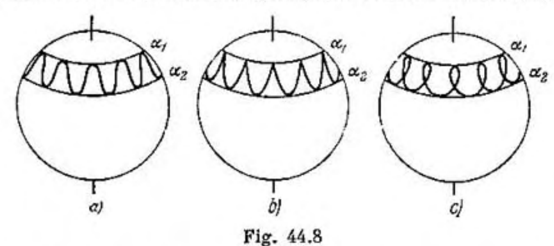


Fig. 44.8

iniciales, el extremo del giroscopio traza en una superficie esférica imaginaria, una de las curvas representadas en la fig. 44.8. Por ejemplo, si con el eje fijado bajo un ángulo α_1, ponemos el giroscopio en rotación y, a continuación, sin golpes, liberamos el eje, en un principio éste, al mismo tiempo de girar en torno de la vertical, descenderá. Al alcanzar el ángulo α_2, el eje comenzará a ascender, etc. (este caso está representado en la fig. 44.8, *b*).

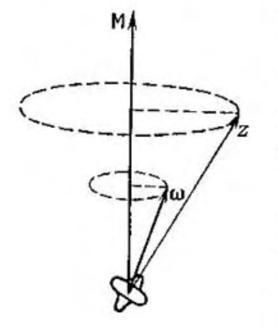


Fig. 44.9

Dando a la peonza un golpe inicial de magnitud y dirección determinadas por completo, podemos conseguir que el eje del giroscopio presione sin nutación. Semejante precesión denomínase *regular*. Mientras mayor sea la velocidad de rotación de la peonza, menor será la amplitud de la nutación. Además, esta última se amortigua por el rozamiento en el apoyo. Por esta razón, con frecuencia en la práctica, la nutación pasa desapercibida. La precesión que es regular sólo aproximadamente, es llamada *seudorregular*.

Si el punto O se ubica en el centro de masas de un giroscopio (véase la fig. 44.7), el momento de la fuerza de la gravedad es igual a cero, por lo que obtenemos la llamada *peonza simétrica libre*. Como resultado del principio de conservación, el momento de la cantidad de movimiento de semejante peonza no variará ni en magnitud ni en dirección. Si la peonza se pone en rotación alrededor del eje de

simetría, los vectores **M** y **ω** tendrán igual dirección, que se conserva un tiempo infinitamente largo. Sin embargo, si la peonza se pone en movimiento en torno del eje de inercia, los vectores **M** y **ω** no coincidirán (fig. 44.9). El correspondiente cálculo nos lleva a los siguientes resultados. El vector **ω**, quedando constante en magnitud, tiene precesión alrededor de la dirección del vector **M**, describiendo un cono. Al mismo tiempo, precesiona el eje de simetría z de la peonza, con la particularidad de que los vectores **M**, **ω** y el eje z, constantemente yacen en un mismo plano. La peonza gira alrededor del eje z a una velocidad angular $\omega_z = M_z/I_z$, donde M_z es la proyección del vector **M** sobre el eje z, I_z, el momento de inercia de la peonza con relación a dicho eje. La velocidad angular de la precesión $\omega_{prec} = M/I$, donde I es el mismo valor de los momentos de inercia I_x o I_y.

CAPÍTULO VI

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

§ 45. Ley de la gravitación universal

En la naturaleza todos los cuerpos se atraen entre sí. Newton estableció la ley a la que se supedita esta atracción que recibió el nombre de *ley de la gravitación universal*. De acuerdo con ella, *la fuerza con la que dos puntos materiales se atraen entre sí, es razón directa de las masas de dichos puntos y razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa*:

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}. \qquad (45.1)$$

Aquí γ es un coeficiente de proporcionalidad llamado *constante de gravitación*. La fuerza está dirigida a lo largo de una recta que pasa por los puntos materiales en interacción (fig. 45.1).

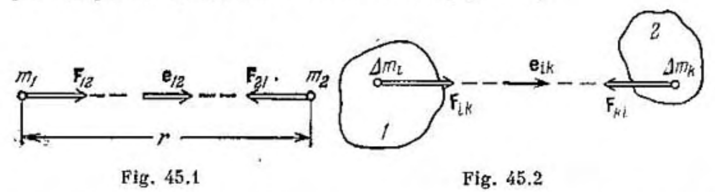


Fig. 45.1 Fig. 45.2

La fuerza con que el segundo punto material atrae hacia sí el primero puede ser escrita en forma vectorial del siguiente modo:

$$\mathbf{F}_{12}=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \qquad (45.2)$$

Con el símbolo $\mathbf{e}_{12}$ se designa un vector unitario dirigido del primer punto material al segundo (véase la fig. 45.1). Sustituyendo en la fórmula (45.2) el vector $\mathbf{e}_{12}$ por el vector $\mathbf{e}_{21}$, obtenemos la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ ejercida sobre el segundo punto material.

Para determinar las fuerzas de interacción de cuerpos extendidos, éstos deben ser divididos en masas elementales Δm, cada una de las cuales podría ser admitida como un punto material (fig. 45.2). En correspondencia con (45.2) la i-ésima masa elemental del cuerpo *1* se atrae por la k-ésima masa elemental del cuerpo *2* con una fuerza

$$\mathbf{F}_{ik}=\gamma\frac{\Delta m_i\Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}, \qquad (45.3)$$

donde r_{ik} es la distancia entre las masas elementales.

Sumando (45.3) por todos los valores con índice k obtenemos la fuerza que actúa desde el cuerpo *2* sobre la masa elemental Δm_i del cuerpo *1*:

$$\mathbf{F}_{i2}=\sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}. \qquad (45.4)$$

Por fin, sumando (45.4) por todos los valores con índice i, o sea, al sumar las fuerzas aplicadas a todas las masas del primer cuerpo, hallamos la fuerza con la que el cuerpo *2* actúa sobre el cuerpo *1*:

$$\mathbf{F}_{12}=\sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\mathbf{e}_{ik}. \qquad (45.5)$$

La suma se lleva a cabo por todos los valores de los índices i y k. Por consiguiente, si el cuerpo *1* se divide en N_1 y el cuerpo *2* en N_2 masas elementales, la suma (45.5) contendrá N_1N_2 sumandos.

En la práctica, la suma (45.5) se reduce a la integración, lo que resulta ser un problema matemático muy complicado. Este problema se simplifica considerablemente si los cuerpos en interacción son homogéneos y su forma es correcta. En particular, cuando dichos cuerpos son esferas homogéneas [1]), los cálculos con ayuda de (45.5) llevan a la fórmula (45.2), en la que por m_1 y m_2 se debe entender las masas de las esferas, por r, la distancia entre sus centros y por $\mathbf{e}_{12}$, un vector unitario cuya dirección va desde el centro de la primera esfera al centro de la segunda. De este modo, las esferas ejercen acción entre sí como puntos materiales con masas iguales a las de las esferas y que están ubicadas en sus centros.

Si uno de los dos cuerpos es una esfera homogénea de radio muy grande (por ejemplo, el globo terrestre), mientras que el segundo cuerpo puede ser considerado como un punto material, su interacción se describe con la fórmula (45.2), en la que por r se debe entender la distancia desde el centro de la esfera hasta el punto material (esta afirmación será demostrada en el párrafo siguiente).

De acuerdo con (45.1) la dimensión de la constante de gravitación es igual a

$$[\gamma]=\frac{[F]\,[r^2]}{[m^2]}=\frac{(ML/T^2)\,L^2}{M^2}=L^3M^{-1}T^{-2}.$$

El valor numérico de γ fue determinado midiendo la fuerza con la que se atraen entre sí cuerpos de masa conocida. Durante semejantes mediciones surgen grandes dificultades, ya que para aquellos cuerpos, cuyas masas pueden ser medidas directamente, la fuerza de atracción resulta ser muy pequeña. Por ejemplo, dos cuerpos de

[1]) Es suficiente que la distribución de la masa en los límites de cada esfera posea simetría central, es decir, que la densidad sólo sea función de la distancia desde el centro de la esfera.

masa igual a 100 kg cada uno, que dista uno del otro 1 m, ejercen una interacción con una fuerza de unos 10^{-6} N, es decir, de un orden de 10^{-4} gf.

El primer intento exitoso de definir γ fueron las mediciones de Cavendish (año 1798). Para las medidas hizo uso del sensible método de la balanza de torsión (fig. 45.3). Dos esferas de plomo m (de masa 0,729 kg cada una) montadas en los extremos de una ligera barra horizontal se ubicaban cerca de las esferas de masa M, situadas de modo simétrico (la masa de cada una de estas últimas era 158 kg). La barra era suspendida de un hilo elástico, por cuya torsión podía ser medida la fuerza de atracción de las esferas entre sí. El extremo superior del hilo fue fijado en la cabeza de instalación, mediante la cual era posible variar la distancia entre las esferas m y M. Entre los valores definidos por diversos procedimientos, el más exacto se considera el siguiente

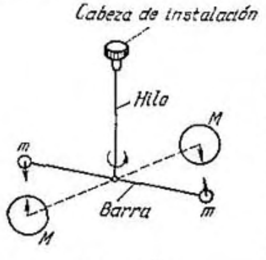


Fig. 45.3

$$\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}.$$

Si en (45.1) ponemos m_1, m_2 y r iguales a uno, la fuerza resulta ser equivalente a γ. Esto quiere decir que dos esferas de 1 kg de masa, cuyos centros se encuentran a 1 m de distancia, se atraen con una fuerza mutua de $6{,}670 \cdot 10^{-11}$ N.

§ 46. Campo gravitatorio

La interacción gravitacional se realiza por el campo gravitatorio. Todo cuerpo varía las propiedades del espacio que le rodea, es decir, crea en él un campo gravitatorio. Semejante campo se manifiesta por el hecho de que otro cuerpo ubicado en dicho campo, se hallará bajo la acción de una fuerza. Acerca de la «intensidad» del campo gravitatorio se puede juzgar, con evidencia, por el valor de la fuerza que en el punto dado actúa sobre un cuerpo, cuya masa es la unidad. De acuerdo con lo dicho, la magnitud

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{46.1}$$

recibe el nombre de *intensidad del campo gravitatorio*. En esta fórmula $\mathbf{F}$ es la fuerza gravitacional que actúa en el punto dado de campo sobre un punto material de masa m.

La dimensión de $\mathbf{G}$ es la misma que la de la aceleración. La intensidad del campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre

es igual a la aceleración de la caída libre $\mathbf{g}$ (con una precisión hasta la corrección condicionada por la rotación de la Tierra, véase el § 33).

De la fórmula (45.2) es fácil deducir que la intensidad del campo creado por un punto material de masa m, es igual a

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r, \tag{46.2}$$

donde $\mathbf{e}_r$ es el versor del radio vector trazado del punto material al punto dado del campo, r, el módulo de dicho radio vector.

Sea que el campo gravitatorio es creado por un punto material de masa m fijado en el origen de coordenadas. Entonces, sobre un punto material de masa m' situado en un punto, cuyo radio vector es $\mathbf{r}$, actuará una fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}m' = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \mathbf{e}_r \tag{46.3}$$

(comp. con (30.1)). En el § 30 fue mostrado que, en este caso, la energía potencial del punto m' se determina con la expresión

$$U = -\gamma \frac{mm'}{r} \tag{46.4}$$

(la energía potencial para $r = \infty$ se ha tomado nula). La expresión (46.4) puede ser interpretada como la energía potencial mutua de los puntos m y m'.

Como vemos en (46.4), a cada punto del campo, creado por el punto material m, corresponde un valor determinado de la energía potencial que en dicho campo posee el punto material m'. Por esta razón, es posible caracterizar el campo por la energía potencial que un punto material de $m' = 1$ posee en el lugar dado. La magnitud

$$\varphi = \frac{U}{m'} \tag{46.5}$$

recibe el nombre de *potencial del campo gravitatorio*. En esta fórmula U es la energía potencial que posee el punto material de masa m' en el punto dado del campo.

Conociendo el potencial del campo, puede ser calculado el trabajo que se realiza sobre la partícula m' por las fuerzas del campo durante un movimiento de la posición *1* a la *2*. De acuerdo con la fórmula (22.1) este trabajo

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m' (\varphi_1 - \varphi_2). \tag{46.6}$$

Según (46.1) y (46.5) la fuerza que actúa sobre la partícula m' es igual a $\mathbf{F} = m'\mathbf{G}$, mientras que la energía potencial de esta partícula $U = m'\varphi$. En correspondencia con la fórmula (22.7) $\mathbf{F} = -\nabla U$, es decir, $m'\mathbf{G} = -\nabla (m \varphi)$. Sacando tras el signo del

gradiente la constante m' y reduciendo esta constante, llegaremos a la correlación entre la intensidad y el potencial del campo gravitatorio:

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi. \qquad (46.7)$$

Hallemos la expresión para la energía potencial mutua entre una capa esférica homogénea y un punto material m, con la particularidad de que vamos a examinar dos casos, cuando el punto se encuentra fuera y dentro de la capa. Comencemos por el caso, en el que m está situado fuera de la capa (fig. 46.1, 1a). Destaquemos en la capa un anillo cuyos extremos responden a los valores del ángulo

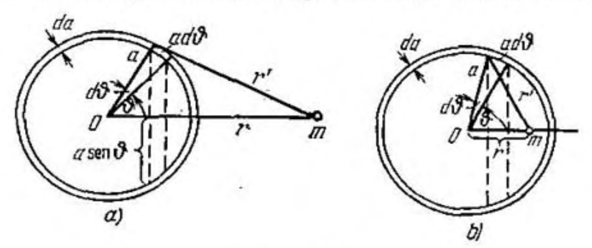


Fig. 46.1

ϑ y $\vartheta + d\vartheta$. El radio de este anillo es a sen ϑ y su anchura $a\,d\vartheta$ (a es el radio de la capa). Por lo tanto, el área del anillo se determina por la expresión $2\pi a^2$ sen $\vartheta\, d\vartheta$. Si la anchura de la capa es da y su densidad ρ, la masa del anillo será igual a $2\pi\rho a^2\, da$ sen $\vartheta\, d\vartheta$. Todos los puntos del anillo se hallan de m a igual distancia r'. Por esta causa, de acuerdo con (46.4), la energía potencial mutua entre el anillo y la masa m se determina con la expresión

$$dU_a = -\gamma \frac{2\pi\rho a^2\, da \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta \cdot m}{r'}. \qquad (46.8)$$

Para obtener la energía potencial de toda la capa esférica y de la masa m, hay que integrar la expresión (46.8) por el ángulo ϑ, en los márgenes de 0 a π. Con ello, la variable r' varía en los límites desde $r - a$ hasta $r + a$ (r es la distancia desde el centro de la capa O hasta m). La expresión (46.8) contiene dos variables ligadas entre sí: ϑ y r. Antes de comenzar la integración, hay que excluir una de estas variables. La integración se simplifica si se excluye la variable ϑ. La ligazón entre ϑ y r' se puede obtener haciendo uso del teorema del coseno. En la fig. 46.1 vemos que

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta.$$

Derivando esta correlación, obtenemos

$$2r'\,dr' = 2ar \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta .$$

De aquí $\operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta = (r'/ar)\, dr'$. Realizando en (46.8) semejante sustitución, se obtiene

$$dU_a = -\gamma \frac{2\pi\rho a \, da \cdot m \cdot dr'}{r} .$$

La integración por r' en los márgenes desde $r'_1 = r - a$ hasta $r'_2 = r + a$, nos da

$$dU_{\text{capa}} = -\gamma \frac{2\pi\rho a \, da \cdot m}{r} \int\limits_{r-a}^{r+a} dr' = -\gamma \frac{\rho 4\pi a^2 \, da \cdot m}{r} . \qquad (46.9)$$

La expresión $4\pi a^2 \, da$ es el volumen de la capa, mientras que $\rho 4\pi a^2 \, da$, su masa dM. Así, pues, la energía potencial mutua de la capa esférica y la masa m es igual a

$$dU_{\text{capa}} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{r} , \qquad (46.10)$$

donde r es la distancia desde el centro de la capa hasta m.

Para el caso, cuando la masa m se halla dentro de la capa (véase la fig. 46.1, *b*), todos los cálculos son los mismos. Otros serán los límites de integración en (46.9), ya que si r' varía aquí desde el valor $r'_1 = a - r$ hasta $r'_2 = a + r$, por lo tanto,

$$dU'_{\text{capa}} = -\gamma \frac{2\pi\rho a \, da \cdot m}{r} \int\limits_{a-r}^{a+r} dr' = -\gamma\rho \, 4\pi a \, da \cdot m =$$

$$= -\gamma \frac{\rho 4\pi a^2 \, da \cdot m}{a} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{a} . \qquad (46.11)$$

De esta forma, aquí la energía potencial es igual para todas las r y equivale al valor de (46.10) que se obtiene para $r = a$.

La expresión (46.10) puede ser interpretada como la energía potencial de la partícula m en el campo creado por la capa esférica de masa dM. La derivada por r de esta energía, tomada con signo contrario, es igual a la proyección sobre la dirección r de la fuerza ejercida sobre la partícula:

$$dF_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{r^2} . \qquad (46.12)$$

El signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia el decrecimiento de r, es decir, hacia el centro de la capa.

De la fórmula (46.12) se deduce que la capa esférica actúa sobre la partícula con la misma fuerza con la que actuaría un punto mate-

rial de masa igual a la de la capa, ubicado en el centro de ésta.

La expresión (46.11) no depende de las coordenadas de la partícula. Por lo tanto, el gradiente de esta expresión es igual a cero para todo $r < a$. Así, pues, una partícula que se encuentra en el interior de la capa, no está sujeta a la acción de ninguna fuerza. Claro está, que cada elemento de la capa actúa sobre la partícula con cierta fuerza, pero la suma de las fuerzas ejercidas por todos los elementos de la capa, será cero.

Examinemos ahora un sistema que consta de una esfera homogénea de masa M y de un punto material (partícula) de masa m. Dividamos la esfera en capas de masa dM. Cada capa actúa sobre la partícula con una fuerza definida por la fórmula (46.12). Sumando esta expresión por todas las capas, obtenemos la fuerza que la esfera ejerce sobre la partícula:

$$F_r = \int dF_r = -\int \gamma \frac{dM \cdot m}{r^2} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}. \qquad (46.13)$$

La acción de la esfera sobre la partícula es equivalente a la de un punto material de masa igual a la de la esfera, ubicado en el centro de la esfera (véase el parágrafo anterior).

Si tomamos una esfera con una cavidad esférica en su interior, sobre la partícula que se encuentra en dicha cavidad, no actuará ninguna fuerza.

Sumando por todas las capas de una esfera enteriza o hueca la expresión (46.10), obtendremos la energía potencial mutua de la partícula y la esfera:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \qquad (46.14)$$

Aquí M es la suma de la esfera, m, la masa de la partícula, r, la distancia desde la partícula hasta el centro de la esfera.

De (46.13) y (46.14) sigue que el campo gravitacional creado por una esfera homogénea, es equivalente (fuerza de la esfera) al campo que crea un punto material de la misma masa, ubicado en el centro de la esfera.

Consideremos dos esferas homogéneas de masas M_1 y M_2. La segunda esfera experimenta desde la primera la misma acción que un punto material de una masa M_1 ejercería, ubicado en el centro de la primera esfera. Según la tercera ley de Newton, la correspondiente fuerza es igual en magnitud a la fuerza con la que la segunda esfera actuaría sobre el punto material M_1. De acuerdo con (46.13), el módulo de dicha fuerza es igual a $\gamma M_1 M_2/r^2$. De este modo, hemos demostrado que las esferas homogéneas interactúan como los puntos materiales ubicados en sus centros.

§ 47. Principio de equivalencia

La masa figura en dos diferentes leyes: en la segunda de Newton y en la de gravitación universal. En el primer caso, ella caracteriza las propiedades de inercia del cuerpo, en el segundo, las propiedades gravitacionales, es decir, la capacidad de los cuerpos de atraerse entre sí. Con relación a esto, surge la pregunta de si deben ser diferenciadas o no la masa inerte m_{in} y la masa gravitatoria m_g.

Sólo el experimento puede dar respuesta a dicha pregunta. Examinemos en un sistema heliocéntrico de referencia la caída libre de los cuerpos. Junto a la superficie de la Tierra, todo cuerpo experimenta la fuerza de atracción hacia la Tierra, que de acuerdo con (46.13)

$$F=\gamma\frac{m_g M_T}{R_T^2}$$

(m_g es la masa gravitaria del cuerpo dado), M_T, la masa gravitatoria de la Tierra, R_T, el radio del globo terrestre). Bajo la acción de esta fuerza, el cuerpo adquiere una aceleración w (pero no g; véase el § 33), que debe ser igual a la fuerza F dividida por la masa inerte del cuerpo m_{in}:

$$w=\frac{F}{m_{in}}=\gamma\frac{M_T}{R_T^2}\frac{m_g}{m_{in}}. \qquad (47.1)$$

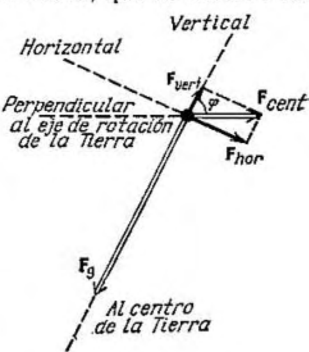


Fig. 47.1

Como muestran los experimentos, la aceleración w para todos los cuerpos es igual (en el § 33 fue mostrado que de la igualdad de g se desprende la igualdad de w). También es igual para todos los cuerpos el factor γ (M_T/R_T^2). Por consiguiente, el cociente m_g/m_{in} será asimismo igual para todos los cuerpos. A este mismo resultado nos conducen todos los demás experimentos, en los que hubiera podido manifestarse la diferencia entre las masas inerte y gravitatoria.

Entre los indicados experimentos, relataremos acerca del que realizó I. Eötvös que comenzó en 1887 y que duró 25 años. Se basa en el hecho de que sobre un cuerpo en reposo cerca de la superficie terrestre, además de la reacción del apoyo, actúan la fuerza gravitatoria $\mathbf{F}_g$, dirigida al centro de la Tierra, así como la fuerza centrífuga de inercia $\mathbf{F}_{cent}$, perpendicular al eje de rotación de la Tierra (fig. 47.1); en dicha figura no se observa la escala. El módulo de la fuerza centrífuga es dos órdenes menor que el módulo de la fuerza gravitatoria, véase el § 33). La fuerza gravitatoria es proporcional

a la masa gravitatoria del cuerpo m_g:

$$\mathbf{F}_g = m_g\mathbf{G}$$

(G es la intensidad del campo gravitacional). La fuerza centrífuga de inercia es proporcional a la masa inerte m_{in}. De acuerdo con la fórmula (33.4), su módulo se determina con la expresión

$$F_{\text{cent}} = m_{in}\omega^2 R_T \cos\varphi$$

(φ es la latitud del lugar). De la fig. 47.1 se desprende que el módulo de la componente vertical de la fuerza centrífuga de inercia es igual a

$$F_{\text{vert}} = F_{\text{cent}}\cos\varphi = m_{in}\omega^2 R_T \cos^2\varphi = Am_{in}.$$

Hemos introducido la designación $A = \omega^2 R_T \cos^2\varphi$. El experimento de Eötvös fue realizado en la latitud $\varphi = 45°$. En semejante caso, el coeficiente A es 100 veces menor que G.

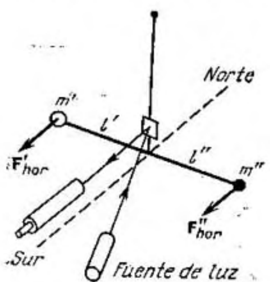


Fig. 47.2

El módulo de la componente horizontal de la fuerza F_{cent}

$$F_{\text{hor}} = F_{\text{cent}}\,\text{sen}\,\varphi = m_{in}\omega^2 R_T \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi = Bm_{in}$$

(para $\varphi = 45°$ los valores de los coeficientes A y B coinciden).

Eötvös suspendió de un hilo elástico una barra en los extremos de la cual estaban fijados cuerpos de igual masa, en la medida de lo posible (fig. 47.2). Los cuerpos eran de diferentes materiales. A la parte inferior del hilo se sujetaba un espejo. El rayo, emitido por una fuente de luz y reflejado del espejo, incidía en el retículo de un anteojo. Los brazos l' y l'' fueron elegidos de tal forma que la barra estuviera en equilibrio en el plano vertical. La condición de equilibrio tiene la siguiente forma:

$$(m'_g G - m'_{in}A)\,l' = (m''_g G - m''_{in}A)\,l''. \tag{47.2}$$

El instrumento estaba instalado de manera que la barra era perpendicular al plano del meridiano (véase la fig. 47.2). En semejante caso las componentes horizontales de la fuerza centrífuga de inercia, crean un momento torsional

$$N = m'_{in}Bl' - m''_{in}Bl''. \tag{47.3}$$

Excluyendo de las ecuaciones (47.2) y (47.3) el brazo l'', después de sencillas transformaciones, es posible llegar a la fórmula

$$N = m'_{in}Bl'\left[1 - \frac{(m'_g/m'_{in})\,G - A}{(m''_g/m''_{in})\,G - A}\right].$$

Como vemos en esta fórmula, cuando la razón entre las masas gravitatoria e inerte para los dos cuerpos es igual, el momento que torsiona el hilo debe ser nulo. Por lo contrario, si el coeficiente m_g/m_{in} para el primero y segundo cuerpos no es igual, el momento de torsión se diferencia de cero. En tal caso, durante el giro del instrumento a 180°, el momento de torsión cambiaría su signo por el opuesto y el rayo luminoso se desplazaría del retículo del anteojo (fig. 47.3). Al comparar ocho cuerpos diferentes (y entre ellos, uno de madera) con un cuerpo de platino, tomado como patrón, Eötvös advirtió la torsión del hilo. Esto le permitió afirmar que la razón m_g/m_{in} era para estos cuerpos igual con una precisión de 10^{-8}.

En 1961—1964, Diche perfeccionó el método de Eötvös, empleando para la creación del momento de torsión el campo gravitacional

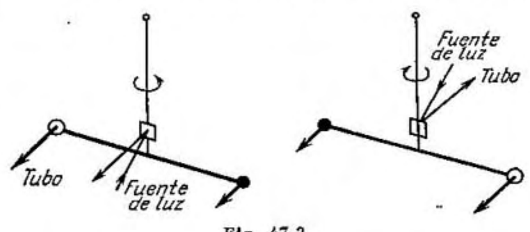


Fig. 47.3

del Sol y la fuerza centrífuga de inercia, condicionada por el movimiento orbital de la Tierra. Como resultado de sus mediciones, Diche llegó a la conclusión de que la razón m_g/m_{in} es igual para los cuerpos investigados con una precisión de 10^{-11}. Por fin, V. B. Braguinski y V. I. Panov obtuvieron la constancia del indicado cociente con una precisión de 10^{-12}.

Así, pues, todo el conjunto de hechos experimentales, indica que *las masas inerte y gravitatoria de todos los cuerpos son rigurosamente proporcionales entre sí*. Esto quiere decir, que eligiendo de manera adecuada las unidades, las masas gravitatoria e inerte se identifican, por lo que en física se habla simplemente de la masa. La identidad de las masas gravitatoria e inerte, fue puesta por Einstein como base de la teoría general de la relatividad.

En el § 32 ya remarcamos que las fuerzas de inercia son análogas a las de la gravedad, ya que tanto unas, como otras son proporcionales a la masa del cuerpo sobre el que actúan. Allí mismo fue indicado que al encontrarse en el interior de una cabina cerrada, no se puede establecer mediante ningún experimento, qué es lo que provoca la acción de la fuerza $m\mathbf{g}$ sobre el cuerpo: el hecho de que la cabina se mueve con aceleración $\mathbf{g}$, o que la cabina inmóvil se halla

junto a la superficie de la Tierra. Esta afirmación constituye el contenido del llamado *principio de equivalencia.*

La identidad de las masas gravitatoria e inerte es el corolario de la equivalencia de las fuerzas de inercia y de la gravedad.

Cabe señalar, que desde un principio suponíamos que la masa en (45.1) coincidía con la masa inerte de los cuerpos, por lo que el valor numérico de γ fue por nosotros determinado suponiendo que $m_g = m_{in}$. Por esta razón, (47.1) puede ser escrita como

$$w=\gamma \frac{M_T}{R_T^2}. \qquad (47.4)$$

Esta última correlación permite determinar la masa de la Tierra M_T. Poniendo en ella los valores medidos de w, R_T y γ obtenemos una masa de la Tierra igual a $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg.

A continuación, conociendo el radio de la órbita terrestre $R_{órb}$ y tiempo de una vuelta completa de la Tierra alrededor del Sol T, es posible hallar la masa del Sol M_s. La aceleración de la Tierra, igual a $\omega^2 R_{órb}$ ($\omega = 2\pi/T$), está condicionada por la fuerza con que el Sol atrae la Tierra. Por lo tanto,

$$M_T\omega^2 R_{órb}=\gamma \frac{M_T M_S}{R_{órb}^2},$$

de donde puede ser calculada la masa del Sol.

De este mismo modo fueron determinadas las masas de otros cuerpos celestes.

§ 48. Velocidades cósmicas

Con el fin de moverse alrededor de la Tierra, por una órbita circular de radio que poco se diferencia del radio de la Tierra R_T, el cuerpo deberá desarrollar una determinada velocidad v_1. Su valor puede ser definido de la igualdad del producto de la masa del cuerpo por la aceleración de la fuerza de la gravedad, que sobre él ejerce:

$$m\frac{v_1^2}{R_T}=mg.$$

De aquí

$$v_1=\sqrt{gR_T}. \qquad (48.1)$$

Por consiguiente, para que cualquier cuerpo se convierta en satélite de la Tierra, es preciso comunicarle una velocidad v_1 que recibe el nombre de *primera velocidad cósmica*. Poniendo los valores de g y R_T, la anterior expresión nos proporciona el siguiente valor de la indicada velocidad:

$$v_1=\sqrt{gR_T}=\sqrt{9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6}\approx 8\cdot 10^3 \text{ m/s}=8 \text{ km/s}.$$

Si un cuerpo tiene la velocidad v_1, él no cae a la Tierra. Sin embargo, esta velocidad es insuficiente para que el cuerpo pueda salir de la esfera de atracción de la Tierra, es decir, alejarse de nuestro planeta a una distancia tal a la que la atracción de la Tierra deja de desempeñar un papel importante. La velocidad v_2 necesaria para este fin denomínase *segunda velocidad cósmica.*

Para hallar dicha velocidad hay que calcular el trabajo que hay que realizar contra las fuerzas de atracción terrestre para que un cuerpo se aleje al infinito de la superficie terrestre. Durante el alejamiento del cuerpo, las fuerzas de atracción de la Tierra realizan sobre él cierto trabajo

$$A' = U_{\text{inic}} - U_{\text{fin}}.$$

De acuerdo con (46.14) el valor inicial

$$U_{\text{inic}} = -\gamma \frac{M_{\text{T}} m}{R_{\text{T}}},$$

el valor final es cero. Así, que

$$A' = -\gamma \frac{M_{\text{T}} m}{R_{\text{T}}}.$$

El trabajo A que hay que ejecutar contra las fuerzas de atracción de la Tierra, es igual al trabajo A' tomado con signo opuesto, es decir,

$$A = \gamma \frac{M_{\text{T}} m}{R_{\text{T}}}. \tag{48.2}$$

Despreciando la diferencia entre la fuerza de la gravedad mg y la fuerza de atracción gravitacional del cuerpo por la Tierra, podemos escribir que

$$mg = \gamma \frac{M_{\text{T}} m}{R_{\text{T}}^2}.$$

De aquí

$$\gamma \frac{M_{\text{T}} m}{R_{\text{T}}} = mgR_{\text{T}}.$$

Por lo tanto el trabajo (48.2) puede ser representado en la forma

$$A = mgR_{\text{T}}. \tag{48.3}$$

El cuerpo que se aleja realiza este trabajo a cuenta de la reserva de su energía cinética. Para que dicha reserva de energía sea suficiente para realizar el trabajo (48.3), el cuerpo debe ser lanzado a una velocidad v que no debe ser menor que v_2 y que se determina de la condición

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_{\text{T}}.$$

De aquí,

$$v_2 = \sqrt{2gR_{\text{T}}}. \tag{48.4}$$

La velocidad v_2 es la segunda velocidad cósmica. Al comparar con (48.1) vemos que la segunda velocidad cósmica es $\sqrt{2}$ veces mayor que la primera. Al multiplicar 8 km/s por $\sqrt{2}$, obtenemos el valor de v_2, aproximadamente igual a 11 km/s.

Cabe señalar, que el valor necesario de la velocidad no depende de la dirección por la que se realiza el lanzamiento del cuerpo de la Tierra. De esta dirección sólo depende la forma de la trayectoria por la que el cuerpo se aleja de la Tierra.

Para abandonar los límites del Sistema solar, el cuerpo debe vencer, además de la atracción de la Tierra, las fuerzas de atracción del Sol. La velocidad necesaria con este fin, al lanzar el cuerpo desde la superficie de la Tierra, se llama *tercera velocidad cósmica*, v_3. Esta velocidad depende de la dirección de lanzamiento. Si ésta se realiza en la dirección del movimiento orbital de la Tierra, esta velocidad es la mínima y constituye unos 17 km/s (en este caso, la velocidad del cuerpo con relación al Sol se compone de la velocidad del cuerpo respecto de la Tierra y de la velocidad con que la Tierra gira alrededor del Sol). Durante el lanzamiento en dirección opuesta a la de movimiento de la Tierra, $v_3 \approx 73$ km/s.

Las velocidades cósmicas fueron por primera vez alcanzadas en la URSS. El 4 de octubre de 1957 en la Unión Soviética se realizó el primer lanzamiento exitoso de un satélite artificial de la Tierra, que fue el primero en la historia de la humanidad. El 2 de enero de 1959 fue alcanzado el segundo objetivo. Ese día, de la tierra soviética se puso en vuelo un cohete cósmico que salió de la zona de la atracción terrestre y que se convirtió en el primer planeta artificial de nuestro Sistema solar. El 12 de abril de 1961, en la Unión Soviética se realizó el primer vuelo del hombre en el espacio cósmico. El primer cosmonauta soviético, Yuri Alekséyevich Gagarin dio una vuelta alrededor de la Tierra y aterrizó con felicidad.

CAPÍTULO VII

MOVIMIENTO VIBRATORIO

§ 49. Generalidades sobre las vibraciones

Los procesos que se distinguen por uno u otro grado de repetición, reciben el nombre de vibraciones (oscilaciones). Poseen semejante propiedad de repetición las oscilaciones del péndulo de un reloj, las oscilaciones de una cuerda o las ramas de un diapasón, la tensión entre las armaduras de un condensador en el circuito de un receptor de radio, etc.

En dependencia de la naturaleza física del proceso que se repite se distinguen las siguientes vibraciones: mecánicas, electromagnéticas, electromecánicas, etc. En este capítulo, se consideran las vibraciones mecánicas.

Las oscilaciones están extensamente difundidas en la naturaleza y en técnica. En muchos casos juegan un papel nocivo. Las oscilaciones de un puente que surgen a causa de los golpes que le comunican las ruedas al pasar por las juntas de los carriles, las vibraciones del casco de un buque, provocadas por la rotación de la hélice, las vibraciones de las alas de un avión, todos estos procesos pueden conducir a resultados catastróficos. En semejantes casos, el problema consiste en evitar la aparición de las oscilaciones o bien, por lo menos, obstaculizar que aquéllas alcancen dimensiones peligrosas.

Pero, al mismo tiempo, los procesos vibratorios yacen en la propia base de diversas ramas de la técnica. Por ejemplo, la base de toda la radiotécnica son los procesos vibratorios.

En función del carácter del influjo sobre el sistema vibratorio se distinguen las vibraciones libres (o propias), forzadas, autovibraciones (autooscilaciones) y paramétricas.

Reciben el nombre de libres las vibraciones que se producen en un sistema que después de darle un golpe o que fue sacado del estado de equilibrio, se le deja oscilar por sí mismo. Un ejemplo de semejante fenómeno pueden ser las oscilaciones de una bola suspendida de un hilo (péndulo). Para provocar las vibraciones hay que empujar la bola o bien, desplazándola hacia un lado, soltarla.

Forzadas denomínanse las vibraciones, durante las cuales, sobre el sistema en oscilación se ejerce la acción de una fuerza externa que varía periódicamente. Un ejemplo de tales vibraciones pueden ser las de un puente que surgen al pasar por él gente que marca el paso.

Las autovibraciones, como las vibraciones forzadas, se acompañan por la acción de las fuerzas externas sobre el sistema en oscilación,

pero los momentos de tiempo cuando dichas acciones se ejercen se prefijan por el propio sistema, es decir, el sistema vibratorio gobierna por sí mismo el influjo externo. Un ejemplo de un sistema autovibratorio puede ser un reloj, en el que el péndulo se anima a cuenta de la energía del peso subido o del muelle torsionado, con la particularidad de que los impulsos se transmiten cuando el péndulo pasa por su posición media. A cuenta del influjo externo, durante las vibraciones paramétricas se produce la variación periódica de cierto parámetro del sistema, por ejemplo, la longitud del hilo del que está suspendida una bola que realiza oscilaciones.

Las vibraciones más sencillas son las armónicas, es decir, tales con las que la magnitud que oscila (por ejemplo, la desviación del péndulo) varía con el tiempo según la ley del seno o coseno. Este tipo de oscilación es de particular importancia por las siguientes causas: primero, en la naturaleza y la técnica las vibraciones tienen con frecuencia un carácter próximo al de las armónicas y, segundo, los procesos periódicos de otra forma (con otra dependencia del tiempo) pueden ser representados como la superposición de varias vibraciones armónicas.

§ 50. Vibraciones pequeñas

Examinemos un sistema mecánico, cuya posición puede ser prefijada por una magnitud que designaremos con x. En semejantes casos se dice que el sistema tiene un grado de libertad. La magnitud x, que determina la posición del sistema, puede ser un ángulo que se cuenta en cierto plano o la distancia que se cuenta a lo largo de una línea curva (en particular, por una recta), etc. La energía potencial del sistema será función de una variable x: $U = U(x)$. Supongamos que el sistema está en equilibrio estable, con el que la función $U(x)$ tiene su mínimo (véase el § 26). Vamos a concordar que la coordenada x y la energía potencial U serán contadas desde la posición de equilibrio. Entonces $U(0) = 0$.

Desarrollemos la función $U(x)$ en una serie según los exponentes de x, con la particularidad de que nos limitaremos a considerar vibraciones pequeñas, de forma que podemos despreciar los exponentes superiores de x. De acuerdo con la fórmula de Maclaurin

$$U(x) = U(0) + U'(0)\,x + {}^1/_2 U''(0)\,x^2$$

(a causa de la pequeñez de x, despreciamos los demás términos). Como $U(x)$ tiene su mínimo con $x = 0$, $U'(0)$ es nula, mientras que $U''(0)$ es positiva. Además, por planteamiento $U(0) = 0$. Introducimos la designación: $U''(0) = k$ $(k > 0)$. Entonces

$$U(x) = {}^1/_2 kx^2. \tag{50.1}$$

La expresión (50.1) es igual que la fórmula (25.1) para la energía potencial de un resorte deformado. Haciendo uso de la correlación (22.4) hallamos la fuerza que actúa sobre el sistema:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \tag{50.2}$$

Esta fórmula nos proporciona la proyección de la fuerza en la dirección x. En adelante, omitiremos el índice x para la designación de la fuerza, es decir, escribiremos la correlación (50.2) en la forma: $F = -kx$.

La expresión (50.2) es idéntica a la expresión (14.2) para la fuerza elástica de un resorte deformado. Por esta razón, las fuerzas de la forma (50.2) reciben el nombre de *cuasielásticas*, cualquiera que sea su naturaleza. Es fácil comprender que la fuerza descrita con la fórmula (50.2) siempre está dirigida a la posición de equilibrio. El módulo de la fuerza es proporcional a la magnitud de la desviación del sistema de la posición de equilibrio. Una fuerza que posee semejantes propiedades, es a veces denominada *fuerza de recuperación* (o recuperadora).

Como ejemplo, consideremos un sistema constituido por una bola de masa m, suspendida de un muelle, cuya masa, en comparación con m, puede ser despreciada (fig. 50.1). En la posición de equilibrio la fuerza mg se equilibra con la fuerza $k\,\Delta l_0$:

$$mg = k\,\Delta l_0 \tag{50.3}$$

(Δl_0 as el alongamiento del muelle). Caractericemos el desplazamiento de la bola de la posición de equilibrio con la coordenada x, con la particularidad de que el eje x lo dirigiremos verticalmente hacia abajo, mientras que el cero del eje, lo hacemos coincidir con la posición de equilibrio de la bola. Si desplazamos la bola a la posición caracterizada por la coordenada x, el alargamiento del muelle será igual a $\Delta l_0 + x$ y la proyección de la fuerza resultante sobre el eje x tomará el valor $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Tomando en consideración la condición (50.3) obtenemos que

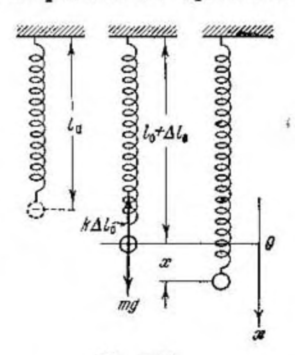


Fig. 50.1

$$F = -kx. \tag{50.4}$$

De este modo, en el ejemplo examinado la resultante de la fuerza de la gravedad y de la fuerza elástica tiene carácter de fuerza cuasielástica.

Comuniquemos a la bola el desplazamiento $x = a$, después de lo cual dejamos que el sistema se mueva por sí mismo. Bajo la acción de la fuerza cuasielástica, la bola se moverá hacia la posición de equilibrio a velocidad creciente $v = \dot{x}$. Con esto, la energía potencial del sistema decrecerá (fig. 50.2), pero aparecerá una energía cinética creciente[1] $E_c = {}^1/_2 m\dot{x}^2$ (despreciamos la masa del muelle). Después de llegar a la posición de equilibrio, la bola continúa el movimiento por inercia. Este movimiento será retardado y cesará cuando la energía cinética se convierta por completo en potencial, es decir, cuando el desplazamiento de la bola sea equivalente a $-a$. A continuación, ese mismo proceso transcurrirá con el movimiento de la bola en dirección inversa. Si el sistema carece de rozamiento, la energía de éste debe conservarse y la bola se moverá en los límites desde $x = a$ hasta $x = -a$ tiempo ilimitado.

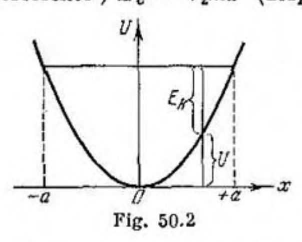


Fig. 50.2

La ecuación de la segunda ley de Newton tiene para la bola la forma

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{50.5}$$

Introduciendo la designación

$$\omega_0^2 = k/m, \tag{50.6}$$

transformamos la ecuación (50.5) de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{50.7}$$

Como $k/m > 0$, ω_0 es una magnitud real.

Así, pues, cuando carecen fuerzas de rozamiento el movimiento bajo la acción de la fuerza cuasielástica se describe con la ecuación diferencial (50.7).

En todo sistema vibratorio real, hay fuerzas de resistencia, cuya acción conduce a la disminución de la energía del sistema. Si el decrecimiento de la energía no se compensa a cuenta del trabajo de las fuerzas externas, las oscilaciones se amortiguarán. En el caso más sencillo, pero que al mismo tiempo se tropieza con la mayor frecuencia, la fuerza de resistencia F^* es proporcional a la magnitud de la velocidad:

$$F_x^* = -r\dot{x}. \tag{50.8}$$

[1]) En la ciencia sobre las vibraciones con la letra T se designa el período de las oscilaciones. Por esta razón, la energía cinética ha sido designada con el símbolo E_c.

Aquí r es una constante, llamada *coeficiente de resistencia*. El signo menos está condicionado por el hecho de que la fuerza $\mathbf{F}^*$ y la velocidad $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas; por consiguiente, sus proyecciones sobre el eje x tienen signos diferentes.

Cuando hay fuerzas de resistencia, la segunda ley de Newton tiene el aspecto

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{50.9}$$

Aplicando la designación

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \tag{50.10}$$

(comp. con (50.6)), escribamos de nuevo la ecuación (50.9) de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{50.11}$$

Esta ecuación diferencial describe las oscilaciones amortiguadas del sistema.

Las vibraciones, descritas con las ecuaciones (50.7) y (50.11) son libres (o propias): un sistema sacado de la posición de equilibrio o que recibió un golpe, realiza oscilaciones cuando lo dejamos moverse por sí mismo. Sea ahora, que el sistema vibratorio experimenta la acción de una fuerza externa, que varía con el tiempo según la ley armónica:

$$F_x = F_0 \cos \omega t. \tag{50.12}$$

En semejante caso, la ecuación de la segunda ley de Newton tiene la forma

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Introduciendo las designaciones (50.10), escribimos esta ecuación del modo que sigue:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \tag{50.13}$$

donde

$$f_0 = F_0/m. \tag{50.14}$$

La ecuación (50.13) describe las vibraciones forzadas.

Hemos aclarado, que al estudiar las vibraciones de diversos tipos tropezamos con la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \tag{50.15}$$

donde a y b son constantes, $f(t)$, cierta función de t. La ecuación del tipo (50.15) recibe el nombre de *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes*. Cuando se trata de la ecuación (50.7) $a = 0$, $b = \omega_0^2$, para (50.11) $a = 2\beta$, $b = \omega_0^2$. En ambos casos la función

$f(t)$ es idénticamente igual a cero: $f(t) \equiv 0$. El caso de las vibraciones forzadas $f(t) = f_0 \cos \omega t$.

La solución de la ecuación (50.15) se simplifica de modo considerable, si se pasa a magnitudes complejas. Por esta razón, antes de pasar al examen detallado de las vibraciones de diversos tipos, nos familiarizaremos con brevedad con los números complejos y con los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

§ 51. Números complejos

Recibe el nombre de complejo un número z de la forma

$$z = x + iy, \tag{51.1}$$

donde x e y son números reales, i, una unidad imaginaria ($i^2 = -1$). El número x se llama *parte real* del número complejo z. De forma simbólica esto se escribe $x = \operatorname{Re} z$. El número y denomínase *parte imaginaria de z* (se escribe $y = \operatorname{Im} z$). El número

$$z^* = x - iy \tag{51.2}$$

llámase *conjugado complejo* al número $x + iy$.

Al número real x se le puede confrontar un punto en el eje x. Al número complejo z es posible confrontar un punto en un plano con coordenadas x, y (fig. 51.1). Cada punto en el plano determina cierto número complejo z. Por consiguiente, un número complejo puede ser prefijado en la forma (51.1) con ayuda de las coordenadas cartesianas x e y de punto correspondiente. No obstante, ese mismo número prefíjase también por las coordenadas polares ρ y φ. Entre los dos pares de coordenadas existen las correlaciones

Fig. 51.1

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x). \tag{51.3}$$

La distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto que representa el número z, recibe el nombre de *módulo* del número complejo (se designa $|z|$). Está claro que

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{51.4}$$

El número φ denomínase *argumento* del número complejo z.

Tomando en consideración la correlación (51.3), podemos representar el número complejo en forma trigonométrica:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi). \qquad (51.5)$$

Dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se consideran iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales por separado:

$$z_1 = z_2, \quad \text{si } x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2. \qquad (51.6)$$

Los módulos de dos números complejos iguales entre sí son iguales, mientras que los argumentos pueden sólo diferenciarse por los sumandos múltiplos de 2π:

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2k\pi. \qquad (51.7)$$

En las expresiones (51.1) y (51.2) vemos que cuando $z^* = z$, la parte imaginaria de z es nulo, o sea, el número z resulta ser real. De este modo, la condición de realidad del número z, puede ser escrita en la forma

$$z^* = z. \qquad (51.8$$

En matemática se demuestra la correlación

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi, \qquad (51.$$

que recibe el nombre de *fórmula de Euler*. Si en esta fórmula sustituimos φ por $-\varphi$ y, teniendo en cuenta que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, mientras que $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$, obtenemos la correlación

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi. \qquad (51.10)$$

Sumemos las expresiones (51.9) y (51.10) y resolvamos la correlación que resulta respecto de $\cos\varphi$. Se obtiene

$$\cos\varphi = {}^1/_2\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}). \qquad (51.11)$$

Restando (51.10) de (51.9) tendremos que $\operatorname{sen}\varphi = (1/2i)\,(e^{i\varphi} - - e^{-i\varphi})$.

Con ayuda de la fórmula (51.9) es posible escribir el número complejo en forma exponencial:

$$z = \rho e^{i\varphi} \qquad (51.12)$$

(véase (51.5)). El número complejo conjugado en forma exponencial tiene el aspecto

$$z^* = \rho e^{-i\varphi}. \qquad (51.13)$$

Al sumar los números conjugados, por separados se suman sus partes reales e imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2). \qquad (51.14)$$

Es cómodo efectuar la remultiplicación de los números complejos, tomando estos números en forma exponencial:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (51.15)$$

Los módulos de los números complejos se multiplican entre sí, mientras que los argumentos se suman:

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \qquad (51.16)$$

De manera análoga se dividen los números complejos:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (51.17)$$

Tomando en consideración las fórmulas (51.12) y (51.13), obtenemos con facilidad que

$$zz^* = \rho^2 \qquad (51.18)$$

(el cuadrado del módulo de un número complejo, es igual al producto de éste por su número complejo conjugado).

§ 52. Ecuaciones diferenciales lineales

La ecuación del tipo

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \qquad (52.1)$$

donde a y b son constantes y $f(t)$, la función prefijada de t, recibe el nombre de *ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes*. Las constantes a y b también pueden ser ceros.

Si la función $f(t)$ idénticamente es igual a cero ($f(t) \equiv 0$), la ecuación se denominará *homogénea*, en el caso contrario, *no homogénea*. Una ecuación homogénea tiene la forma

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \qquad (52.2)$$

La solución de toda ecuación diferencial de segundo orden (es decir, del orden de la segunda derivada mayor) contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2. Esto puede ser comprendido si tomamos en consideración que la definición de la función por su segunda derivada se efectúa con integración doble. Cada vez al integrar surge una constante de integración. Como ejemplo, examinemos la ecuación

$$\ddot{x} = 0. \qquad (52.3)$$

La integración de esta ecuación nos da que $\dot{x} = C_1$. La segunda integración conduce a la función

$$x = C_1 t + C_2. \qquad (52.4)$$

Es fácil cerciorarse de que para cualesquiera valores de las constantes C_1 y C_2, la función (52.4) satisface la ecuación (52.3).

Aduciendo a las constantes C_1 y C_2 valores determinados, obtenemos la llamada *solución particular* de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la función $5t + 3$ es una de las soluciones particulares de la ecuación (52.3).

El conjunto de todas las soluciones particulares sin excepción recibe el nombre de *solución general* de una ecuación diferencial. La solución general de la ecuación (52.3) tiene el aspecto (52.4).

En la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales se demuestra que si x_1 y x_2 son soluciones linealmente independientes[1]) de la ecuación homogénea (52.2), la solución general de esta ecuación puede ser presentada en la forma

$$x = C_1x_1 + C_2x_2, \tag{52.5}$$

donde C_1 y C_2 son constantes tomadas al azar.

Sea $x_n(t, C_1, C_2)$ la solución general de la ecuación no homogénea (52.1) (las constantes arbitrarias C_1 y C_2 entran en esta solución como parámetros), mientras que $x_n(t)$ una de las soluciones particulares de esa misma ecuación (que no contiene constantes arbitrarias). Introduzcamos la designación:

$$x(t, C_1, C_2) = x_n(t, C_1, C_2) - x_n(t).$$

Entonces la solución general de una ecuación no homogénea puede ser representada en la forma

$$x_n(t, C_1, C_2) = x_n(t) + x(t, C_1, C_2). \tag{52.6}$$

La función (52.6) satisface la ecuación (52.1) con cualesquiera valores de las constantes C_1 y C_2. Por lo tanto, podemos escribir la correlación:

$$\ddot{x}_n(t) + \ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}_n(t) + a\dot{x}(t, C_1C_2) + \\ + bx_n(t) + bx(t, C_1, C_2) = f(t).$$

Agrupando los sumandos tendremos:

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) + \\ + [\ddot{x}_n(t) + a\dot{x}_n(t) + bx_n(t)] = f(t). \tag{52.7}$$

La solución particular $x_n(t)$ también satisface la ecuación (52.1). Por esta razón, la expresión entre corchetes en el primer miembro de la correlación (52.7) es igual al segundo miembro de esa misma correlación. De aquí se desprende que la función $x(t, C_1, C_2)$ debe

[1]) Las funciones x_1 y x_2 se denominan linealmente independientes, si la correlación $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$ sólo se cumple cuando α_1 y α_2 son nulas.

satisfacer la condición

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) = 0,$$

es decir, es una solución general de la ecuación homogénea (52.2). De este modo, llegamos a un teorema muy ventajoso: *la solución general de una ecuación no homogénea es igual a la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea más cualquier solución no homogénea*:

$$x_{\text{gen. no. hom}} = x_{\text{gen. hom.}} + x_{\text{par. no hom.}} \qquad (52.8)$$

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes se resuelven por medio de la sustitución

$$x(t) = e^{\lambda t}, \qquad (52.9)$$

donde λ es una magnitud constante. La derivación de la función (52.9) nos proporciona, que

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}. \qquad (52.10)$$

La sustitución de las expresiones (52.9) y (52.10) en la ecuación (52.2) después de la reducción por el factor $e^{\lambda t}$ diferente de cero, conduce a la ecuación algebraica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \qquad (52.11)$$

Esta ecuación recibe el nombre de *característica*. Las raíces de la ecuación son aquellos valores de λ con los que la función (52.9) satisface la ecuación (52.2).

Si las raíces de la ecuación (52.11) no coinciden ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ serán linealmente independientes. Por lo tanto, de acuerdo con (52.5), la solución general de la ecuación (52.2) puede ser escrita de la forma

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (52.12)$$

Podemos mostrar que cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución general de la ecuación (52.2) tiene el siguiente aspecto:

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}. \qquad (52.13)$$

Supongamos que los coeficientes a y b son reales, mientras que la función en el segundo miembro de la ecuación (52.1) es compleja. Después de representar dicha función en la forma $f(t) + i\varphi(t)$, llegamos a la ecuación:

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f + i\varphi \qquad (52.14)$$

(la función buscada ha sido designada con la letra z). Como es lógico, la solución de esta ecuación será compleja. Escribiendo la solución en la forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, la ponemos en la ecuación (52.14).

Como resultado obtenemos:

$$\ddot{x}+i\ddot{y}+a\dot{x}+ai\dot{y}+bx+biy=f+i\varphi. \qquad (52.15)$$

Para números complejos iguales entre sí, sus partes reales e imaginarias son iguales por separado (véase (51.6)). Por consiguiente, la ecuación (52.15) se descompone en dos ecuaciones independientes:

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t), \quad \ddot{y}+a\dot{y}+by=\varphi(t),$$

la primera de ellas coincide con la ecuación (52.1). Esta propiedad de la ecuación (52.15) permite aplicar el siguiente procedimiento, que en ocasiones, facilita los cálculos considerablemente. Supongamos que en la ecuación (52.1) que resolvemos, el segundo miembro es real. Añadiéndole una función imaginaria tomada al azar, llevamos la ecuación a la forma (52.14). Hallando después la solución compleja de la ecuación, tomamos su parte real. Ésta será de por sí la solución de la ecuación inicial (ecuación (52.1)).

§ 53. Vibraciones armónicas

Examinemos las vibraciones descritas por la ecuación

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0 \qquad (53.1)$$

(véase (50.7)). Semejantes vibraciones son realizadas por un cuerpo de masa m, sobre el que sólo actúa la fuerza cuasielástica $F=-kx$. El coeficiente de x en la ecuación (53.1) tiene el valor

$$\omega_0^2=k/m \qquad (53.2)$$

(véase 50.6)).

Poniendo en (53.1) la expresión $x=e^{\lambda t}$ (véase (52.9)), llegamos a la ecuación característica

$$\lambda^2+\omega_0^2=0.$$

Esta ecuación tiene las raíces imaginarias

$$\lambda_1=+i\omega_0, \quad \lambda_2=-i\omega_0.$$

De acuerdo con (52.12) la solución general de la ecuación (53.1) tiene el aspecto

$$x=C_1e^{i\omega_0t}+C_2e^{-i\omega_0t}, \qquad (53.3)$$

donde C_1 y C_2 son constantes complejas.

La función $x(t)$ que describe las vibraciones debe ser real. Con este fin, los coeficientes C_1 y C_2 en (53.3) se deben elegir de manera que se cumpla la condición (véase (51.8))

$$C_1^*e^{-i\omega_0t}+C_2^*e^{i\omega_0t}=C_1e^{i\omega_0t}+C_2e^{-i\omega_0t} \qquad (53.4)$$

(hemos igualado la expresión (53.3) a su expresión compleja conjugada). La correlación (53.4) será cumplida si $C_1 = C_2^*$ (en tal caso $C_2 = C_1^*$). Representemos los coeficientes C_1 y C_2, que satisfacen la indicada condición, en forma exponencial (véase (51.12)), designando su módulo con $a/2$ y su argumento con la letra α:

$$C_1 = (a/2)\, e^{i\alpha}, \quad C_2 = (a/2)\, e^{-i\alpha}. \tag{53.5}$$

La sustitución de estas expresiones en (53.3) nos proporciona

$$x = (a/2)\,(e^{i(\omega_0 t+\alpha)} + e^{-i(\omega_0 t+\alpha)}) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{53.6}$$

(véase la fórmula (51.11)). De esta forma, la solución general de la ecuación (53.1) tiene la forma

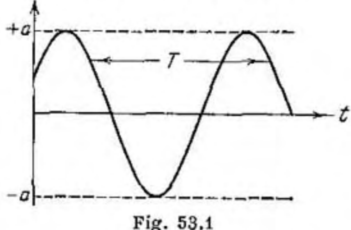


Fig. 53.1

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{53.7}$$

donde a y α son constantes arbitrarias[1]).

Así, pues, el desplazamiento de x varía con el tiempo según la ley de los cosenos. Por lo tanto, el movimiento del sistema, sobre el que se ejerce la fuerza del tipo $F = -kx$, es una vibración armónica.

La gráfica de una vibración armónica, es decir, la gráfica de la función (53.7), se muestra en la fig. 53.1. Por el eje horizontal se traza el tiempo t, por el eje vertical, el desplazamiento x. Como el coseno varía en los márgenes de -1 a $+1$, los valores de x se hallarán en los límites de $-a$ a $+a$.

El valor de la máxima elongación del sistema desde la posición de equilibrio recibe el nombre de *amplitud*, que se designa con a. La amplitud es una magnitud positiva constante. Su valor se determina por la magnitud de la elongación o el golpe, a causa de lo cual el sistema abandonó la posición de equilibrio.

[1]) La solución de la ecuación (53.1) puede ser escrita mediante dos procedimientos. Transformemos la expresión (53.7) según la fórmula para el coseno de una suma

$$x = a(\cos\alpha \cos\omega_0 t - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega_0 t),$$

introduzcamos las designaciones

$$c_1 = a\cos\alpha, \quad c_2 = -a \operatorname{sen}\alpha.$$

Entonces la función $x(t)$ se puede representar en la forma:

$$x = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \operatorname{sen}\omega_0 t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes tomadas al azar.

Por fin, haciendo uso de la fórmula (51.9), podemos escribir la expresión (53.7) del modo siguiente:

$$x = \operatorname{Re}\{a e^{i(\omega_0 t+\alpha)}\}.$$

La magnitud $(\omega_0 t + \alpha)$, que se encuentra bajo el signo de coseno, denomínase *fase* de la vibración. La constante α es el valor de la fase en el momento de tiempo $t = 0$ y se llama *fase inicial* de la vibración. Al variar el comienzo del registro del tiempo, cambiará también α. Por lo tanto, el valor de la fase inicial se determina por la elección del punto desde el que se cuenta el tiempo. Como el valor de x no varía al adicionar o sustraer de la fase el número entero 2π, siempre se puede conseguir que la fase inicial sea en módulo menor que π. Por esta causa, por regla, sólo se consideran los valores de α que se encuentran en los límites de $-\pi$ a $+\pi$.

Como el coseno es una función periódica, cuyo período es 2π, los diversos estados[1]) de un sistema que realiza vibraciones armónicas, se repiten después de tal intervalo de tiempo T, durante el cual la fase de la vibración recibe un incremento igual a 2π (fig. 53.1). Este intervalo de tiempo T recibe el nombre de *período* de la vibración. Puede ser determinado de la siguiente condición: $[\omega_0 (t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$, de donde

$$T = 2\pi/\omega_0. \tag{53.8}$$

El número de vibraciones por la unidad de tiempo denomínase *frecuencia* de las vibraciones ν. Es obvio, que la frecuencia está ligada con la duración de una vibración T por medio de la siguiente correlación:

$$\nu = 1/T. \tag{53.9}$$

Como unidad se toma la frecuencia de tal vibración, cuyo período es igual a 1 s. Esta unidad se denomina hertzio (Hz). La frecuencia de 10^3 Hz se llama kilohertzio (kHz), de 10^6 Hz, megahertzio (MHz).

De (53.8) sigue, que

$$\omega_0 = 2\pi/T. \tag{53.10}$$

De este modo, ω_0 nos ofrece el número de vibraciones durante 2π segundos. La magnitud ω_0 recibe el nombre de frecuencia *circular* o *cíclica*. Está relacionada con la frecuencia corriente ν mediante la correlación

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{53.11}$$

Después de derivar (53.7) por el tiempo, obtenemos la expresión para la velocidad

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{53.12}$$

Como vemos en (53.12), la velocidad también varía por una ley armónica, con la particularidad de que la amplitud de la velocidad

[1]) Cabe recordar que el estado del sistema mecánico se caracteriza por valores de las coordenadas y las velocidades de los cuerpos que forman este sistema.

es $a\omega_0$. De la comparación de (53.7) y (53.12) se desprende que la velocidad adelanta al desplazamiento de fase en $\pi/2$.

Después de derivar (53.12) otra vez por el tiempo, encontramos la expresión para la aceleración:

$$w=\ddot{x}=-a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\alpha)=a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\alpha+\pi). \qquad (53.13)$$

Como sigue de (53.13), la aceleración y la elongación se hallan en antifase. Esto significa que, cuando la elongación alcanza su máximo valor positivo, la aceleración alcanza su valor máximo en magnitud, pero de signo negativo y viceversa.

En la fig. 53.2 se comparan las gráficas para la elongación, la velocidad y la aceleración.

Cada vibración concreta se caracteriza por valores determinados de la amplitud a y la fase inicial α. Los valores de estas magnitudes para la vibración dada, pueden ser determinados con ayuda de las llamadas condiciones iniciales, es decir, por los valores de la elongación x_0 y la velocidad v_0 en el momento inicial de tiempo. En efecto, haciendo en (53.7) y (53.12) $t=0$, obtenemos dos ecuaciones

$$x_0=a\cos\alpha, \quad v_0=-a\omega_0 \operatorname{sen}\alpha,$$

de las que hallamos

$$a=\sqrt{x_0^2+(v_0^2/\omega_0^2)}, \qquad (53.14)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-v_0/x_0\omega_0. \qquad (53.15)$$

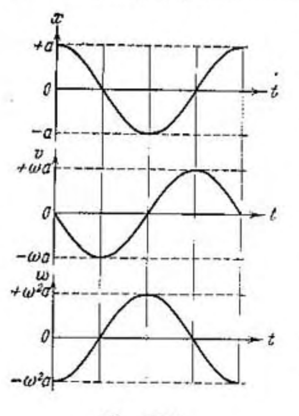


Fig. 53.2

La ecuación (53.15) se satisface con dos valores de α entre $-\pi$ y $+\pi$. De estos dos valores hay que tomar aquel, con el que se obtienen signos correctos del coseno y el seno.

La fuerza cuasielástica es conservativa. Por esta causa, la energía total de una vibración armónica debe quedar constante. Durante las vibraciones se produce la transformación de la energía cinética en potencial y viceversa, con la particularidad de que en los momentos de la máxima elongación desde la posición de equilibrio, la energía total E sólo consta de energía potencial, que alcanza su valor máximo $U_{máx}$:

$$E=U_{máx}=\frac{ka^2}{2}; \qquad (53.16)$$

cuando el sistema pasa por la posición de equilibrio, la energía total sólo consta de energía cinética, que en esos momentos adquiere su

valor máximo $E_{c\,máx}$:

$$E = E_{c\,máx} = \frac{mv^2_{máx}}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \qquad (53.17)$$

(más arriba fue mostrado que la amplitud de la velocidad es igual a $a\omega_0$). Las expresiones (53.16) y (53.17) son iguales, ya que de acuerdo con (53.2) $m\omega_0^2 = k$.

Aclaremos cómo varía con el tiempo la energía cinética y potencial de una vibración armónica. La energía cinética es igual a (véase la expresión (53.12) para $\dot{x}$)

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\,(\omega_0 t + \alpha). \qquad (53.18)$$

La energía potencial se expresa con la fórmula

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2\,(\omega_0 t + \alpha). \qquad (53.19)$$

Sumando (53.18) y (53.19) y tomando en consideración que $m\omega_0^2 = k$, obtenemos la fórmula para la energía total:

$$E = E_c + U = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \qquad (53.20)$$

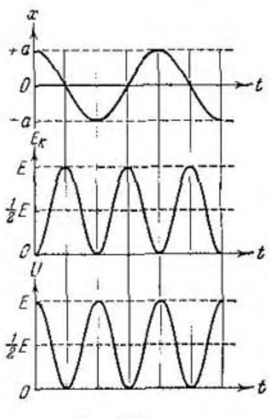


Fig. 53.3

(comp. con (53.16) y (53.17)), de modo que la energía total de una vibración armónica resulta, en realidad, ser constante.

Haciendo uso de conocidas fórmulas de trigonometría, a las expresiones para E_c y U se les puede dar la forma

$$E_c = E\,\mathrm{sen}^2\,(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \qquad (53.21)$$

$$U = E\cos^2\,(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\,(\omega_0 t + \alpha)\right], \qquad (53.22)$$

donde E es la energía total del sistema. De estas fórmulas se ve que E_c y U varían con una frecuencia de $2\omega_0$, es decir, con una frecuencia que supera dos veces la frecuencia de la vibración armónica. En la fig. 53.3 se comparan las gráficas para x, E_c y U.

Como sabemos, el valor medio del cuadrado del seno y del cuadrado del coseno, es igual a la mitad. Por lo tanto, el valor medio de E_c coincide con el valor medio de U y es igual a $E/2$.

§ 54. El péndulo

En física, se entiende por péndulo un sólido que por la acción de la fuerza de la gravedad oscila alrededor de un punto o eje inmóvil. Se ha adoptado distinguir el péndulo matemático y físico.

Recibe el nombre de péndulo matemático un sistema idealizado que consta de un hilo imponderable y que no se estira, del que está suspendida una masa concentrada en un punto. Una pequeña bola pesada suspendida de un hilo largo y fino puede servirnos de péndulo matemático, con aproximación suficientemente buena.



Fig. 54.1

La desviación del péndulo de equilibrio será caracterizada por el ángulo φ, formado entre el hilo y la vertical (fig. 54.1). Cuando el péndulo se desvía de la posición de equilibrio, se crea el momento de rotación N, igual en magnitud a mgl sen φ (m es la masa, l, la longitud del péndulo). Este tiene tal dirección que tiende a retornar el péndulo a la posición de equilibrio y, en este aspecto, es análogo a la fuerza cuasielástica. Por esta causa, lo mismo que a la elongación y a la fuerza cuasielástica, al momento N y a la desviación φ hay que adjudicar signos opuestos[1]). Por lo tanto, la expresión para el momento de rotación tiene la forma

$$N = -mgl \operatorname{sen} \varphi. \tag{54.1}$$

Escribamos para el péndulo la ecuación de dinámica del movimiento de rotación. Designando la aceleración por $\ddot{\varphi}$ y tomando en consideración que el momento de inercia del péndulo es ml^2, obtenemos:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \operatorname{sen} \varphi.$$

Esta última ecuación puede transformarse a la forma

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \varphi = 0. \tag{54.2}$$

Limitémonos a considerar vibraciones pequeñas. En semejante caso, se puede hacer sen $\varphi \approx \varphi$. Además, introduciendo la designación

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \tag{54.3}$$

llegamos a la ecuación

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{54.4}$$

[1]) Considerando φ como un vector, ligado a la dirección de giro por la regla del sacacorchos (lo que es tolerable con pequeños valores de φ), la oposición de los signos de N y φ puede ser explicada por el hecho de que los vectores **N** y $\boldsymbol{\varphi}$ están dirigidos en sentidos opuestos (fig. 54.1).

que es idéntica a la ecuación (53.1). Su solución tiene el aspecto

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{54.5}$$

Por consiguiente, con vibraciones pequeñas la desviación angular del péndulo matemático varía con el tiempo según una ley armónica.

Como sigue de (54.3), la frecuencia de las oscilaciones del péndulo matemático sólo depende de la longitud del péndulo y de la aceleración de la fuerza de la gravedad y no es una función de la masa del péndulo. Según la fórmula (53.8) y teniendo en cuenta (54.3), obtenemos la expresión para el período de las oscilaciones del péndulo matemático, conocida del curso escolar de física:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{54.6}$$

Cabe señalar que, resuelta la ecuación (54.2), es posible hallar la siguiente fórmula para el período de las oscilaciones:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \operatorname{sen}^4\frac{a}{2} + \ldots\right\},$$

donde a es la amplitud de las oscilaciones, o sea, el mayor ángulo al que se desvía el péndulo de la posición de equilibrio.

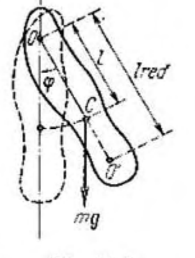


Fig 54 2

Si el cuerpo en vibración no puede ser representado como un punto material, el péndulo recibe el nombre de físico. Durante la desviación del péndulo de la posición de equilibrio a un ángulo φ, surge un momento de rotación que tiende a retornar el péndulo a la posición de equilibrio. Dicho momento

$$N = -mgl \operatorname{sen}\varphi, \tag{54.7}$$

donde m es la masa del péndulo, l, la distancia entre el punto de suspensión O y el centro de masas C del péndulo (fig. 54.2). El signo «—» tiene el mismo significado que en la fórmula (54.1).

Designando con la letra I el momento de inercia del péndulo con relación al eje que pasa por el punto de suspensión, podemos escribir:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \operatorname{sen}\varphi. \tag{54.8}$$

En el caso de vibraciones pequeñas (54.8) se convierte en la conocida ecuación:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{54.9}$$

Aquí, por ω_0^2 está designada la siguiente magnitud:

$$\omega_0^2 = mgl/I. \qquad (54.10)$$

De las ecuaciones (54.9) y (54.10) se desprende que con pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio, el péndulo físico realiza vibraciones armónicas, cuya frecuencia depende de la masa del péndulo, su momento de inercia respecto del eje de rotación y de la distancia entre dicho eje y el centro de masas del péndulo. En correspondencia con (54.10), el período de oscilaciones del péndulo físico se determina por la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgl}. \qquad (54.11)$$

De la comparación de las fórmulas (54.6) y (54.11) se obtiene que un péndulo matemático de longitud

$$l_{red} = I/ml \qquad (54.12)$$

tendrá el mismo período de oscilaciones que el péndulo físico dado. La magnitud (54.12) denomínase *longitud reducida* del péndulo físico. Esto quiere decir que la longitud reducida del péndulo físico es la longitud de semejante péndulo matemático, cuyo período de oscilación coincide con el período del péndulo físico dado.

El punto que yace en la recta que une el punto de suspensión con el centro de masas y distanciado a la longitud reducida del eje de rotación, recibe el nombre de *centro de oscilación* del péndulo físico (véase el punto O' en la fig. (54.2)). Se puede mostrar (recomendamos que esto se haga como ejercicio) que al suspender el péndulo del centro de oscilación O', la longitud reducida y, por lo tanto, el período de oscilación, serán los mismos que al principio. Así, pues, el punto de suspensión y el centro de oscilación tienen propiedad de reciprocidad: al trasladar el punto de suspensión al centro de oscilación, el anterior punto de suspensión se convierte en un nuevo centro de oscilación.

La determinación de la aceleración de la caída libre con el llamado péndulo de reversión, se basa sobre esta propiedad. Denomínase de reversión un péndulo tal, en que hay dos prismas de apoyo, paralelos entre sí y sujetos cerca de sus extremos, sobre los que puede suspenderse alternativamente. A lo largo del péndulo pueden desplazarse y ser fijados en él considerables pesos. Con el desplazamiento de los pesos se consigue que al suspender el péndulo de cualquiera de los prismas, el período de oscilación sea igual. Entonces, la distancia entre los rebordes de apoyo de los prismas será igual a l_{red}. Midiendo el período de oscilación del péndulo y conociendo l_{red}, es posible hallar la aceleración de la caída libre g con ayuda de la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{l_{red}/g}.$$

§ 55. Diagrama vectorial

La solución de una serie de problemas, en particular la suma de varias vibraciones de igual dirección (o, lo que es lo mismo, la suma de ciertas funciones armónicas), se simplifica de modo considerable y se hace evidente, si las vibraciones se representan en gráficas, en forma de vectores en un plano. El esquema que se obtiene de esta manera recibe el nombre de diagrama vectorial.

Tenemos un eje que vamos a designar con la letra x (fig. 55.1). Desde el punto O, marcado en el eje, trazamos el vector de longitud a, que con el eje forma un ángulo α. Si dicho vector se pone en rotación

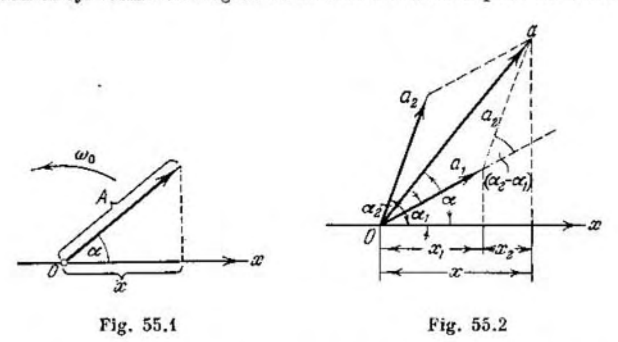


Fig. 55.1 Fig. 55.2

a una velocidad angular ω_0, la proyección del extremo del vector se desplazará por el eje x en los márgenes desde $-a$ hasta $+a$, con la particularidad de que esta proyección variará con el tiempo según la ley

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Por consiguiente, la proyección del extremo del vector sobre el eje, realizará vibraciones armónicas con una amplitud igual a la longitud del vector, con frecuencia circular igual a la velocidad angular de rotación del vector y con una fase inicial igual al ángulo formado por el vector con el eje en el momento de tiempo inicial.

De lo expuesto sigue que una vibración armónica puede ser prefijada con un vector, cuya longitud sea igual a la amplitud de la vibración, mientras que la dirección forme con el eje x un ángulo igual a la fase inicial de la vibración.

Examinemos la suma de dos vibraciones armónicas de igual dirección y frecuencia. La elongación x del cuerpo oscilante será igual a la suma de las elongaciones x_1 y x_2, que se escribirán de la

siguiente manera:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \tag{55.1}$$

Representemos las dos vibraciones con los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ (fig. 55.2). Según las reglas de la composición de vectores, construyamos el vector resultante $\mathbf{a}$. Es fácil ver, que la proyección de este vector sobre el eje x es igual a la suma de las proyecciones de los vectores que se componen:

$$x = x_1 + x_2.$$

Por lo tanto, el vector $\mathbf{a}$ es, ni más ni menos, que la vibración resultante. Este vector gira a la misma velocidad angular ω_0 que los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, de manera que el movimiento resultante será una vibración armónica con frecuencia ω_0, amplitud a y fase inicial α. De la construcción se deduce que

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{55.2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + a_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \tag{55.3}$$

Así, pues, la representación de las vibraciones armónicas por medio de vectores, da la posibilidad de reducir la suma de varias vibraciones a la composición de vectores. Este procedimiento es en particular ventajoso, por ejemplo, en óptica, donde las vibraciones luminosas en cierto punto se determinan como el resultado de la superposición de muchas oscilaciones que llegan al punto dado desde diferentes sectores del frente de onda.

Claro está, que las fórmulas (55.2) y (55.3) pueden ser obtenidas sumando las expresiones (55.1) y realizando las correspondientes transformaciones trigonométricas. Pero el procedimiento que hemos aplicado para obtener estas fórmulas, se distingue por su mayor sencillez y evidencia.

Analicemos la expresión (55.2) en lo que se refiere a la amplitud. Si la diferencia de fase de las dos vibraciones $\alpha_2 - \alpha_1$ es igual a cero, la amplitud de la vibración resultante es igual a la suma a_1 y a_2. Si la diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1$ es igual $+\pi$ o bien $-\pi$, es decir, las dos vibraciones se hallan en antifase, la amplitud de la vibración resultante será igual a $|a_1 - a_2|$.

Si las frecuencias de las vibraciones x_1 y x_2 no son iguales, los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ girarán a diferentes velocidades. En tal caso, la magnitud del vector resultante $\mathbf{a}$ pulsa y su rotación transcurre a velocidad variable. Por consiguiente, en semejante caso el movimiento resultante no será una vibración armónica, sino que cierto proceso vibratorio complejo.

§ 56. Pulsaciones

Particular interés tiene el caso cuando las dos vibraciones armónicas que se componen, tienen la misma dirección y sus frecuencias poco se diferencian entre sí. Como ahora mostraremos, el movimiento resultante puede ser considerado en estas condiciones como una vibración armónica con amplitud pulsante. Semejante vibración recibe el nombre de *pulsaciones*.

Designemos la frecuencia de una de las vibraciones con la letra ω, la frecuencia de la segunda vibración con $\omega + \Delta\omega$. De acuerdo

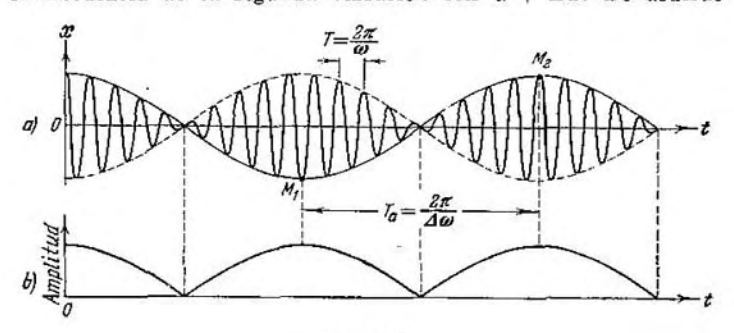


Fig. 56.1

con el planteamiento $\Delta\omega \ll \omega$. Vamos a suponer que las amplitudes de ambas vibraciones son las mismas e iguales a a. Para no complicar sin necesidad las fórmulas, supongamos que las fases iniciales de ambas vibraciones son nulas. Entonces, las ecuaciones de las vibraciones tendrán el siguiente aspecto:

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos (\omega + \Delta\omega) t.$$

Sumando estas expresiones y haciendo uso de la fórmula trigonométrica para la suma de los cosenos, obtenemos:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega t \qquad (56.1)$$

(en el segundo factor despreciamos el término $\Delta\omega/2$ en comparación con ω). La gráfica de la función (56.1) está representada en la fig. 56,1, *a*, y ha sido construida para $\omega/\Delta\omega = 10$.

El factor entre paréntesis en la fórmula (56.1) varía con mucha más lentitud que el segundo factor. A causa de la condición $\Delta\omega \ll \omega$, durante el tiempo, en el transcurso del cual el factor $\cos \omega t$ realiza varias vibraciones completas, el factor entre paréntesis casi no varía. Esto nos permite considerar la vibración (56.1) como una

vibración armónica de frecuencia ω, cuya amplitud cambia de acuerdo con cierta ley periódica. El factor entre paréntesis no puede ser la expresión de dicha ley, ya que éste varía en los límites de $-2a$ a $+2a$, mientras que, por definición, la amplitud es una magnitud positiva. La gráfica de la amplitud se muestra en la fig. 56.1, *b*. La expresión analítica de la amplitud, tiene la forma

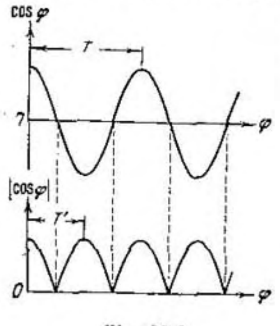


Fig. 56.2

$$\text{amplitud} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \qquad (56.2)$$

La función (56.2) es una función periódica con una frecuencia que supera dos veces la frecuencia que se encuentra bajo el signo del módulo (véase la fig. 56.2, en el que se comparan las gráficas del coseno y de su módulo), es decir, con una frecuencia $\Delta\omega$. De este modo, la frecuencia de las pulsaciones de amplitud —que suele llamarse frecuencia de las pulsaciones— es igual a la diferencia de las frecuencias de las vibraciones que se suman.

Cabe señalar, que el factor $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ no sólo determina la amplitud, sino que también influye sobre la fase de las oscilaciones. Por ejemplo, esto se manifiesta en que las desviaciones que corresponden a los máximos vecinos de la amplitud, tienen signos opuestos (véanse los puntos M_1 y M_2 en la fig. 56.1, *a*).

§ 57. Composición de vibraciones perpendiculares entre sí

Supongamos que un punto material puede realizar vibraciones tanto a lo largo del eje x, como a lo largo del eje y, perpendicular al primero. Si excitamos ambas vibraciones, el punto material se moverá por una trayectoria que, hablando en general, será curvilínea y cuya forma depende de la diferencia de fases de las dos vibraciones.

Elijamos el comienzo de registro del tiempo de forma que la fase inicial de la primera vibración sea cero. En tal caso, las ecuaciones de las vibraciones se escribirán del modo siguiente:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos (\omega t + \alpha), \qquad (57.1)$$

donde α es la diferencia de fases de ambas vibraciones.

Las expresiones (57.1) es la ecuación de la trayectoria por la que se mueve el cuerpo que toma parte en las dos vibraciones, prefijada

en forma paramétrica. Para obtener la ecuación de la trayectoria en forma corriente, hay que excluir de las ecuaciones (57.1) el parámetro t. De la primera ecuación sigue, que

$$\cos\omega t=\frac{x}{a}. \tag{57.2}$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\omega t=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}. \tag{57.3}$$

Ahora, desarrollamos el coseno en la segunda ecuación (57.1) según la fórmula para el coseno de una suma, poniendo, con esto, en lugar de $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$ sus valores de (57.2) y (57.3). Como resultado, obtenemos:

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\cos\alpha\mp\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Después de sencillas transformaciones, a esta última ecuación puede aducírsele la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha. \tag{57.4}$$

Hablano en general, ésta es la ecuación de una elipse, cuyos ejes están girados respecto de los ejes de coordenadas x e y. La orientación de la elipse y el valor de sus semiejes, de modo bastante complicado, dependen de las amplitudes a y b y de la diferencia de fases α.

Determinemos la forma de la trayectoria para ciertos casos particulares.

1. La diferencia de fases α es nula. Entonces, la ecuación (57.4) toma la forma

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0,$$

de donde se obtiene la ecuación de una recta

$$y=\frac{b}{a}x. \tag{57.5}$$

El movimiento resultante es una vibración armónica a lo largo de dicha recta con frecuencia ω y amplitud igual a $\sqrt{a^2+b^2}$ (fig. 57.1).

2. La diferencia de fases α es igual a $\pm\pi$. La ecuación (57.4) tiene el aspecto

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0, \tag{57.6}$$

de aquí resulta que el movimiento resultante es una vibración armónica a lo largo de una recta (fig. 57.2)

$$y=-\frac{b}{a}x.$$

3. Con $\alpha = \pm\pi/2$ la ecuación (57.4) se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (57.7)$$

es decir, en la ecuación de una elipse, reducida a los ejes de coordenadas, con la particularidad de que los semiejes de la elipse son iguales a las correspondientes amplitudes de las vibraciones. Cuando las amplitudes a y b son iguales, la elipse degenera en una circunferencia.

Los casos $\alpha = +\pi/2$ y $\alpha = -\pi/2$ se distinguen por la dirección del movimiento por la elipse o la circunferencia. Si $\alpha = +\pi/2$,

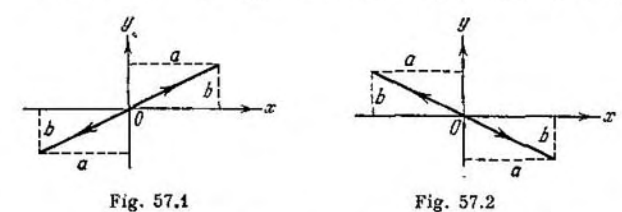


Fig. 57.1

Fig. 57.2

las ecuaciones (57.1) pueden ser escritas del modo siguiente:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = -b \operatorname{sen} \omega t. \qquad (57.8)$$

En el momento $t = 0$ el cuerpo se halla en el punto *1* (fig. 57.3). En los siguientes momentos de tiempo la coordenada x disminuye,

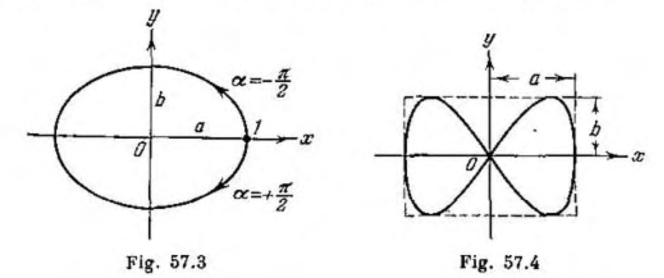


Fig. 57.3

Fig. 57.4

mientras que la coordenada y se hace negativa. Esto significa, que el movimiento transcurre en sentido horario.

Para $\alpha = -\pi/2$, las ecuaciones de las vibraciones tienen el aspecto

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \operatorname{sen} \omega t. \qquad (57.9)$$

De aquí se llega a la conclusión de que el movimiento se realiza en sentido antihorario.

De lo expuesto sigue que el movimiento uniforme por una circunferencia de radio R a velocidad angular ω, puede ser representada como la suma de dos vibraciones perpendiculares entre sí:

$$x = R\cos\omega t, \quad y = \pm R\,\text{sen}\,\omega t \tag{57.10}$$

(el signo «+» en la expresión para y corresponde al movimiento en sentido antihorario, el signo «—», al movimiento en sentido horario).

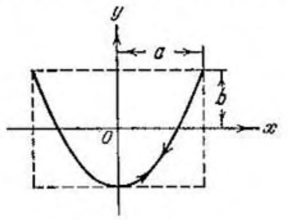


Fig. 57.5

En el caso, cuando las frecuencias de vibraciones perpendiculares entre sí se diferencian en una pequeña magnitud $\Delta\omega$, es posible considerarlas de igual frecuencia, pero con diferencia de fases que varía con lentitud. Entonces, las ecuaciones de las vibraciones se pueden escribir en la forma:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos[\omega t, + (\Delta\omega t + \alpha)]$$

y considerar que la expresión $\Delta\omega t + \alpha$ es la diferencia de fases que varía lentamente con el tiempo de acuerdo con una ley lineal.

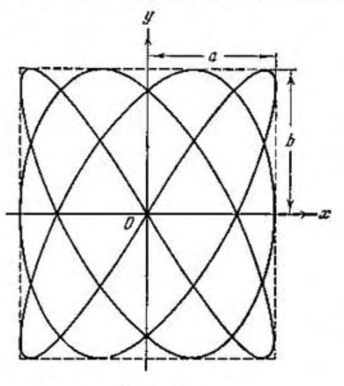


Fig. 57.6

En caso semejante, el movimiento resultante transcurre por una curva que cambia de tipo con lentitud y que consecutivamente toma la forma que corresponde a todos los valores de la diferencia de fases desde $-\pi$ hasta $+\pi$.

Si las frecuencias de las vibraciones perpendiculares entre sí no son iguales, la trayectoria del movimiento resultante tiene la forma de curvas bastante complicadas que reciben el nombre de *figuras de Lissajous*. En la fig. 57.4 se muestra una de las más sencillas trayectorias, obtenida con una razón de las frecuencias 1 : 2 y diferencia de fases $\pi/2$. Las ecuaciones de las vibraciones tienen el aspecto

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

En el intervalo de tiempo, durante el que el punto consigue desplazarse a lo largo del eje x de una posición extrema a otra, a lo largo

del eje y, después de salir de la posición nula, el punto puede alcanzar una posición extrema, a continuación, otra y retornar a la posición nula.

Con una razón de las frecuencias 1 : 2 y diferencia de fases igual a cero, la trayectoria degenera en una curva no cerrada (fig. 57.5), por la que el punto se mueve de un extremo a otro y viceversa.

Mientras más cerca de la unidad se halle la fracción racional que expresa la razón entre las frecuencias de las vibraciones, más complicada será la figura de Lissajous. La fig. 57.6 nos ofrece como ejemplo una curva para la razón entre las frecuencias 3 : 4 y diferencia de fases $\pi/2$.

§ 58. Vibraciones amortiguadas

La siguiente ecuación (véase (50.11)) describe las vibraciones amortiguadas:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{58.1}$$

donde

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \tag{58.2}$$

(r es el coeficiente de resistencia, es decir, un coeficiente de proporcionalidad entre la velocidad $\dot{x}$ y la fuerza de resistencia; k, el coeficiente de la fuerza cuasielástica).

Señalemos, que ω_0 es la frecuencia con la que se efectuarán las vibraciones libres al no haber resistencia del medio (para $r = 0$). Tal frecuencia denomínase *frecuencia propia* del sistema.

Al poner en (58.1) la función $x = e^{\lambda t}$ llegamos a la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{58.3}$$

Las raíces de esta ecuación, son iguales a

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{58.4}$$

Cuando el amortiguamiento no es demasiado grande (para $\beta < \omega_0$), la expresión subradical será negativa. Representémosla en la forma $(i\omega)^2$, donde ω es una magnitud real, igual a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{58.5}$$

Entonces, las raíces de la ecuación característica se escribirá de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega, \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega. \tag{58.6}$$

De acuerdo con (52.5), la solución general de la ecuación (58.1) será la función

$$x = C_1 e^{(-\beta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta - i\omega)t} = e^{-\beta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

La expresión entre paréntesis es análoga a la expresión (53.3). Por esta razón, se puede representar en forma análoga a (53.7). Así, pues, con un amortiguamiento no muy grande, la solución general de la ecuación (58.1), tiene el aspecto

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos (\omega t + \alpha). \tag{58.7}$$

Aquí a_0 y α son constantes tomadas al azar, ω, una magnitud que se determina con la fórmula (58.5). En la fig. 58.1 se da la gráfica de la función (58.7). Con líneas a trazos se muestran los límites en los que se encuentra la elongación x del punto en vibración.

De acuerdo con el tipo de la función (58.7), el movimiento del sistema puede ser considerado como una vibración armónica de

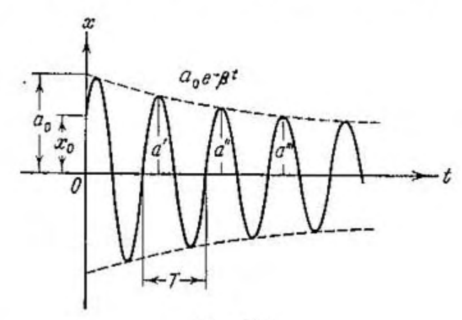


Fig. 58.1

frecuencia ω y amplitud que varía por la ley $a(t) = a_0 e^{-\beta t}$. La curva a trazos superior en la fig. 58.1 nos ofrece la gráfica de la función $a(t)$, con la particularidad de que a_0 es la amplitud en el momento inicial de tiempo. La elongación inicial x_0 depende, además de a_0, también de la fase inicial α: $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$.

La velocidad de amortiguamiento de las vibraciones se determina con la magnitud $\beta = r/2m$, que es llamada *coeficiente de amortiguamiento*. Hallemos el tiempo τ durante el que la amplitud disminuye e veces. Por definición, $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, de donde $\beta\tau = 1$. Por consiguiente, el coeficiente de amortiguación es inverso en magnitud al intervalo de tiempo, en el transcurso del cual la amplitud disminuye e veces.

En correspondencia con la fórmula (53.8) el período de las vibraciones amortiguadas

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{58.8}$$

Cuando la resistencia del medio es considerable ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), el período de las vibraciones, prácticamente, es igual a $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Con el crecimiento del coeficiente de amortiguamiento, el período de las vibraciones aumenta.

Las desviaciones máximas posteriores hacia cualquier lado (por ejemplo, a', a'', a''', etc., en la fig. 58.1) forman una progresión geométrica. En efecto, si $a' = a_0e^{-\beta t}$, entonces $a'' = a_0e^{-\beta(t+T)} = a'e^{-\beta T}$, $a''' = a_0e^{-\beta(t+2T)} = a''e^{-\beta T}$, etc. En general, la razón de los valores de las amplitudes que corresponden a los momentos de tiempo que se diferencian en un período, es igual a

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Esta razón recibe el nombre de *decremento del amortiguamiento*, mientras que su logaritmo, *decremento logarítmico del amortiguamiento*:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \qquad (58.9)$$

(¡aquí λ no se debe confundir con λ en las fórmulas (58.3) y (58.6)!).

Para la característica de un sistema vibratorio se emplea, por regla, el decremento logarítmico del amortiguamiento λ. Expresando de acuerdo con (58.9) β por medio de λ y T, es imposible escribir la ley de decrecimiento de la amplitud en la forma

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}.$$

En el transcurso del tiempo τ, durante el cual la amplitud disminuye e veces, el sistema puede realizar $N_e = \tau/T$ vibraciones. En la condición $e^{-\lambda\frac{\tau}{T}} = e^{-1}$, obtenemos que $\lambda\frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$. Por lo tanto, el decremento logarítmico de amortiguamiento es en magnitud inverso al número de vibraciones que se realizan en el intervalo de tiempo durante el que la amplitud disminuye e veces.

Con frecuencia, para caracterizar un sistema vibratorio también se utiliza la magnitud,

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \qquad (58.10)$$

que recibe el nombre de *coeficiente de calidad* (o factor de mérito) del sistema vibratorio. Como vemos en su definición, el coeficiente de calidad es proporcional al número de vibraciones N_e que realiza el sistema en el tiempo τ, durante el que la amplitud de las vibraciones disminuye e veces.

Poniendo la función (58.7) y su derivada en la expresión para la energía total de un sistema vibratorio $E = {}^1/_2kx^2 + {}^1/_2m\dot{x}^2$, después

de ciertas transformaciones nos conduce a la fórmula

$$E=\frac{1}{2}ka_0^2e^{-2\beta t}\left\{1+\frac{\beta}{\omega_0}\operatorname{sen}(2\omega t+2\alpha+\psi)\right\}, \qquad (58.11)$$

donde $\psi = \operatorname{arctg}(\beta/\omega)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 58.2.

El decrecimiento de la energía está condicionado por el trabajo de la fuerza de resistencia del medio $F_{res} = -r\dot{x}$. La potencia

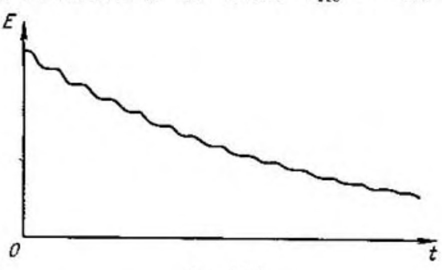


Fig. 58.2

que desarrolla esta fuerza es igual a $(-r\dot{x})(\dot{x}) = -r\dot{x}^2$. Así que

$$\frac{dE}{dt}=-r\dot{x}^2.$$

De aquí se desprende que en aquellos puntos de la curva $E(t)$, donde $\dot{x}=0$, la tangente a la curva es paralela al eje t. En los demás puntos $dE/dt<0$.

Cuando el amortiguamiento es pequeño ($\beta \ll \omega_0$) puede ser despreciado el sumando de la fórmula (58.11) que contiene el seno y considerar que la energía varía por la ley

$$E=E_0e^{-2\beta t}, \qquad (58.12)$$

donde $E_0 = {}^1/_2 ka_0^2$ es el valor de la energía en el momento inicial. A este mismo resultado se puede llegar, si el valor instantáneo de $E(t)$, determinado por la fórmula (58.11), se sustituye por su valor medio durante el tiempo desde $t - T/2$ hasta $t + T/2$ (T es el período de las vibraciones), calculado en la suposición de que el factor $\exp(-2\beta t)$ quede constante en el transcurso del intervalo T.

Después de derivar la expresión (58.12) por t, obtenemos la velocidad de crecimiento de la energía del sistema:

$$\frac{dE}{dt}=-2\beta E_0e^{-2\beta t}=-2\beta E.$$

Variando el signo por el contrario, hallamos la velocidad de decrecimiento de la energía:

$$-\frac{dE}{dt}=2\beta E. \qquad (58.13)$$

Si durante el tiempo, igual al período de las vibraciones, la energía cambia poco, el decrecimiento de ésta puede ser determinado multiplicando por T la expresión (58.13)

$$-\Delta E = 2\beta TE$$

(recordemos que ΔE es el incremento y $-\Delta E$, el decrecimiento de la energía). Por fin, tomando en consideración las fórmulas (58.9) y (58.10), llegamos a la correlación

$$\frac{E}{(-\Delta E)}=\frac{Q}{2\pi},$$

de donde se desprende que con menor amortiguamiento de las vibraciones, con una precisión salvo el factor 2π, el coeficiente de calidad es igual al cociente entre la energía acumulada en el sistema en el momento dado y el decrecimiento de dicha energía durante un período de las vibraciones.

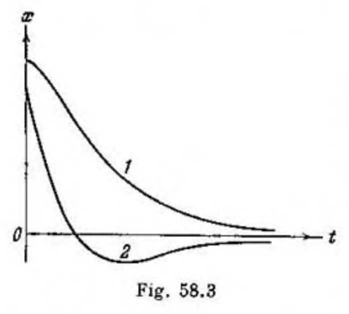


Fig. 58.3

De la fórmula (58.8) sigue que al crecer el coeficiente de amortiguamiento, el período de las vibraciones aumenta. Para $\beta = \omega_0$ el período de las vibraciones se invierte al infinito, es decir, el movimiento deja de ser periódico.

Con $\beta > \omega_0$ las raíces de la ecuación característica se hacen reales (véase (58.4)) y la solución de la ecuación diferencial (58.1) resulta ser igual a la suma de dos exponentes:

$$x=C_1e^{-\lambda_1 t}+C_2e^{-\lambda_2 t}.$$

Aquí, C_1 y C_2 son constantes reales, cuyo valor depende de las condiciones iniciales (de x_0 y $v_0 = (\dot{x})_0$). Por lo tanto, el movimiento tiene un carácter aperiódico, o sea, después de sacar el sistema de la posición de equilibrio, éste retorna a dicha posición sin realizar oscilaciones. En la fig. 58.3 se muestran dos posibles procedimientos de retorno del sistema a la posición de equilibrio durante el momento aperiódico. Por medio de cuál de estos procedimientos el sistema retorna a la posición de equilibrio, depende de las condiciones iniciales. El movimiento que se representa con la curva *2*, se anima cuando el sistema comienza a moverse desde la posición caracterizada por la elongación x_0 a la posición de equilibrio a una velocidad

inicial v_0 determinada por la condición

$$|v_0| > |x_0| \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right). \qquad (58.14)$$

Esta condición se cumplirá en el caso, cuando al sistema sacado de la posición de equilibrio se le comunica un golpe suficientemente fuerte dirigido hacia la posición de equilibrio. Si después de sacar el sistema de la posición de equilibrio, lo soltamos sin comunicarle un golpe (o sea, $v_0 = 0$) o se le transmite un golpe de suficiente fuerza (tal que v_0 es menor que la que se determina de la condición (58.14)), el movimiento transcurrirá de acuerdo con la curva *1* en la fig. 58.3.

§ 59. Autovibraciones

Con las vibraciones amortiguadas, la energía del sistema se consume para vencer la resistencia del medio. Si el decrecimiento de la energía se compensa, las vibraciones serán no amortiguadas. La reposición de la energía del sistema puede ser efectuada a cuenta de impulsos comunicados desde el exterior, pero éstos han de ser transmitidos al ritmo de sus vibraciones, ya que en el caso contrario ellas pueden debilitar las vibraciones e, incluso, hacerlas cesar por completo. Es posible obrar de tal forma que el sistema vibratorio gobierne por sí mismo los influjos exteriores, asegurando la concordancia de su movimiento con los impulsos que le comunican. Semejante sistema recibe el nombre de *autovibratorio*, mientras que las vibraciones que efectúa, denomínanse *autovibraciones*.

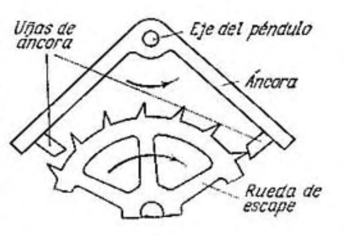


Fig. 59.1

Como ejemplo de sistema autovibratorio, examinemos el mecanismo de un reloj. El péndulo del reloj está asentado en un mismo eje con una palanca curvada, llamada áncora (fig. 59.1). En los extremos del áncora hay salientes de forma especial denominados uñas del áncora. La rueda dentada de escape se encuentra bajo la acción de la cadena con el peso o del muelle enrollado, que tienden a hacerla girar en sentido horario. Sin embargo, la mayor parte del tiempo la rueda de escape se apoya con uno de sus dientes contra la superficie lateral de una u otra de las uñas del áncora que durante las oscilaciones del péndulo se desliza por la superficie del diente. Sólo en aquellos momentos, cuando el péndulo se halla junto a su posición media, las uñas del áncora dejan de obstaculizar el movimiento de los dientes y la rueda de escape gira empujando el áncora

con el diente, cuyo vértice resbala por la superficie lateral biselada de la uña del áncora. Durante el ciclo completo de la oscilación del péndulo (por un período), la rueda de escape gira dos dientes, con la particularidad de que cada una de las uñas del áncora recibe un golpe. Mediante estos golpes, a cuenta de la energía del peso elevado o del muello enrollado, se recupera el decrecimiento de la energía del péndulo que se produce a causa del rozamiento.

§ 60. Vibraciones forzadas

Al variar la fuerza excitatriz según una ley armónica, las vibraciones se describen con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \tag{60.1}$$

(véase (50.13)). Aquí, β es el coeficiente de amortiguamiento, ω_0, la frecuencia propia del sistema (véase la fórmula (58.2)), $f_0 = F_0/m$ (F_0 es la amplitud de la fuerza excitatriz), ω, la frecuencia de la fuerza.

La ecuación (60.1) es no homogénea. De acuerdo con el teorema (52.8), la solución general de una ecuación no homogénea es igual a la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y de la solución particular de la ecuación no homogénea. Ya conocemos la solución general de una ecuación homogénea (véase la función (58.7) que es la solución general de la ecuación (58.1)). Ella tiene el aspecto

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos (\omega' t + \alpha), \tag{60.2}$$

donde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, mientras que a_0 y α son las constantes tomadas al azar[1]).

Nos queda hallar la solución particular de la ecuación (60.1) (que no contenga constantes arbitrarias). Con este fín, hagamos uso del procedimiento descrito al final del § 52. Añadamos a la función que se halla en el segundo miembro de la ecuación (60.1), la función imaginaria $if_0 \sin \omega t$, después de lo cual representemos el segundo miembro en la forma $f_0 e^{i\omega t}$ (véase la fórmula (51.9)). De este modo, llegamos a la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}. \tag{60.3}$$

Esta ecuación se resuelve con mayor facilidad que (60.1), ya que una exponente se deriva e integra con mayor sencillez que las funciones trigonométricas.

Tratemos de buscar la solución particular de la ecuación (60.3) en la forma

$$\hat{x} = \hat{a} e^{i\omega t}, \tag{60.4}$$

[1]) Con la letra ω sin raya designamos la frecuencia de la fuerza excitatriz.

donde $\hat{a}$ es cierto número complejo. La función (60.4) también es compleja, lo que se indica por la tilde sobre x. Después de derivar esta función por t, obtenemos:

$$\dot{\widehat{x}} = i\omega\widehat{a}e^{i\omega t}, \quad \ddot{\widehat{x}} = -\omega^2\widehat{a}e^{i\omega t}. \tag{60.5}$$

La sustitución de las expresiones (60.4) y (60.5) en la ecuación (60.3) nos conduce, después de reducir por el factor común $e^{i\omega t}$, a la ecuación algebraica:

$$-\omega^2\widehat{a} + 2i\beta\omega\widehat{a} + \omega_0^2\widehat{a} = f_0.$$

De aquí,

$$\widehat{a} = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega}. \tag{60.6}$$

Hemos hallado el valor de $\widehat{a}$, con el que la función (60.4) satisface la ecuación (60.3). Representemos el número complejo, que se halla en el denominador, en forma exponencial:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega = \rho e^{i\varphi}. \tag{60.7}$$

De acuerdo con (51.3)

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{60.8}$$

Sustituyendo en (60.6) el denominador en correspondencia con (60.7), obtenemos

$$\widehat{a} = f_0/\rho e^{i\varphi} = (f_0/\rho)e^{-i\varphi}.$$

Poniendo este valor de $\widehat{a}$ en (60.4), se obtiene la solución particular de la ecuación (60.3):

$$\widehat{x} = (f_0/\rho)\, e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = (f_0/\rho)\, e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Por fin, tomando la parte real de esta función, tendremos la solución particular de la ecuación (60.1):

$$x = (f_0/\rho) \cos(\omega t - \varphi).$$

La sustitución de los valores de f_0, así como los valores de (60.8) para ρ y φ, nos conduce a la expresión definitiva:

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \tag{60.9}$$

Hay que señalar que la función (60.9) no contiene constantes arbitrarias.

Hallemos la solución particular de la ecuación (60.1) con ayuda de otro procedimiento, haciendo uso del diagrama vectorial. Supon-

gamos que la solución particular de la ecuación (60.1) tiene el aspecto

$$x = a\cos(\omega t - \varphi). \qquad (60.10)$$

Entonces

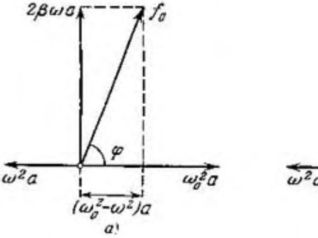
$$\dot{x} = -\omega a \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = \omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2), \qquad (60.11)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \qquad (60.12)$$

Poniendo las expresiones (60.10)—(60.12) en la ecuación (60.1), llegamos a la correlación

$$\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + \\ + \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t. \qquad (60.13)$$

De (60.13) se deduce que las constantes a y φ deben tener tales valores que la función armónica $f_0 \cos \omega t$ sea igual a la suma de las tres funciones armónicas que se encuentran en el primer miembro de



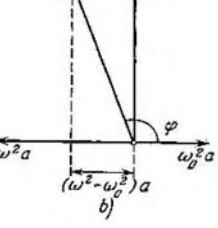


Fig. 60.1

la ecuación. Si representamos la función $\omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$ por un vector de longitud $\omega_0^2 a$, dirigido a la derecha, la función $2\beta a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ estará representada por un vector de longitud $2\beta\omega a$ (fig. 60.1), girado con relación al vector $\omega_0^2 a$ en sentido antihorario a un ángulo $\pi/2$ (véase el § 55), mientras que la función $\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi)$ se representará por un vector de longitud $\omega^2 a$, girado respecto del vector $\omega_0^2 a$, a un ángulo π. Para que la ecuación (60.13) sea satisfecha, la suma de los tres vectores enumerados debe coincidir con el vector que representa la función $f_0 \cos \omega t$. En la fig. 60.1, a vemos que semejante coincidencia sólo es posible con el valor de la amplitud a que se determina con la condición:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_0^2,$$

de donde

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (60.14)$$

(hemos sustituido f_0 por la razón F_0/m). La fig. 60.1, *a* corresponde al caso $\omega < \omega_0$. En la fig. 60.1, *b*, que corresponde al caso $\omega > \omega_0$, se obtiene un valor igual de *a*.

La fig. 60.1 también permite obtener el valor de φ, que es la magnitud del retardo de fase de la vibración forzada (60.10) respecto de la fuerza excitatriz que la acondicionó. De la figura se desprende, que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{60.15}$$

Poniendo en (60.10) los valores de *a* y φ, determinados con las fórmulas (60.14) y (60.15), obtenemos la función (60.9).

La función (60.9) sumada con (60.2) nos proporciona la solución general de la ecuación (60.1) que describe la conducta de un sistema durante las oscilaciones forzadas. El sumando (60.2) desempeña notorio papel sólo en el transcurso de la etapa inicial del proceso, durante el llamado establecimiento de las vibraciones (fig. 60.2). Con el transcurso del tiempo, a causa de la presencia del factor exponencial $e^{-\beta t}$, el papel del sumando (60.2) disminuye en grado creciente y al pasar suficiente tiempo éste puede ser despreciado, conservando en la solución sólo el sumando (60.9).

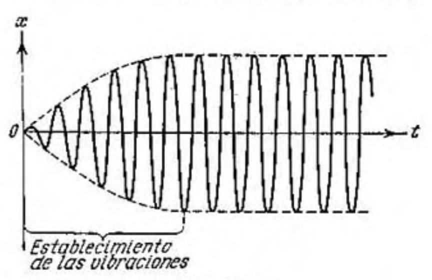


Fig. 60.2

Así, pues, la función (60.9) describe vibraciones forzadas estacionarias. Son vibraciones armónicas con una frecuencia igual a la de la fuerza excitatriz. La amplitud (60.14) de las vibraciones forzadas es proporcional a la amplitud de la fuerza excitatriz. Para el sistema vibratorio dado (ω_0 y β determinadas), la amplitud depende de la frecuencia de la fuerza excitatriz. Las vibraciones forzadas se retardan por fase de la fuerza excitatriz, con la particularidad de que la magnitud del retardo φ también depende de la frecuencia excitatriz (véase (60.15)).

La dependencia entre la amplitud de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz, conduce a que con cierta frecuencia, determinada para el sistema dado, la amplitud de las vibraciones alcanza su valor máximo. El sistema vibratorio con dicha frecuencia se hace sensible en extremo a la acción que ejerce la fuerza excitatriz. Este fenómeno se denomina *resonancia* y la frecuencia que le corresponde, *frecuencia resonante*.

Para determinar la frecuencia resonante ω_{res} hay que hallar el máximo de la función (60.14) o bien el mínimo de la expresión subradical en el denominador, que es lo mismo. Derivando dicha expresión por ω e igualándola a cero, obtenemos la condición que determina a ω_{res}:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \qquad (60.16)$$

La ecuación (60.16) tiene tres soluciones: $\omega = 0$ y $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. La solución nula corresponde al máximo del denominador. De las dos restantes soluciones, la negativa debe ser excluida por no tener sentido físico (la frecuencia no puede ser negativa). Así, pues, para la frecuencia resonante se obtiene un solo valor:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (60.17)$$

Poniendo este valor de la frecuencia en (60.14), hallaremos la expresión para la amplitud al haber resonancia:

$$a_{res} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (60.18)$$

Fig. 60.3

De (60.18) se desprende que al no haber resistencia del medio, la amplitud se reduciría al infinito si hubiera resonancia. De acuerdo con (60.17) la frecuencia resonante a esas mismas condiciones (para $\beta = 0$), coincide con la frecuencia propia ω_0 de las vibraciones del sistema.

La dependencia entre la amplitud de las oscilaciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz (o bien de la frecuencia de las vibraciones, que es lo mismo) está representada gráficamente en la fig. 60.3. Curvas aisladas en la gráfica corresponden a diversos valores del parámetro β. En correspondencia con (60.17) y (60.18), mientras menor sea β, más arriba y a la derecha yace el máximo de la curva dada. Con amortiguamiento muy grande (tal que $2\beta^2 > \omega_0^2$) la expresión para la frecuencia resonante se convierte en imaginaria. Esto significa, que a semejantes condiciones no se observa la resonancia, ya que al aumentar la frecuencia, la amplitud de las vibraciones forzadas decrece monótonamente (véase la curva inferior en la fig. (60.3). El conjunto de gráficas de la función (60.14), representado en la fig. 60.3, que corresponde a diversos valores del parámetro β recibe el nombre de *curvas de resonancia.*

Respecto de estas curvas se puede hacer, además, la siguiente indicación. Al tender ω a cero todas las curvas llegan a un mismo valor límite diferente de cero e igual a $F_0/m\omega_0^2$, es decir, a F_0/k.

Este valor es la elongación de la posición de equilibrio que bajo la acción de la fuerza constante de la magnitud F_0, recibe el sistema. Cuando ω tiende al infinito, todas las curvas tienden a cero de forma asintótica, ya que con gran frecuencia la fuerza varía de dirección con tal rapidez que el sistema no puede desplazarse notoriamente de la posición de equilibrio. Señalemos, por fin, que mientras menor sea β, de modo más considerable variará la amplitud cerca de la resonancia al cambiar la frecuencia, más «agudo» resultará ser el máximo.

De la fórmula (60.18) se deduce que con pequeño amortiguamiento (es decir, para $\beta \ll \omega_0$), al haber resonancia, la amplitud será aproximadamente igual a

$$a_{\text{res}} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}.$$

Dividamos esta expresión por la elongación x_0 de la posición de equilibrio, bajo la acción de la fuerza constante F_0, igual a $F_0/m\omega_0^2$. Obtenemos

$$\frac{a_{\text{res}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q, \quad (60.19)$$

(véase la fórmula (58.10)). De este modo, el coeficiente de calidad Q muestra cuántas veces, en el momento de la resonancia, la amplitud supera la elongación del sistema de la posición de equilibrio bajo la acción de una fuerza constante de la misma magnitud que la amplitud de la fuerza excitatriz (esto sólo es justo cuando el amortiguamiento es pequeño).

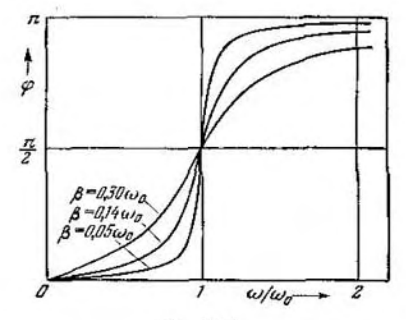


Fig. 60.4

En la fig. 60.1 vemos que las vibraciones forzadas se retardan por fase de la fuerza excitatriz, con ello, la magnitud del retardo φ yace en los márgenes de 0 a π. La dependencia entre φ y ω con diversos valores de β se muestra gráficamente en la fig. 60.4. A la frecuencia ω_0 corresponde $\varphi = \pi/2$. La frecuencia resonante es menor que la propia (véase (60.17)). Por lo tanto, en el momento de la resonancia $\varphi < \pi/2$. Con débil amortiguamiento $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$ y el valor de φ con la resonancia puede ser considerado $\pi/2$.

El fenómeno de la resonancia debe ser tomado en consideración al proyectar máquinas y diferentes construcciones. La frecuencia propia de las vibraciones de dichos dispositivos no debe ser de ninguna manera próxima a la frecuencia de posibles influjos exteriores. Por ejemplo, la frecuencia propia de las vibraciones del casco de un buque o de las alas de un avión, debe diferenciarse considerablemente de

la frecuencia de las vibraciones que pueden ser excitadas por la rotación de la hélice del buque o del avión. En caso contrario, surgen vibraciones que pueden provocar una catástrofe. Son conocidos casos, cuando se hundían los puentes al desfilar por ellos al paso una columna de soldados. Esto sucedía porque la frecuencia propia de las vibraciones del puente era cercana a la frecuencia con la que andaba la columna.

Al mismo tiempo, el fenómeno de resonancia es con frecuencia muy útil, en particular, en acústica, radiotécnica, etc.

§ 61. Resonancia paramétrica

En el caso examinado en el parágrafo anterior, la fuerza excitatriz ejercida desde el exterior, directamente condicionaba la elongación del sistema de la posición de equilibrio. Resulta que hay otro tipo de influjo desde el exterior, con ayuda del cual se puede hacer que el sistema vibre fuertemente. Este tipo de influjo, consiste en la variación periódica de uno de los parámetros cualesquiera del sistema, lo que se hace al ritmo de las vibraciones. Por esta causa, el propio fenómeno recibe el nombre de *resonancia paramétrica*.

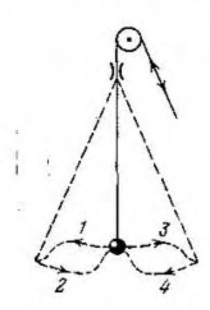


Fig. 61.1

Como ejemplo, tomemos el péndulo más sencillo: una bola suspendida de un hilo. Si cambiamos periódicamente la longitud del péndulo l, aumentándola cuando éste se halla en las posiciones extremas y disminuyéndola en aquellos momentos cuando el péndulo se encuentra en la posición media (fig. 61.1), el péndulo oscilará fuertemente. En este caso, el aumento de la energía del péndulo transcurrirá a cuenta del trabajo que realiza la fuerza ejercida sobre el hilo. Durante las oscilaciones del péndulo, la fuerza de tensión del hilo no es constante: es menor en las posiciones extremas, cuando la velocidad se hace nula y mayor en la posición media, cuando la velocidad del péndulo es máxima. Por esta razón, el trabajo negativo de la fuerza exterior es menor en magnitud al alargar el péndulo, que el trabajo positivo que se efectúa al acortarlo. En total, el trabajo de la fuerza externa durante un período resulta ser mayor que cero.

CAPÍTULO VIII

MECÁNICA RELATIVISTA

§ 62. Teoría especial de la relatividad

En el § 6 fue indicado que la mecánica newtoniana es válida sólo para aquellos cuerpos que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz en el vacío (esta velocidad se designa con la letra c). Para describir los movimientos que transcurren a velocidades comparadas con c, Einstein creó la mecánica relativista, es decir, la mecánica que tiene en cuenta las exigencias de la teoría especial de la relatividad.

Esta teoría, creada por Einstein en 1905, es la teoría física del espacio y el tiempo [1]). La base de esta teoría está formada por dos postulados que recibieron el nombre del *principio de relatividad de Einstein* y *el principio de constancia de la velocidad de la luz.*

El principio de relatividad de Einstein es la propagación del principio mecánico de Galileo (véase el § 12) a todos los fenómenos físicos sin exclusión alguna. De acuerdo con dicho principio *todas las leyes de la naturaleza son equivalentes en todos los sistemas inerciales de referencia.* La constancia del tipo de ecuación al cambiar en ella las coordenadas y el tiempo de un sistema de referencia por las coordenadas y el tiempo de otro sistema, recibe el nombre de *invariación* de la ecuación. Por lo tanto, el principio de relatividad puede ser enunciado de la siguiente forma: *las ecuaciones que expresan las leyes de la naturaleza, son invariantes con relación a las transformaciones de las coordenadas y el tiempo al pasar de un sistema inercial de referencia a otro.*

El principio de constancia de la velocidad de la luz afirma que *la velocidad de la luz en el vacío es igual en todos los sistemas inerciales de referencia y no depende del movimiento de las fuentes y receptores de la luz* [2]).

De los postulados formulados más arriba se desprende una serie de importantes deducciones ligadas con las propiedades del espacio y el tiempo. En la mecánica newtoniana el espacio y el tiempo fueron considerados independientemente uno del otro. Newton consideraba que existían el espacio absoluto y el tiempo absoluto. Según la definición del espacio absoluto éste era un almacén externo de objetos, independiente de toda cosa, que siempre es igual e inmóvil. Acerca del tiempo, Newton escribía: «El tiempo absoluto, real o matemático de

---

[1]) En 1915, Einstein creó los principios de la teoría de la relatividad que es la teoría de la gravitación.

[2]) El experimento de Michelson y Mohrli, que confirmó la justeza de este principio, será descrito en el segundo tomo del curso.

por sí y a causa de su naturaleza interior, transcurre de modo uniforme, independientemente de todo lo exterior». De acuerdo con esto se consideraba por completo natural que dos acontecimientos, simultáneos en cierto sistema de referencia, también lo serán en todos los demás sistemas de referencia. No obstante, es fácil cerciorarse de que esta última afirmación contradice el principio de constancia de la velocidad de la luz.

Tomemos dos cuerpos K y K' que, junto con los correspondientes relojes, forman sistemas inerciales de referencia. Sea que el cuerpo K'

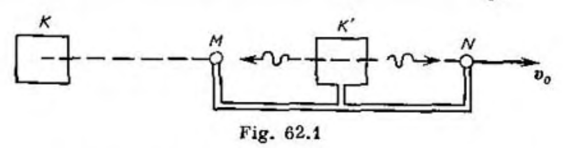


Fig. 62.1

se desplaza con relación al cuerpo K a la velocidad $\mathbf{v}_0$, dirigida a lo largo de la recta que pasa por los centros de los cuerpos (fig. 62.1). Coloquemos en dicha recta dos cuerpos M y N, distanciados a igual longitud del cuerpo K' y unidos a él rígidamente. En lo que atañe al cuerpo K, estos cuerpos se mueven a velocidad $\mathbf{v}_0$, mientras que respecto a K' están en reposo. Estudiemos en los sistemas un mismo proceso: del centro del cuerpo K' se emite una señal luminosa y ésta alcanza los cuerpos M y N. La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones e igual a c. Por esta razón, en el sistema de referencia K' la señal alcanzará los cuerpos M y N en un mismo momento de tiempo t'.

En el sistema K, la luz también se propaga a velocidad c en todas las direcciones. En este sistema el cuerpo M se mueve al encuentro de la señal luminosa. El cuerpo N se desplaza en la misma dirección que la señal. Por lo tanto, la señal llega antes al cuerpo M que al N, y por esto, $t_M < t_N$. De esta forma los acontecimientos que eran simultáneos en el sistema K', en el sistema K no lo son. De aquí se desprende que en diversos sistemas de referencia el tiempo transcurre de forma desigual.

Con el fin de describir un acontecimiento en cierto sistema de referencia, hay que indicar en qué lugar y momento de tiempo éste se ha producido. Este problema es resoluble, si trazamos en el espacio puntos de coordenadas equidistantes y junto de cada uno de ellos se ubica un reloj, con el cual sea posible determinar el momento de tiempo durante el que sucedió el acontecimiento en el lugar dado. Los puntos de coordenadas pueden ser trazados reinstalando una escala unitaria. Cualquier sistema que realiza un proceso que se repite periódicamente, servirá de reloj. Para comparar los momentos de tiempo cuando se producen dos acontecimientos en diferentes puntos del

espacio, hay que cerciorarse de que los relojes ubicados en dichos puntos son sincrónicos.

Al parecer, la sincronización podría ser efectuada colocando primero los relojes uno junto a otro y después de comprobar sus indicaciones, trasladarlos a los correspondientes puntos del espacio. Sin embargo, este procedimiento tiene que ser rechazado ya que sabemos cómo influye sobre la marcha de los relojes su traslado de un lugar a otro. Por lo tanto, antes que nada hay que instalar los relojes en sus lugares y sólo después realizar y comprobar sus indicaciones. Esto se puede realizar enviando de un reloj a otro una señal luminosa [1]). Sea que del punto A en el momento t_1 (registrado en el reloj del punto A) se envía una señal luminosa que se refleja de un espejo ubicado en el punto B y retorna al punto A en el momento t_2. Es preciso considerar que el reloj en B es sincrónico al reloj en A, si en el momento cuando a ellos llega la señal, el reloj en B indica un tiempo t igual a $(t_1 + t_2)/2$. Semejante comprobación debe realizarse para todos los relojes situados en diferentes puntos del sistema K. Los acontecimientos en A y B se considerarán simultáneos en el sistema K, si los registros del tiempo que a ellos corresponden coinciden según los relojes A y B.

De forma análoga se ejecuta la sincronización de todos los relojes en el sistema K' y cualquier otro sistema de referencia. La velocidad de la señal luminosa, con la que se realiza la sincronización, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. Ésta es la causa que condiciona la elección de una señal luminosa para la sincronización de la marcha de los relojes. Resulta que la velocidad de la luz es la velocidad tope. Ninguna señal, ninguna interacción entre los cuerpos puede propagarse a velocidad superior a la de la luz en el vacío. Así se explica la igualdad de la velocidad de la luz en el vacío en todos los sistemas de referencia. En correspondencia con el principio de relatividad, las leyes de la naturaleza, deben ser iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. El hecho de que la velocidad de la señal no puede sobrepasar cierto valor límite, también es una ley de la naturaleza. Por esta causa, en todos los sistemas de referencia, el valor de la velocidad tope debe ser igual.

La constancia de la velocidad de la luz conduce a que el espacio y el tiempo están ligados entre sí, formando un espacio-tiempo único. Esta interligazón puede ser representada con particular evidencia, mediante un espacio cuatridimensional por cuyos tres ejes se trazan las coordenadas espaciales x, y, z, mientras que por el cuarto, el tiempo t, digamos con mayor precisión, la coordenada temporal ct proporcional a t, de la misma dimensión que las coordenadas espaciales.

Cierto acontecimiento (por ejemplo, la desintegración de cierta

[1]) La comprobación de los relojes con las señales de radio, en esencia, constituye semejante sincronización.

partícula) se caracteriza por el lugar donde éste se produjo (coordenadas x, y, z) y el tiempo t, cuando aquél sucedió. De este modo, al acontecimiento corresponde en el espacio cuatridimensional imaginario un punto con coordenadas x, y, z y ct. Semejante punto recibe el nombre de *punto universal*. A toda partícula (incluso en reposo) le corresponde en el espacio cuatridimensional cierta línea, llamada *universal*, (para la partícula en reposo ésta tiene la forma de una recta paralela al eje ct).

Así, pues, el espacio y el tiempo son dos partes de un todo único. No obstante, el tiempo se distingue del espacio de forma cualitativa. Esto se manifiesta en que el espacio cuatridimensional se diferencia por sus propiedades del espacio tridimensional corriente. Este último posee la llamada métrica de Euclides, lo que quiere decir que el cuadrado de la distancia Δl entre dos puntos es igual a la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

El cuadrado de la «distancia» entre dos puntos universales (esta «distancia» denomínase *intervalo* y se designa con el símbolo Δs) determínase con la fórmula

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \qquad (62.1)$$

(las propiedades del intervalo se estudian en el § 65).

Los espacios para los que el cuadrado de la distancia se determina con una fórmula del tipo (62.1) reciben el nombre de *seudoeuclídeos*. La diferencia cualitativa entre el tiempo y el espacio se manifiesta en que el cuadrado de la coordenada temporal y los cuadrados de las coordenadas espaciales entran en la expresión (62.1) con signos distintos.

Particular papel desempeñan en la teoría especial de la relatividad las magnitudes que son *invariantes* respecto a las transformaciones de las coordenadas y el tiempo, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro (con otras palabras, las magnitudes que tienen el mismo valor numérico en todos los sistemas inerciales de referencia). Ya conocemos una de estas magnitudes, la velocidad de la luz en el vacío. En el § 65 mostraremos que el intervalo determinado con la fórmula (62.1) también es invariante.

También juegan un papel notorio las fórmulas y correlaciones, que con relación a las transformaciones indicadas más arriba, son invariantes (es decir, que tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia). Por ejemplo, las expresiones relativistas para la cantidad de movimiento y la energía se determinan de modo que los principios de conservación de dichas magnitudes no se violen al pasar a otro sistema inercial de referencia. Durante la posterior exposición nos familiarizaremos con una serie de magnitudes y correlaciones invariantes.

§ 63. Transformaciones de Lorentz

Examinemos dos sistemas inerciales de referencia que designaremos con K y K' (fig. 63.1). Supongamos que el sistema K' se mueve respecto de K a una velocidad $\mathbf{v}_0$ [1]. Dirijamos los ejes x y x' a lo largo del vector $\mathbf{v}_0$. Vamos a suponer que los ejes y e y', así como z y z', son paralelos entre sí.

A causa del principio de relatividad, los sistemas K y K' son en absoluto equivalentes. La única diferencia formal entre ellos, consiste en que la coordenada x del origen O' del sistema K', contada en el sistema K, varía según la ley

$$x_{O'} = v_0 t, \tag{63.1}$$

mientras que la coordenada x del origen O del sistema K, contada en el sistema K', varía según la ley

$$x'_O = -v_0 t'. \tag{63.2}$$

Esta diferencia se debe a que hemos elegido las direcciones de los ejes x y x' iguales, en tanto que los sistemas K y K' se mueven, uno respecto del otro, en direcciones opuestas. Por esta causa, la proyección de la velocidad relativa en el eje x del sistema K es igual a v_0 y en el eje x' del sistema K', $-v_0$.

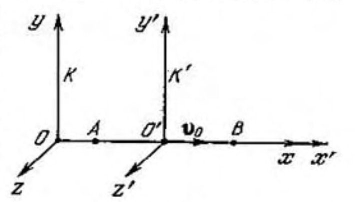


Fig. 63.1

En la mecánica no relativista, el paso de las coordenadas y el tiempo de un sistema inercial de referencia a las coordenadas y el tiempo de otro sistema inercial de referencia, se realiza con ayuda de las transformaciones de Galileo (12.1). De ellas se desprende la ley de composición de las velocidades: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$ (véase la fórmula (12.3)). Esta ley se halla en contradicción con el principio de constancia de la velocidad de la luz. En efecto, si en sistema K' la señal luminosa se propaga en el sentido del vector $\mathbf{v}_0$ a una velocidad c, de acuerdo con (12.3) la velocidad de la señal en el sistema K será $c + v_0$, es decir,

[1] Recordemos que recibe el nombre de inercial un sistema de referencia, con relación al cual una partícula libre se mueve sin aceleración (véase el § 7). En el § 12, basándonos en las transformaciones de Galileo, mostramos que el sistema K', que a velocidad constante $\mathbf{v}_0$ se mueve respecto del sistema inercial K a su vez también es inercial. En la mecánica relativista, las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por otras, que concuerden con el principio de constancia de la velocidad de la luz. No obstante, es evidente que cualquiera que sea la ley de transformación al pasar del sistema K al sistema K', en movimiento a velocidad constante $\mathbf{v}_0$ respecto al primero, si la velocidad de la partícula $\mathbf{v}$ en el sistema K es constante, también lo será $\mathbf{v}'$ en el sistema K'. Por lo tanto, también en la mecánica relativista, el sistema K', que en lo que atañe al sistema K se mueve a velocidad $\mathbf{v}_0$ constante, será asimismo inercial.

superará la velocidad de la luz c. De aquí sigue que las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por otras fórmulas. Es fácil hallar éstas.

En la forma más general, las transformaciones de las coordenadas y el tiempo al pasar del sistema K' al sistema K tienen el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} x = f_1(x', y', z', t'), \; y = f_2(x', y', z', t'), \\ z = f_3(x', y', z', t'), \; t = f_4(x', y', z', t'). \end{aligned} \tag{63.3}$$

De la homogeneidad del espacio y el tiempo se desprende que las fórmulas (63.3) deben ser lineales, o sea, tener la forma:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 t' + \alpha_5, \tag{63.4}$$

etc., donde α_1, α_2, . . . son constantes. En correspondencia

$$dx = \alpha_1 dx' + \alpha_2 dy' + \alpha_3 dz' + \alpha_4 dt', \tag{63.5}$$

etc. Realmente, de acuerdo con (63.3)

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} dz' + \frac{\partial f_1}{\partial t'} dt', \tag{63.6}$$

etc.

Si tomamos ciertas dx', dy', dz', y dt' elegidas al azar en el punto x_1', y_1', z_1', t_1', poniendo en (63.6) los valores de las derivadas en dicho punto, obtendremos para dx cierto valor dx_1. No obstante, a causa de la homogeneidad del espacio y el tiempo, en cualquier otro punto x_2', y_2', z_2', t_2', para los mismos valores de dx', dy', dz' y dt', debemos obtener para dx el mismo valor que en el primer punto, es decir, $dx_2 = dx_1$. Lo mismo tiene que ocurrir para dy, dz y dt. Como dx', dy', dz' y dt' fueron elegidas arbitrariamente en absoluto, la indicada exigencia sólo puede cumplirse si las derivadas $\partial f_1/\partial x'$, etc., no dependen de las coordenadas, o sea, son constantes. De aquí se deduce (63.5) y, seguidamente, (63.4).

Con la elección de los ejes de coordenadas que nos ofrece la fig. 63.1, el plano $y = 0$ coincide con el plano $y' = 0$, y el plano $z = 0$ con el plano $z' = 0$. De aquí sigue que, por ejemplo, las coordenadas y e y' deben anularse simultáneamente, sin depender de los valores de otras coordenadas y del tiempo. Por esta razón y e y' pueden estar ligadas sólo con una correlación del tipo

$$y = \varepsilon y',$$

donde ε es una constante. A causa de la equivalencia de los sistemas K y K' la correlación inversa debe tener la forma

$$y' = \varepsilon y$$

con el mismo valor de la constante ε que en el primer caso. Multiplicando las dos correlaciones obtenemos que $\varepsilon^2 = 1$, de donde $\varepsilon = \pm 1$. El signo más corresponde a los ejes y e y' con igual dirección,

el signo menos, a las direcciones opuestas. Dirigiendo los ejes de modo equivalente, tenemos

$$y = y'. \qquad (63.7)$$

Razonamientos análogos nos conducen a la fórmula

$$z = z'. \qquad (63.8)$$

Dirijámonos ahora a la determinación de las transformaciones para x y t. De (63.7) y (63.8) sigue que los valores de z e y no dependen de x' y t'. De esto se desprende que los valores de x' y t' no pueden depender de z e y; así, pues, los valores de x y t tampoco pueden depender de z' e y'. De este modo, x y t pueden ser funciones lineales sólo de x' y t'.

El origen de coordenadas O del sistema K tiene una coordenada $x = 0$ en K y $x' = -v_0t'$ en el sistema K' (véase (63.2)). Por consiguiente, la expresión $(x' + v_0t')$ debe reducirse a cero al mismo tiempo que la coordenada x. Para esto, la transformación lineal debe tener la forma

$$x = \gamma\,(x' + v_0t'), \qquad (63.9)$$

donde γ es cierta constante.

De manera análoga, el origen de coordenadas O' del sistema K' tiene en este sistema la coordenada $x' = 0$ y $x = v_0t$ en K (véase (63.1)). De aquí sigue, que

$$x' = \gamma\,(x - v_0t). \qquad (63.10)$$

De la equivalencia de los sistemas K y K' sigue que el coeficiente de proporcionalidad debe ser el mismo en los dos casos.

Con el fin de hallar el coeficiente γ vamos a utilizar el princpio de constancia de la velocidad de la luz. Comencemos a contar el tiempo en los dos sistemas desde el momento cuando sus orígenes de coordenadas coinciden. Supongamos que en el momento $t = t' = 0$ en la dirección de los ejes x y x' se envía una señal luminosa que produce un destello de luz en una pantalla, situada en el punto con la coordenada x en el sistema K y con coordenada x' en el sistema K'. Este acontecimiento (el destello) se describe con la coordenada x y el momento t en el sistema K y con la coordenada x' y el momento t' en el sistema K', con la particularidad de que

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

Poniendo estos valores de x y x' en las fórmulas (63.9) y (63.10), obtenemos

$$ct = \gamma\,(ct' + v_0t') = \gamma\,(c + v_0)\,t',$$
$$ct' = \gamma\,(ct - v_0t) = \gamma\,(c - v_0)\,t.$$

Multiplicando las dos correlaciones, llegamos a la ecuación

$$c^2 = \gamma^2\,(c^2 - v_0^2).$$

De aquí

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (63.11)$$

La sustitución de este valor en (63.9) nos conduce a la fórmula

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (63.12)$$

La fórmula (63.12) nos permite hallar el valor de x por medio de los valores conocidos de x' y t'. Para obtener la fórmula que con ayuda de los valores conocidos de x' y t' nos permitiera hallar el valor de t, excluyamos de (63.9) y (63.10) la coordenada x y resolvemos la correlación obtenida respecto de t. He aquí el resultado

$$t = \gamma \left[t' + \frac{x'}{v_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right].$$

Poniendo el valor de (63.11) para γ obtenemos la siguiente fórmula:

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2)\, x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (63.13)$$

El conjunto de las fórmulas (63.7), (63.8), (63.12) y (63.13) lleva el nombre de *transformaciones de Lorentz*. Si empleamos la designación de uso general

$$\beta = v_0/c, \qquad (63.14)$$

las transformaciones de Lorentz toman la forma

$$x = \frac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\beta/c)\, x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (63.15)$$

Con las fórmulas (63.15) se realiza la transición de las coordenadas y el tiempo contados en el sistema K', a las coordenadas y el tiempo contados en el sistema K (de forma más corta, del sistema K' al sistema K). Si las ecuaciones (63.15) se resuelven respecto de las magnitudes con raya, se obtienen las fórmulas de transformación para parar del sistema K al K':

$$x' = \frac{x - \beta c t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\beta/c)\, x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \qquad (63.16)$$

Como era de esperar, tomando en consideración la equivalencia de los sistemas K y K', las fórmulas (63.16) sólo se distinguen de las (63.15) por el signo junto a β, es decir, junto a v_0.

Es fácil comprender, que cuando $v_0 \ll c$ (o sea, $\beta \ll 1$) las transformaciones de Lorentz se convierten en las de Galileo (véase (12.1)). Así, pues, las transformaciones de Galileo conservan su valor para las velocidades que en comparación con la de la luz en el vacío son pequeñas.

Con $v_0 > c$ las expresiones (63.15) y (63.16) para x, t, x' y t' se convierten en imaginarias. Esto concuerda con que es imposible el movimiento a velocidades mayores que la de la luz en el vacío. No se puede incluso hacer uso de un sistema de referencia que se mueva a velocidad c, ya que con $v_0 = c$ en los denominadores de las fórmulas para x y t habrá cero.

Las transformaciones de Lorentz tienen en particular una forma sencilla y simétrica, si las escribimos no para x y t, sino que para x y (ct), es decir, para magnitudes de igual dimensión. En tal caso, las fórmulas (63.15) serán así:

$$x = \frac{x' + \beta (ct')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (63.17)$$

Las fórmulas (63.17) se recuerdan con facilidad si tomamos en consideración, que la primera de ellas se distingue de la «evidente» fórmula $x = x' + v_0 t'$ por la presencia en el denominador de la expresión $\sqrt{1-\beta^2}$, característica para las fórmulas relativistas. La última fórmula se obtiene de la primera si cambiamos de lugar x' y ct'.

§ 64. Corolarios de las transformaciones de Lorentz

De las transformaciones de Lorentz se deriva una serie de corolarios, singulares desde el punto de vista de la mecánica newtoniana.

Simultaneidad de los acontecimientos en diferentes sistemas de referencia. Supongamos que en los puntos con coordenadas x_1 y x_2 en el sistema K se producen simultáneamente dos acontecimientos en el momento de tiempo $t_1 = t_2 = b$. De acuerdo con la última de las fórmulas (63.16) a estos acontecimientos corresponderán en el sistema K' los momentos de tiempo

$$t_1' = \frac{b - (\beta/c)\, x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{b - (\beta/c)\, x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Como vemos en estas fórmulas, cuando en el sistema K los acontecimientos están separados ($x_1 \neq x_2$), en el sistema K' ellos no serán simultáneos ($t_1' \neq t_2'$). El signo de sustracción $t_2' - t_1'$ se determina por el signo de la expresión $(\beta/c)(x_1 - x_2)$; por consiguiente, en diversos sistemas K' (para diferentes β) la diferencia $t_2' - t_1'$ será distinta en magnitud y puede diferir por el signo. Esto quiere decir, que en unos sistemas el acontecimiento *1* precederá al acontecimiento *2* y, a la inversa, en otros sistemas el acontecimiento *2* se producirá antes que el *1*. Cabe indicar, que lo dicho sólo se refiere a acontecimientos entre los que no hay nexos casuales. Los acontecimientos entre los que hay nexos casuales (por ejemplo, el lanzamiento de una piedra y su caída en la Tierra) no serán simultáneos en ninguno de los sistemas de referencia y en todos ellos, el acontecimiento que es la

causa precederá al efecto. Sobre esto trataremos con mayor detalle en el siguiente parágrafo.

Longitud de los cuerpos en diversos sistemas. Consideremos una barra ubicada a lo largo del eje x' y que, en lo que se refiere al sistema de referencia K', está en reposo (fig. 64.1). Su longitud en este sistema es igual a $l_0 = x_2' - x_1'$, donde x_1' y x_2' son las coordenadas de los extremos de la barra, que no varían con el tiempo t'. En lo que atañe al sistema K, la barra se mueve a una velocidad $v = v_0$. Para determinar su longitud en este sistema, hay que marcar las coordenadas de los extremos de la barra x_1 y x_2 en un mismo momento de tiempo $t_1 = t_2 = b$. Su diferencia $l = x_2 - x_1$ nos proporciona la longitud de la barra, medida en el sistema K. Para hallar la correlación entre l_0 y l, es preciso tomar aquella de las fórmulas de las transformaciones de Lorentz que contiene x', x y t, es decir, la primera de las fórmulas (63.16). Sustituyendo en dicha fórmula β por v_0/c, obtenemos

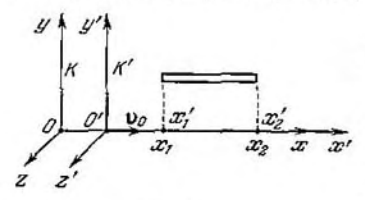


Fig. 64.1

$$x_1' = \frac{x_1 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

de donde

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Haciendo uso de las designaciones l y l_0, así como sustituyendo la velocidad relativa de los sistemas de referencia v_0 por la velocidad v de la barra respecto del sistema K, igual a la primera, llegamos a la correlación

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (64.1)$$

De este modo, la longitud de la barra l, medida en el sistema con relación al cual está en movimiento, es menor que la longitud l_0, medida en el sistema respecto del cual la barra está en reposo [1]).

Si una barra de longitud $l_0 = x_2 - x_1$ está en reposo en el sistema K, para determinar su longitud en el sistema K', hay que marcar las coordenadas de sus extremos x_1' y x_2' en un mismo momento de tiempo $t_1' = t_2' = b$. La diferencia $l = x_2' - x_1'$ nos dará la longitud de la barra en el sistema K', respecto del cual ésta se mueve a velociadad v. Empleando la primera de las ecuaciones (63.15), llegaremos de nuevo a la correlación (64.1).

[1]) En ocasiones, la longitud l_0 medida en el sistema en el que la barra está en reposo, recibe el nombre de *longitud propia* de la barra.

Cabe señalar que, en la dirección de los ejes z e y las dimensiones de la barra son iguales en todos los sistemas de referencia.

Así pues, cuando los cuerpos se mueven, sus dimensiones en la dirección de movimiento se acortan tanto más, cuanto mayor sea la velocidad de su desplazamiento. Este fenómeno, recibe el nombre de *contracción de Lorentz* (o de Fitzgerald). Es curioso, que de modo visual (o en una fotografía), la variación de la forma de los cuerpos no puede ser advertida incluso a velocidades comparables con c. La causa de este hecho es muy sencilla. Al observar de forma visual o al fotografiar cualquier cuerpo, registramos los impulsos de luz que parten de diversos sectores del cuerpo y que simultáneamente alcanzaron la retina del ojo o la placa fotográfica. Estos impulsos se emiten no al mismo tiempo. Los impulsos de los sectores más alejados fueron irradiados antes que los más cercanos. Así, que si el cuerpo está en movimiento, sobre la retina o en la fotografía se obtiene una imagen deformada del cuerpo. El correspondiente cálculo nos muestra que el efecto de dicha deformación será la compensación de la contracción de Lorentz [1]), de forma que parece que el cuerpo no está deformado, sino que sólo girado. Es natural, que un cuerpo de forma esférica, incluso a grandes velocidades de movimiento se percibirá de modo visual como un cuerpo de contorno esférico.

Intervalo de tiempo entre los acontecimientos. Supongamos que en un mismo punto del sistema K' se producen dos acontecimientos. Al primero le corresponde en dicho sistema la coordenada $x_1' = a$ y el momento de tiempo t_1', al segundo, la coordenada $x_2' = a$ y el momento de tiempo t_2'. De acuerdo con la última de las fórmulas (63.15), a estos acontecimientos les corresponden los siguientes momentos de tiempo en el sistema K

$$t_1 = \frac{t_1' + (v_0/c^2)\,a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + (v_0/c^2)\,a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

(hemos sustituido β por v_0/c). De aquí

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Introduciendo las designaciones $t_2 - t_1 = \Delta t$ y $t_2' - t_1' = \Delta t'$, obtenemos la fórmula

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad (64.2)$$

que liga los intervalos de tiempo entre dos acontecimientos, medidos en los sistemas K y K'. Recordemos que en el sistema K' ambos acontecimientos transcurren en un mismo punto: $x_1' = x_2'$.

[1]) Si no existiera contracción de Lorentz, los cuerpos en rápido movimiento deberían verse alargados en dirección del movimiento.

Supongamos que ambos acontecimientos se producen respecto de una misma partícula que en el sistema K' está en reposo y que se mueve con relación al sistema K a una velocidad $v = v_0$. Entonces, $\Delta t'$ puede ser interpretada como el intervalo de tiempo medido con un reloj que está inmóvil en lo que atañe a la partícula, con otras palabras, medido con el reloj que se mueve junto con la partícula (se tiene en cuenta el movimiento con relación al sistema K). El tiempo contado por el reloj que se mueve junto con el cuerpo denomínase *tiempo propio* de dicho cuerpo y, por regla, se designa con la letra τ. Así, pues, $\Delta t' = \Delta\tau$. Tomando esta designación en cuenta, a la fórmula (64.2) se la puede dar el aspecto

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (64.3)$$

(hemos sustituido la velocidad relativa del sistema de referencia v_0 por la velocidad de la partícula v, igual a la primera).

La fórmula (64.3) liga el tiempo propio τ del cuerpo con el tiempo t, contado por el reloj del sistema de referencia, respecto del cual el cuerpo se mueve a la velocidad v (este reloj se mueve respecto del cuerpo a una velocidad $-v$). En (64.3) vemos que el tiempo propio siempre es menor que el tiempo contado por el reloj que se mueve respecto al cuerpo. En el próximo parágrafo mostraremos que el tiempo propio es invariante (igual en todos los sistemas de referencia).

Considerando el acontecimiento que surfió la partícula en el sistema K, se puede determinar Δt como el intervalo de tiempo medido con el reloj inmóvil, mientras que $\Delta\tau$, como el intervalo de tiempo medido con el reloj que se mueve a una velocidad v. De acuerdo con (64.3) $\Delta\tau < \Delta t$; por esto podemos decir que el reloj en movimiento marcha más lentamente que el reloj en reposo (se tiene en cuenta que salvo la velocidad de movimiento, los dos relojes son idénticos).

La correlación (64.3) ha obtenido confirmación práctica directa. En la composición de los rayos cósmicos hay partículas mesones mu (μ) o bien muones. Estas partículas no son estables, se desintegran espontáneamente en un electrón (o positrón) y dos neutrinos. El tiempo medio de vida, medido en condiciones cuando el muon está en reposo (o se mueve a pequeña velocidad), constituye unos $2 \cdot 10^{-6}$ s. Podría parecer que incluso al moverse a la velocidad de la luz, los muones recorrerían un camino cerca de 600 m. Sin embargo, como muestran las observaciones, los muones se forman en los rayos cósmicos a una altura de 20—30 km y en considerable cantidad alcanzan la superficie terrestre. Este fenómeno se explica por el hecho de que $2 \cdot 10^{-6}$ s es el tiempo propio de vida del muon, es decir, el tiempo medido por el reloj que se mueve junto con la partícula. El tiempo medido con el reloj del observador relacionado con la Tierra resulta ser mucho mayor (véase la fórmula (64.3); v del muon es próxima a c). Por esta razón, nada hay de asombroso en que el observador ve un recorrido del muon mucho mayor que 600 m. Cabe señalar, que desde el punto de

vista del observador que se mueve junto con el muon, la distancia volada por él hasta la superficie de la Tierra se reduce hasta 600 m (véase la fórmula (64.1)), de forma que el muon tiene tiempo de cubrir esta distancia durante $2 \cdot 10^{-6}$ s.

§ 65. Intervalo

En el § 62 fue demostrado que en el espacio cuatridimensional imaginario, a cada acontecimiento se le puede contraponer un punto universal con coordenadas ct, x, y, z. Se sabe que un acontecimiento tiene las coordenadas ct_1, x_1, y_1, z_1 y el segundo, ct_2, x_2, y_2, z_2. Introducimos las designaciones: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $x_2 - x_1 = \Delta x$, etc.

Recordemos que a causa de la diferencia cualitativa entre es tiempo y el espacio, el cuadrado de la diferencia de las coordenadal temporales $(c\Delta t)^2$ y los cuadrados de las diferencias de las coordenadas espaciales Δx^2, Δy^2, Δz^2 entran en la expresión para el cadrado de la «distancia» entre los acontecimientos (con más precisión, entre los puntos universales que corresponden a los acontecimientos) con signos diferentes:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \qquad (65.1)$$

La magnitud Δs que se determina por esta forma recibe el nombre de *intervalo* entre los acontecimientos.

Introduciendo la distancia $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ entre los puntos del espacio tridimensional corriente, en las que se produjeron los acontecimientos que examinamos, la expresión para el intervalo puede ser representada en forma

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}. \qquad (65.2)$$

Es fácil cerciorarse de que el intervalo en los dos acontecimientos dados, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. Precisamente esta circunstancia sirvió de base para considerar análoga a él la distancia Δl entre dos puntos en el espacio tridimensional corriente (Δl no varía su valor al pasar de un sistema tridimensional a otro).

Supongamos que en el sistema de referencia K, el cuadrado del intervalo se determina con la fórmula (65.1). En el sistema K', el cuadrado del intervalo entre esos mismos acontecimientos es igual a

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \qquad (65.3)$$

De acuerdo con las fórmulas (63.16)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta c \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c)\,\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Poniendo estos valores en la fórmula (65.3), después de sencillas transformaciones, obtenemos que $\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$,

es decir, que

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2.$$

De este modo, el intervalo es una invariante con relación del paso de un sistema inercial de referencia a otro. En el parágrafo anterior hemos visto que los intervalos de tiempo Δt y la longitud Δl, no son invariantes al realizarse semejante transición. Por lo tanto, cada uno de los sumandos que forman la magnitud $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$ variará al pasar de un sistema a otro; la propia magnitud Δs^2 queda constante.

El intervalo entre dos acontecimientos, que transcurrieron con cierta partícula, se encuentra en correlación simple con el intervalo de tiempo propio entre estos acontecimientos. De acuerdo con (64.3), el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$ está ligado con el intervalo de tiempo Δt, contado con el reloj del sistema respecto del cual la partícula se mueve a velocidad v, con la fórmula

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Transformemos esta fórmula del modo siguiente:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2 - (v\Delta t)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta l^2}.$$

Aquí $\Delta l = v\Delta t$ es el recorrido que pasa la partícula durante el tiempo Δt. La comparación con (65.2) nos da que

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\Delta s, \tag{65.4}$$

donde Δs es el intervalo entre los acontecimientos que están separados por el intervalo de tiempo $\Delta\tau$.

De la fórmula (65.4) se desprende que el intervalo de tiempo propio es proporcional al intervalo entre los acontecimientos. El intervalo es invariante. Por consiguiente, el tiempo propio también es invariante, o sea, que no depende de en qué sistema de referencia se observa el movimiento del cuerpo dado.

En correspondencia con la fórmula (65.2), el intervalo puede ser real (si $c\Delta t > \Delta l$) o bien imaginario (si $c\Delta t < \Delta l$). En caso particular, el intervalo puede ser cero (si $c\Delta t = \Delta l$). Este último caso tiene lugar para los acontecimientos que consisten en la emisión de una señal luminosa del punto x_1, y_1, z_1 en el momento t_1 y la llegada de dicha señal al punto x_2, y_2, z_2 en el momento t_2. Como en semejante caso $\Delta l = c\Delta t$, el intervalo entre los acontecimientos será cero.

A causa de su invariación, el intervalo que es real (imaginario) en un sistema cualquiera de referencia K, será real (imaginario) en cualquier otro sistema de referencia K'.

En el caso, cuando el intervalo es real

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0.$$

De aquí sigue que puede ser hallado un sistema K' tal, en el que $\Delta l' = 0$, es decir, los dos acontecimientos resultan conjugados en el espacio. Sin embargo, no existe semejante sistema de referencia, en el que $\Delta t' = 0$ (con semejante valor de $\Delta t'$ el intervalo sería imaginario). Así, pues, los acontecimientos separados entre sí por un intervalo real, no pueden ocurrir simultáneamente en ningún sistema de referencia. Por este motivo, los intervalos reales reciben el nombre de *cuasitemporales*.

Señalemos, que los acontecimientos que ocurren con una misma partícula (se tiene en cuenta una partícula con masa en reposo diferente de cero), pueden sólo estar separados por un intervalo cuasitemporal. En efecto, la velocidad v de tal partícula siempre es menor que c; por lo tanto, el recorrido Δl pasado por la partícula, es menor que $c\Delta t$, de donde sigue que $\Delta s^2 > 0$. De acuerdo con la última fórmula (63.16)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c)\,\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{65.5}$$

Si los intervalos Δt y Δx separan acontecimientos que ocurrieron con aquella misma partícula, $\Delta x/\Delta t$ proporciona la velocidad de la partícula v_x. Con esta condición, la fórmula (65.5) puede ser escrita en la forma

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c)\,(\Delta x/\Delta t)\,\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \beta\frac{v_x}{c}\right).$$

En vista de que $\beta = v_0/c$ y v_x/c son menores que la unidad, el paréntesis en el segundo miembro de la igualdad es positivo para todos los sistemas K'. De aquí se desprende que el signo de $\Delta t'$ es igual que el de Δt. Esto significa que dos acontecimientos ocurridos con cierta partícula, se realizan con igual consecutividad en todos los sistemas. Por ejemplo, la creación de una partícula es precedida en todos los sistemas de referencia por su desintegración.

Cuando el intervalo es imaginario

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0.$$

De aquí se deduce que puede ser hallado semejante sistema K', en el que $\Delta t' = 0$, es decir, los dos acontecimientos transcurren en un mismo momento de tiempo t'. No obstante, no existe tal sistema de referencia, en el que $\Delta l' = 0$ (con tal valor de $\Delta l'$ el intervalo sería real). De este modo, los acontecimientos divididos por un intervalo imaginario, en ningún sistema de referencia pueden estar conjugados en el espacio. Por esta causa, los intervalos imaginarios denomínanse *cuasiespaciales*.

La distancia Δl entre los puntos, en los que transcurren los acontecimientos, separados por un intervalo cuasiespacial, supera $c\Delta t$, por lo que los acontecimientos que se consideran no pueden, de ninguna

forma, influenciar entre sí, es decir, no pueden tener entre sí ligazón casual (recordemos que no hay acciones que se propaguen a velocidades mayores que c).

Los acontecimientos con ligazón casual, sólo pueden estar separados por un intervalo cuasiespacial o cero.

§ 66. Transformación y composición de velocidades

Estudiemos el movimiento de un punto material. En el sistema K la posición del punto se determina por las coordenadas x, y, z en cada momento de tiempo t. Las expresiones

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt}$$

son las proyecciones en los ejes x, y, z del vector de velocidad del punto con relación al sistema K. En el sistema K' la posición del punto se caracteriza en cada momento de tiempo t' por las coordenadas x', y', z'. Las proyecciones en los ejes x', y', z' del vector de velocidad del punto con relación al sistema K', se determinan con las expresiones

$$v'_x=\frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y=\frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z=\frac{dz'}{dt'}.$$

De las fórmulas (63.15) sigue

$$dx=\frac{dx'+v_0\,dt'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \quad dy=dy', \quad dz=dz', \quad dt=\frac{dt'+(v_0/c^2)\,dx'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$$

(hemos sustituido β por v_0/c). Después de dividir las tres primeras igualdades por la cuarta, obtenemos las fórmulas de transformación de las velocidades al pasar de un sistema de referencia a otro:

$$v_x=\frac{v'_x+v_0}{1+v_0v'_x/c^2}, \quad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1+v_0v'_x/c^2}, \quad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1+v_0v'_x/c^2}. \quad (66.1)$$

Cuando $v_0 \ll c$, las correlaciones (66.1) se convierten en las fórmulas para la composición de las velocidades (12.2) de la mecánica clásica.

De las fórmulas (63.16) es fácil obtener las expresiones para las velocidades en el sistema K', haciendo uso de las velocidades en el sistema K:

$$v'_x=\frac{v_x-v_0}{1-v_0v_x/c^2}, \quad v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1-v_0v_x/c^2}, \quad v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1-v_0v_x/c^2}. \quad (66.2)$$

Estas fórmulas sólo se diferencian de las (66.1) por el signo de v_0. Claro está, que semejante resultado podía haber sido previsto de antemano.

Si el cuerpo se mueve en paralelo al eje x, su velocidad v respecto del sistema K coincidirá con v_x, mientras que la velocidad v' con relación al sistema K', con v'_x. En tal caso, la ley de composición de

las velocidades tendrá la forma

$$v=\frac{v'+v_0}{1+v_0v'/c^2}. \qquad (66.3)$$

Sea que la velocidad v' es igual a c. Entonces, según la fórmula (66.3) obtenemos para v el siguiente valor

$$v=\frac{c+v_0}{1+v_0c/c^2}=c.$$

Este resultado no es sorprendente, ya que las transformaciones de Lorentz (y, por consiguiente, las fórmulas para la composición de velocidades) se basan en la afirmación de que la velocidad de la luz es igual en todos los sistemas de referencia. Haciendo en la fórmula (66.3) $v' = v_0 = c$, obtenemos para v un valor que también es igual a c. De modo que si las velocidades que se suman v' y v_0 no superan c, la resultante de la velocidad v tampoco puede sobrepasar a c.

§ 67. Expresión relativista para la cantidad de movimiento

Las ecuaciones de Newton son invariantes en lo que se refiere a las transformaciones de Galileo (véase el § 12). Pero en lo que atañe a las transformaciones de Lorentz, no lo son. En particular, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, que se desprende de

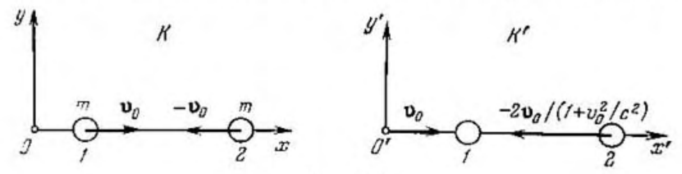


Fig. 67.1

las leyes de Newton, no es invariante con relación a las transformaciones de Lorentz (véase el § 27). Para cerciorarse de esto, consideremos qué aspecto tiene en los sistemas K y K' el choque perfectamente inelástico de dos esferas, iguales de masa m (fig. 67.1).

Supongamos que en el sistema K las esferas se mueven al encuentro una de otra a lo largo del eje x, a velocidades iguales en magnitud, cuyas proyecciones sobre el eje x son: $v_{x1} = v_0$ y $v_{x2} = -v_0$ (v_0 es la velocidad relativa de los sistemas K y K'). Con estas condiciones, después del choque las esferas quedarán en reposo: $v_{x1} = v_{x2} = 0$. Así, la cantidad total de movimiento del sistema antes y después del choque es igual a cero, en el sistema K la cantidad de movimiento se conserva.

Examinemos ahora ese mismo proceso en el sistema K'. Haciendo uso de la primera de las fórmulas (66.2), para las velocidades de las esferas antes del choque hallamos los valores $v'_{x1} = 0$ y $v'_{x2} = -2v_0/(1 + v_0^2/c^2)$, mientras que para las velocidades de las esferas después del choque, un valor que coincide $v'_{x1} = v'_{x2} = -v_0$. Por lo tanto, la cantidad total de movimiento antes del choque es igual a $-2mv_0/(1 + v_0^2/c^2)$, después de éste, $-2mv_0$. Si $v_0 \ll c$, la cantidad de movimiento antes y después del choque es prácticamente igual. No obstante, cuando las esferas se mueven a gran velocidad v_0, entre las cantidades de movimiento inicial y final se advierte una considerable diferencia. De forma, que empleando las expresiones newtonianas para la cantidad de movimiento, llegamos a la conclusión de que, al parecer, en el sistema K' la cantidad de movimiento no se conserva. Una de las leyes fundamentales de mecánica, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, de acuerdo con la enunciación newtoniana, resulta ser no invariante respecto de las transformaciones de Lorentz.

Intentemos hallar tal expresión para la cantidad de movimiento, que el principio de conservación de la cantidad de movimiento sea invariante en lo que se refiere a las transformaciones de Lorentz. Aquí, hemos de tener en cuenta que a pequeñas velocidades ($v \ll c$), la expresión relativista de la cantidad de movimiento debe convertirse en la expresión newtoniana

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (67.1)$$

Supongamos que la expresión para la cantidad de movimiento de una partícula de masa m, tiene el especto

$$\mathbf{p} = mf(v)\,\mathbf{v}, \qquad (67.2)$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad, v, el módulo de la velocidad de la partícula, $f(v)$, cierta función adimensional de v. Para que con $v \ll c$ la expresión (67.2) se convierta en (67.1), de hecho, la función $f(v)$ debe ser igual a uno, cuando las velocidades son tales.

Consideremos un choque perfectamente elástico de dos partículas iguales de masa m en el sistema K_C de su centro de inercia. En semejante sistema la cantidad sumaria de movimiento de las partículas es igual a cero. Por lo tanto, las velocidades de las partículas son iguales en magnitud y de dirección opuesta (fig. 67.2, *a*). A causa de los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, las velocidades de las partículas después del choque deben tener la misma magnitud que antes del choque, mientras que las direcciones de dichas velocidades deben ser opuestas (véase la fig. 67.2, *a*).

Elijamos los ejes de coordenadas de manera que las velocidades de las partículas yazcan en el plano x, y, siendo simétricas al eje x.

Entonces, el choque de las partículas en el sistema K_C tendrá el aspecto que nos ofrece la fig. 67.2, *b*.

Pasemos del sistema de cálculo K_C al K', respecto del cual la partícula *2* se mueve en paralelo respecto del eje y'. En este sistema el choque tiene el aspecto que muestra la fig. 67.3, *a*. Junto a las flechas

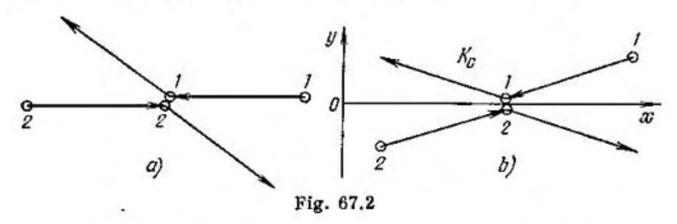


Fig. 67.2

que representan las velocidades y sus componentes por los ejes de coordenadas, se indican los módulos de las correspondientes velocidades o de sus componentes.

Por último, pasemos al sistema de referencia K, con relación al cual la partícula *1* se mueve en paralelo al eje y (fig. 67.3, *b*). Los

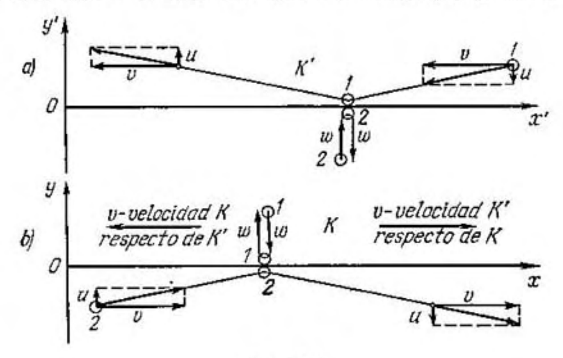


Fig. 67.3

valores de v, u y w en las figs. 67.3, *a* y 67.3, *b* son iguales, ya que a causa de la simetría del problema, al pasar del sistema K' al sistema K, las partículas intercambian las velocidades.

Partimos de que la cantidad sumaria de movimiento se conserva durante el choque en el sistema K_C. Exijamos que en el sistema K también se cumpla el principio de conservación de la cantidad de movimiento. En la fig. 67.3, *b* vemos que la componente x de la

cantidad sumaria de movimiento de la partícula en el sistema K no varía, como resultado del choque. También debe quedar invariable la componente y de la cantidad sumaria de movimiento. Teniendo en cuenta (67.2) la conservación de la componente y se escribe de forma analítica:

$$mf(w)(-w)+mf\left(\sqrt{v^2+u^2}\right)u=mf(w)w+mf\left(\sqrt{v^2+u^2}\right)(-u).$$

De aquí sigue que

$$f(w)\,w=f\left(\sqrt{v^2+u^2}\right)u. \tag{67.3}$$

En el sistema K' la componente y v'_y de la velocidad inicial de la partícula *2* es igual a w, mientras que la componente x v'_x es igual a cero. En el sistema K la componente y v_y de la velocidad inicial de la partícula *2* es igual a u. La velocidad relativa v_0 de los sistemas K' y K es igual a v. En correspondencia con la segunda de las fórmulas (66.1), las magnitudes u y w están ligadas por la correlación

$$u=w\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Al poner este valor de u en la igualdad (67.3), obtenemos:

$$f(w)=f\left(\sqrt{v^2+u^2}\right)\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{67.4}$$

Sea que la velocidad w (como también u) es mucho menor que c, mientras que v es comparable con la velocidad de la luz c (las partículas antes y después del choque vuelan casi paralelas al eje x). Entonces, $f(w)$ puede hacerse igual a uno (para $v\ll c$ la cantidad de movimiento se determina con la fórmula (67.1)), mientras que $\sqrt{v^2+u^2}$ se considera igual a v. La propia v puede ser considerada no como la magnitud de la componente de la velocidad a lo largo del eje x, sino como la magnitud de la velocidad de la partícula. En tal caso, la correlación (67.4) toma el aspecto

$$1=f(v)\sqrt{1-v^2/c^2},$$

de donde

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

La sustitución de esta función en (67.2) nos conduce a la expresión relativista para la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{67.5}$$

La expresión (67.5) puede ser representada en la forma

$$\mathbf{p}=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}=m\,\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \tag{67.6}$$

donde $d\tau$ es el intervalo de tiempo propio de la partícula, durante el cual ella recibe el desplazamiento $d\mathbf{r}$ (véase (64.3)). Cabe indicar, que en la fórmula (67.6) $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento de la partícula en aquel sistema de referencia donde se determina la cantidad de movimiento $\mathbf{p}$; el intervalo de tiempo $d\tau$ se determina con el reloj que se mueve junto con la partícula.

La masa m que entra en la fórmula (67.5) es invariante, por lo que es una magnitud que no depende de la velocidad del cuerpo.

De (67.5) se deduce que la dependencia entre la cantidad de movimiento y la velocidad es más complicada que la prevista en la mecánica newtoniana. Para $v \ll c$ la expresión (67.5) se convierte en la expresión clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Hay que señalar que la expresión (67.5) tolera la siguiente interpretación que se utiliza con creciente rareza. La cantidad de movimiento, como en la mecánica newtoniana, es igual al producto de la masa del cuerpo por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m_r\mathbf{v}. \qquad (67.7)$$

No obstante, la masa del cuerpo no es una magnitud constante invariante, sino que depende de la velocidad según la ley

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (67.8)$$

Con semejante interpretación la masa invariante m recibe el nombre de *masa en reposo* (con frecuencia se designa con el símbolo m_0). En dependencia de la velocidad la masa no invariante m_r denomínase *masa relativista* o bien *masa en movimiento*.

§ 68. Expresión relativista para la energía

La segunda ley de Newton estipula que la derivada de la cantidad de movimiento de una partícula (punto material) por el tiempo es igual a la fuerza resultante aplicada sobre la partícula (véase la fórmula (9.1)). Respecto de las transformaciones de Lorentz, la ecuación de la segunda ley es invariante, si por cantidad de movimiento se entiende la magnitud (67.5). Por lo tanto, la expresión relativista de la segunda ley de Newton, tiene la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}. \qquad (68.1)$$

Hay que tener en cuenta que la correlación $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, en el caso relativista no es aplicable, con la particularidad de que la aceleración $\mathbf{w}$ y la fuerza $\mathbf{F}$, hablando en general, son no colineares.

Cabe señalar, que ni la cantidad de movimiento ni la fuerza, son magnitudes invariantes. Las fórmulas de transformación de las componentes de la cantidad de movimiento al pasar de un sistema

a otro de referencia, serán obtenidas en el parágrafo siguiente. Las fórmulas de transformación de las componentes de la fuerza serán ofrecidas sin su deducción:

$$F_x = \frac{F'_x + (\beta/c)\,\mathbf{F}'\mathbf{v}'}{1+\beta\,(v'_x/c)}, \quad F_y = \frac{F'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\,(v'_x/c)}, \quad F_z = \frac{F'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\,(v'_x/c)} \tag{68.2}$$

($\beta = v_0/c$, $\mathbf{v}'$ es la velocidad de la partícula en el sistema K'). Si en el sistema K' la fuerza $\mathbf{F}'$ que actúa sobre la partícula es perpendicular a su velocidad $\mathbf{v}'$, el producto escalar $\mathbf{F}'\mathbf{v}'$ será cero y la primera de las fórmulas (68.2) se simplifica del siguiente modo:

$$F_x = \frac{F'_x}{1+\beta\,(v'_x/c)}. \tag{68.3}$$

Para hallar la expresión relativista de la energía, obremos del mismo modo que en el § 19. Multipliquemos la ecuación (68.1) por el desplazamiento de la partícula $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$. Como resultado tendremos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}.$$

El segundo miembro de esta igualdad nos proporciona el trabajo dA realizado sobre la partícula durante el tiempo dt. En el § 19 fue demostrado que el trabajo de la resultante de todas las fuerzas se dirige al incremento de la energía cinética de la partícula (véase la fórmula (19.11)). Por consiguiente, el primer miembro de la correlación debe ser interpretado como el incremento de la energía cinética T de la partícula durante el tiempo dt. Así, pues,

$$dT = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt = \mathbf{v}d\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Transformemos la expresión obtenida, tomando en consideración que $\mathbf{v}\ d\mathbf{v} = d\,(v^2/2)$ (véase (2.54)):

$$dT = \mathbf{v}\left\{\frac{m\,d\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{v}/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{md\,(v^2/2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2\,d\,(v^2/c^2)}{2\,(1-v^2/c^2)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

La integración de la correlación obtenida nos proporciona

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \text{const.} \tag{68.4}$$

Por su sentido, para $v = 0$ la energía cinética debería hacerse nula. De aquí, para la constante se obtiene un valor igual a $-mc^2$. O sea, que la expresión relativista de la energía cinética de una partícula tiene la forma

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \tag{68.5}$$

Cuando las velocidades son pequeñas ($v \ll c$) la fórmula (68.5) se puede transformar del modo siguiente:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-1\right)=\frac{mv^2}{2}.$$

Hemos llegado a la expresión newtoniana de la energía cinética de una partícula. Esto era de esperar, ya que a velocidades mucho menores que las de la luz, todas las fórmulas de la mecánica relativista deben convertirse en las correspondientes fórmulas de la mecánica newtoniana.

Examinemos una partícula libre (es decir, una partícula sobre la que no se ejerce la acción de las fuerzas externas), que se mueve a velocidad v. Hemos aclarado, que dicha partícula posee energía cinética determinada por la fórmula (68.5). No obstante, hay fundamentos (véase más adelante) para implicar a la partícula libre, además de energía cinética (68.5), una energía adicional, igual a

$$E_0 = mc^2. \tag{68.6}$$

De esta forma, la energía total de una partícula libre es determinada con la expresión $E = T + E_0 + mc^2$. Tomando en consideración (68.5), veremos que

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{68.7}$$

Con $v = 0$ la expresión (68.7) se convierte en (68.6). Por esta causa, $E_0 = mc^2$ recibe el nombre de *energía en reposo*, que representa la energía interna de la partícula, no relacionada con el movimiento de la partícula como todo único. Las fórmulas (68.6) y (68.7) son válidas no sólo para una partícula elemental, sino que también para un complicado cuerpo constituido por múltiples partículas. La energía E_0 de semejante cuerpo, además de la energía en reposo de las partículas que lo constituyen, contiene también la energía cinética de las partículas (condicionada por su movimiento respecto del centro de masas del cuerpo) y la energía de interacción entre sí. En la energía en reposo, así como en la total [1]) (68.7) no entra la energía potencial del cuerpo en el campo exterior de fuerzas.

Excluyendo en las ecuaciones (67.5) y (68.7) la velocidad v (la ecuación (67.5) se puede tomar en forma escalar), obtenemos la expresión de la energía total de la partícula por intermedio de la cantidad de movimiento p:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{68.8}$$

[1]) Hay que señalar, que el término «energía total» tiene en la mecánica relativista un sentido diferente al de la mecánica newtoniana. En esta última recibe el nombre de energía total la suma de la energía cinética y potencial de la partícula. En la mecánica relativista se entiende por energía total la suma de la energía cinética y la energía en reposo de la partícula.

Si $p \ll mc$, esta fórmula puede ser representada en la forma

$$E = mc^2 \sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \qquad (68.9)$$

La expresión obtenida se diferencia de la fórmula newtoniana para la energía cinética $T = p^2/2m$ por carecer del sumando mc^2.

Hemos de indicar que de la comparación de las fórmulas (67.5) y (68.7) se deduce la expresión

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v}. \qquad (68.10)$$

El hecho de que a una partícula libre se le debe atribuir energía (68.7) y no sólo energía cinética (68.5) hemos de aclararlo a continuacion. Por su sentido, la energía debe ser una magnitud que se conserva. La correspondiente consideración nos muestra que durante los choques de las partículas se conserva la suma (por partículas) de las expresiones tipo (68.7), mientras que la suma de las expresiones (68.5) resulta que no se conserva. Es imposible satisfacer el requisito de conservación de la energía en todos los sistemas inerciales de referencia, si no se tiene en cuenta, en la composición de la energía total, la energía en reposo (68.6).

Además, de la expresión (68.7) para la energía y de la expresión (67.5) para la cantidad de movimiento se consigue formar una invariante, o sea, una magnitud que no cambia con las transformaciones de Lorentz. En efecto, de la fórmula (68.8) se deduce que

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = \text{inv} \qquad (68.11)$$

(cabe recordar que la masa m y la velocidad c son magnitudes invariantes). Los experimentos con partículas rápidas confirman la invariancia de las magnitudes (68.11). Si por E en (68.11) se entiende la energía cinética (68.5), la expresión (68.11) resulta ser no invariante.

Obtengamos una expresión más para la energía relativista. De la fórmula (64.3) se desprende que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}, \qquad (68.12)$$

donde dt es el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos ocurridos con la partícula, contado con el reloj de aquel sistema de referencia, con relación al cual la partícula se mueve a velocidad v, $d\tau$, ese mismo intervalo de tiempo, contado con el reloj que se mueve junto con la partícula (el intervalo de tiempo propio). Poniendo (68.12) en la fórmula (68.7), obtenemos la expresión

$$E = mc^2\frac{dt}{d\tau}. \qquad (68.13)$$

Esta fórmula será utilizada en el parágrafo siguiente.

§ 69. Transformaciones de la cantidad de movimiento y de la energía

La energía total E y la cantidad de movimiento **p** no son invariantes. Efectivamente, las dos magnitudes dependen de v y, como sabemos, la velocidad tiene diversos valores en diferentes sistemas de referencia. Aclaremos cómo se transforman la energía y el impulso al pasar de un sistema de referencia a otro.

Consideremos el desplazamiento elemental de cierta partícula. Sea que en el sistema de referencia K dicho desplazamiento se realiza durante el intervalo de tiempo dt y las componentes del desplazamiento son iguales a dx, dy, dz. En el sistema K', ese mismo desplazamiento transcurre en el tiempo dt' y sus componentes son dx', dy', dz'. De acuerdo con las fórmulas (63.17), entre los intervalos de tiempo y las componentes del desplazamiento existen las correlaciones

$$dx=\frac{dx'+\beta c\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',\quad c\,dt=\frac{c\,dt'+\beta\,dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Multipliquemos estas fórmulas por la masa de la partícula m y dividamos por los correspondientes intervalos dt y dt' el tiempo propio de la partícula $d\tau$ (recordemos que la masa y el tiempo propio son magnitudes invariantes, es decir, tienen el mismo valor en los dos sistemas). Como resultado obtenemos

$$\begin{gathered} m\frac{dx}{d\tau}=\frac{m\,(dx'/d\tau)+\beta mc\,(dt'/d\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ m\frac{dy}{d\tau}=m\frac{dy'}{d\tau},\quad m\frac{dz}{d\tau}=m\frac{dz'}{d\tau},\\ mc\frac{dt}{d\tau}=\frac{mc\,(dt'/d\tau)+\beta m\,(dx'/d\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{gathered} \tag{69.1}$$

De acuerdo con (67.6) $m\,(dx/d\tau)=p_x$, $m\,(dx'/d\tau)=p'_x$, $m\,(dy/d\tau)=p_y$, etc. En correspondencia con (68.13) $mc\,(dt/d\tau)=E/c$, $mc\,(dt'/d\tau)=E'/c$. Tomando en consideración todo esto, las fórmulas (69.1) pueden ser ofrecidas en la forma

$$p_x=\frac{p'_x+\beta\,(E'/c)}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad p_y=p'_y,\quad p_z=p'_z,\quad (E/c)=\frac{(E'/c)+\beta p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{69.2}$$

Hemos obtenido las fórmulas en las que se transforman la cantidad de movimiento y la energía de la partícula al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Estas fórmulas coinciden con las fórmulas (63.17), por las que se transforman las coordenadas y el tiempo. Para que la comparación sea más fácil de realizar, escribamos las fórmulas

(63.17) y (69.2) una junto a otra:

$$x=\frac{x'+\beta(ct')}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad p_x=\frac{p'_x+\beta(E'/c)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y=y',\ z=z',\qquad p_y=p'_y,\ p_z=p'_z,\qquad (69.3)$$
$$(ct)=\frac{(ct')+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad (E/c)=\frac{(E'/c)+\beta p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

De la comparación se deduce que las componentes de la cantidad de movimiento se comportan durante las transformacines como las coordenadas, y la energía, como el tiempo.

La analogía que revelan las fórmulas (69.3) nos permite representar el aparato matemático de la mecánica relativista en forma de correlaciones entre los vectores en un espacio imaginario cuatridimensional (de cuatro vectores). En el § 62 ya señalamos que a semejante espacio es preciso atribuir propiedades excepcionales, diferentes de las del habitual espacio euclidiano. En el espacio tridimensional de Euclides la magnitud

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

es invariante, o sea, no varía con el giro de los ejes de coordenadas. En contraposición a esto, la magnitud

$$c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \qquad (69.4)$$

resulta ser no invariante, no se conserva al pasar de un sistema inercial de referencia a otro (semejante transición puede ser representada con el giro de los ejes en el espacio cuatridimensional). Por consiguiente, la magnitud (69.4) no posee las propiedades del cuadrado de la distancia entre dos puntos universales. Como aclaramos en el § 65, el invariante de la expresión es

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \qquad (69.5)$$

que debe ser considerado como el cuadrado de la distancia entre dos puntos en el espacio cuatridimensional que nos interesa [1]).

Dotando el espacio cuatridimensional de tales propiedades, podemos considerar las magnitudes ct, x, y, z como las componentes de un cuatrivector desde el origen de coordenadas al punto universal dado. En correspondencia, es posible examinar $c\Delta t$, Δx, Δy, Δz como las componentes del cuatrivector, es decir, como los desplazamientos de un punto universal a otro. En el espacio tridimensional euclidiano, además del radio vector y el vector de desplazamiento, también se consideran otros vectores (velocidad, aceleración, etc.), con la

[1]) Claro está, que también podemos considerar el espacio euclidiano cuatridimensional. Sin embargo, para las necesidades de la mecánica relativista es inservible.

particularidad de que para cualquier vector a la magnitud

$$\mathbf{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

es invariante. Las componentes de todo vector se transforman durante los giros de los ejes de coordenadas con ayuda de las mismas fórmulas de las coordenadas.

Los vectores cuatridimensionales pueden ser determinados por analogía con los vectores tridimensionales en el espacio euclidiano. Por vectores cuatridimensionales entendemos el conjunto de cuatro magnitudes a_t, a_x, a_y, a_z que se transforman con las mismas fórmulas que ct, x, y, z (véase la columna izquierda de las fórmulas (69.3)). El «cuadrado» de semejante vector se determina como

$$a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2. \qquad (69.6)$$

A causa de que las componentes se transforman lo mismo que las coordenadas, la expresión (69.6) resulta ser invariante con relación a las transformaciones de Lorentz.

De las fórmulas (69.3) se desprende que el conjunto de magnitudes

$$E/c,\ p_x,\ p_y,\ p_z \qquad (69.7)$$

forma un cuatrivector. Se denomina *vector de energía — cantidad de movimiento*. La expresión del tipo (69.6) formada por las componentes (69.7), como ya establecimos (véase (68.11)) es invariante:

$$(E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2.$$

§ 70. Interacción entre masa y energía

Haciendo uso de la masa relativista (véase (67.8)), podemos escribir la fórmula (68.7) de la forma

$$E = m_r c^2. \qquad (70.1)$$

De esta correlación se desprende que la energía del cuerpo y su masa relativista son siempre proporcionales entre sí. Toda [1]) variación ΔE de la energía del cuerpo se acompaña del cambio de la masa relativista del cuerpo $\Delta m_r = \Delta E/c^2$ y viceversa, toda variación de la masa relativista Δm_r es acompañada del cambio de la energía del cuerpo

$$\Delta E = c^2 \Delta m_r. \qquad (70.2)$$

Esta afirmación recibe el nombre de *ley de interacción entre la masa relativista y la energía* [2]).

La proporcionalidad entre la masa relativista y la energía conduce a que la afirmación acerca de la conservación de masa relativista sumaria de una partícula es, ni más ni menos, que la afirmación sobre

[1]) Salvo la variación de la energía potencial en el campo exterior de fuerzas.
[2]) A veces se habla de la equivalencia de la masa y la energía, teniendo en cuenta su interacción y proporcionalidad.

la conservación de la energía total sumaria, expresada con otras palabras. Por esta causa, no se suele hablar del principio de conservación de la masa relativista como de una ley aislada.

En contraposición a la masa relativista, la masa en reposo sumaria de un sistema de partículas en interacción no se conserva. Por ejemplo, durante un choque inelástico de dos partículas, que observamos en el sistema de sus centros de masas, la masa en reposo de la partícula que se formó, es igual a

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + (T_1 + T_2)/c^2,$$

donde m_1 y T_1 son la masa en reposo y la energía cinética de la primera partícula inicial, m_2 y T_2, la masa en reposo y la energía cinética de la segunda partícula. Por lo tanto,

$$m_\Sigma > m_1 + m_2.$$

En el caso que hemos considerado, la energía cinética de las partículas iniciales se convirtió en la energía interna de la partícula formada, por lo que la masa en reposo de esta partícula supera la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales.

El funcionamiento de las centrales atomoeléctricas se basa en la reacción en cadena de fisión de los núcleos de uranio $^{235}_{92}U$ (o bien plutonio) al capturar neutrones lentos n [1]. La fisión se realiza por diferentes procedimientos. Uno de ellos es así:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} + {}^{94}_{37}\mathrm{Rb} + 2n. \qquad (70.3)$$

Al captar un neutrón, el núcleo de uranio se descompone formando un núcleo de cesio con número másico 140 y un núcleo de rubidio con número másico 94. Además, se liberan dos neutrones. La masa sumaria en reposo de uranio-235 y del neutrón supera en $4\cdot10^{-28}$ kg dicha masa para las partículas en el segundo miembro de la fórmula (70.3). La energía interna que corresponde a ese exceso de masa es igual a

$$E = c^2\Delta m = (3\cdot10^8)^2\cdot4\cdot10^{-28} \approx 4\cdot10^{-11}\ \mathrm{J},$$

se convierte en la energía cinética de las partículas formadas (fragmentos de la fisión) y en la energía de la radiación electromagnética que surge durante la fisión.

§ 71. Partículas con masa en reposo nula

Haciendo en la fórmula (68.8) m igual a cero, obtenemos la correlación

$$E = cp. \qquad (71.1)$$

Esta correlación se concuerda con (68.10) sólo en el caso cuando $v = c$. De aquí se desprende que una partícula con masa en reposo igual a cero

[1]) El símbolo $^{235}_{92}U$ designa el isótopo de uranio con número másico 235. El núcleo del átomo de este isótopo consta de 92 protones y $235 - 92 = 143$ neutrones. Con el símbolo n se designa el neutrón.

siempre se mueve a la velocidad de la luz. Entre semejantes partículas podemos nombrar el *fotón*, así como las partículas elementales llamadas *neutrino* [1]).

La energía del fotón se determina por la fórmula

$$E = \hbar\omega, \qquad (71.2)$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck, ω, la frecuencia circular (véase (53.10)).

De acuerdo con las fórmulas (71.1) y (71.2), el fotón tiene una cantidad de movimiento

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}. \qquad (71.3)$$

La luz es un flujo de fotones. Al absorberse la luz o al reflejarse ésta en la superficie de cierto cuerpo, a éste se comunica una cantidad de movimiento, lo que se manifiesta en forma de la presión que ejerce sobre el cuerpo. El físico ruso P. N. Lébedev consigió en 1900 descubrir y medir la presión de la radiación luminosa. Los resultados de las mediciones concordaban en absoluto con la fórmula (71.3).

En correspondencia con la teoría general de la relatividad, creada por A. Einstein, todo cuerpo que posee una energía E, tiene también masa gravitacional

$$m_g = \frac{E}{c^2},$$

es decir, debe gravitar hacia otros cuerpos. De acuerdo con esto, el fotón se debe comportar en un campo gravitatorio como una partícula con masa gravitacional

$$m_g = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \qquad (71.4)$$

En particular, durante un movimiento del fotón cerca de la superficie terrestre, hacia arriba por la vertical, éste debe consumir parte de su energía para realizar un trabajo contra las fuerzas de la gravedad igual a

$$A = m_g gl = \hbar\omega gl/c^2,$$

donde l es el recorrido pasado. Por esta causa, la energía inicial del fotón, igual a $\hbar\omega$, debe disminuir en

$$\Delta E = \Delta(\hbar\omega) = \hbar\omega gl/c^2,$$

de donde

$$\Delta\omega = \omega gl/c^2.$$

---

[1]) En 1980 un grupo de investigadores del Instituto de Física teórica y experimental, encabezado por V.A. Liubímov, publicó datos experimentales, de acuerdo con los que la masa del neutrino es diferente de cero y constituye, aproximadamente, $6\cdot10^{-35}$ kg (1/15000 de la masa del electrón). Las investigaciones de las propiedades del neutrino continúan.

17—01050

Por esta razón, obtenemos el siguiente valor de la disminución relativa de la frecuencia del fotón

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{gl}{c^2}. \qquad (71.5)$$

La variación de la frecuencia del fotón al propagarse por una vertical fue medida en 1960 por los científicos estadounidenses Pound y Rebck. El resultado obtenido por ellos coincidía con una precisión del 15% con el calculado por la fórmula (71.5). Cabe indicar que en las condiciones del experimento de los indicados científicos, la variación relativa de la frecuencia constituyó una magnitud insignificante igual a $2\cdot10^{-15}$.

El efecto de la variación de la frecuencia de la luz al alejarse de una gran masa gravitante recibe el nombre de *corrimiento gravitacional al rojo*. El sentido de esta denominación será aclarado en el tercer tomo del presente curso.

CAPITULO IX

HIDRODINÁMICA

§ 72. Líneas y tubos de corriente. Continuidad del flujo

Además de la mecánica del punto material y de la mecánica del sólido, que estudiamos en los capítulos anteriores, existe también la mecánica de los medios continuos. Esta ciencia abarca la hidrodinámica, dinámica de los gases, la teoría de elasticidad [1]) y una serie de otras asignaturas que estudian la sustancia como un medio continuo. La hidrodinámica es la parte de la mecánica de los medios continuos en la que se estudia el movimiento de fluidos incomprensibles y la interacción de éstos con los sólidos.

Para describir el movimiento de un líquido es posible prefijar la posición de cada partícula de éste como función del tiempo. Semejante procedimiento de descripción fue confeccionado por Lagrange. Pero podemos fijar nuestra atención no en las partículas del líquido, sino en puntos aislados del espacio y registrar la velocidad a la que pasan las partículas aisladas del líquido por cada uno de los puntos prefijados. El segundo procedimiento recibe el nombre de método de Euler.

El estado del movimiento del líquido puede ser determinado indicando para cada punto del espacio el vector de velocidad como función del tiempo. El conjunto de los vectores **v**, prefijados para todos los puntos del espacio, forma el llamado *campo del vector de velocidad*, que puede ser representado del modo siguiente. En el líquido en movimiento tracemos líneas de forma que la tangente a ellos en cada punto coincida en sentido con el vector **v** (fig. 72.1). Dichas líneas reciben el nombre de *líneas de corriente*. Acordaremos trazar las líneas de corriente de tal manera que su intensidad (que caracteriza la razón entre el número de líneas ΔN y la magnitud del área ΔS por la que ellas pasan, perpendicular a las líneas) sea proporcional al valor de la velocidad en el lugar dado. Entonces, por el cuadro de las líneas de corriente podremos juzgar no sólo acerca del sentido, sino que también sobre la magnitud del vector **v** en diferentes puntos del espacio: allí donde la velocidad es mayor, la intensidad de las líneas será más grande y viceversa, donde la velocidad es menor, habrá menos líneas de corriente.

Como la magnitud y el sentido del vector **v** pueden variar respecto al tiempo en cada punto, el cuadro de las líneas de corriente puede cambiar de modo constante. Si el vector de velocidad queda constante en cada punto del espacio, la corriente recibe el nombre de *corren-*

---

[1]) Ciertos problemas de la teoría de elasticidad fueron estudiados en los §§ 14 y 25.

tilínea o *estacionaria*. Con este tipo de corriente, toda partícula del líquido pasa el punto dado del espacio con un mismo valor de **v**. Durante el movimiento estacionario, el cuadro de las líneas de corriente es invariable y, en este caso, las líneas coinciden con las trayectorias de las partículas.

La parte del líquido limitada por las líneas de corriente, denomínase *tubo de corriente*. Como el vector **v** es en cada punto tangente a las líneas de corriente, lo será también a las superficies del tubo de corriente, por lo que las partículas del líquido no cruzan durante su movimiento las paredes del tubo de corriente.

Tomemos la sección S del tubo de corriente (fig. 72.2) perpendicular a la dirección de la velocidad. Supongamos que la velocidad de movimiento de las partículas del líquido es igual por todos los puntos de la sección. Durante el tiempo Δt, por la sección S pasarán todas las

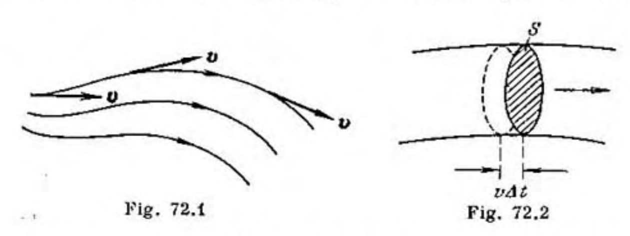


Fig. 72.1

Fig. 72.2

partículas que en el momento inicial se encontraban a una distancia de S que no superaba el valor $v\Delta t$. Por lo tanto, en el transcurso del tiempo Δt por la sección S pasará un volumen del líquido igual a $Sv\,\Delta t$, mientras que por la unidad de tiempo por dicha sección S fluirá un volumen del líquido igual a Sv. Tomemos un tubo de corriente tan estrecho que en cada una de sus secciones la velocidad puede considerarse constante. Si el líquido es incompresible (es decir, su densidad es igual en todo lugar y no puede variar), la cantidad del líquido entre las secciones S_1 y S_2 (fig. 72.3) será invariable. De aquí se desprende que los volúmenes del líquido que pasan en la unidad de tiempo por las secciones S_1 y S_2, deben ser iguales:

$$S_1v_1 = S_2v_2$$

(recordemos que por la superficie lateral del tubo de corriente no pasan las partículas del líquido).

El razonamiento aducido más arriba es aplicable a cualquier par de secciones S_1 y S_2. Por consiguiente, *para un líquido incompresible la magnitud Sv en toda la sección de un mismo tubo de corriente debe ser igual*:

$$Sv = \text{const.} \tag{72.1}$$

El resultado obtenido es el contenido del teorema de *continuidad del flujo*.

De (72.1) sigue que cuando las secciones del tubo de corriente son variables, las partículas de un líquido incompresible se mueven con aceleración. En un tubo de corriente horizontal (fig. 72.4) semejante aceleración sólo puede ser condicionada por la inconstancia de la

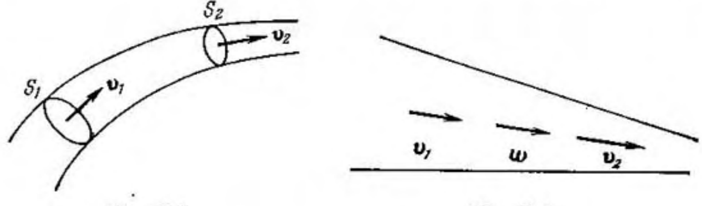


Fig. 72.3 Fig. 72.4

presión a lo largo del eje del tubo, es decir, allí donde la velocidad es menor, la presión deberá ser mayor y viceversa. La ligazón cuantitativa entre la velocidad de la corriente y la presión, será establecida en el parágrafo siguiente.

El teorema de continuidad de flujo es aplicable a los líquidos reales e incluso a los gases, cuando puede ser despreciada su compresibilidad. Los correspondientes cálculos muestran que durante el movimiento de los líquidos y gases a velocidades menores que la del sonido, con suficiente grado de precisión, pueden considerarse incompresibles.

§ 73. Ecuación de Bernoulli

Al estudiar el movimiento de los líquidos, podemos considerar, en muchos casos, que el desplazamiento de unas partes del líquido respecto de otras, está relacionado con el surgimiento de las fuerzas de rozamiento. Denomínase *ideal* o *perfecto* aquel líquido exento en absoluto del rozamiento interior (viscosidad).

Destaquemos en un líquido perfecto, que está en movimiento estacionario, un tubo de corriente de pequeña sección (fig. 73.1). Consideremos el volumen de líquido limitado por las paredes del tubo de corriente y por las secciones S_1 y S_2, perpendiculares a las líneas de corriente. En el transcurso del tiempo Δt este volumen se desplaza a lo largo del tubo de corriente, con la particularidad de que la sección S_1 se desplazará a la posición S_1' haciendo el recorrido Δl_1; la sección S_2, a la posición S_2' pasando un recorrido Δl_2. A consecuencia de la continuidad del flujo, los volúmenes sombreados tendrán el mismo valor: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

La energía de cada partícula del líquido se compone de su energía cinética y potencial en el campo de fuerzas de la gravedad terrestre. Como resultado del carácter estacionario de la corriente, la partícula que después de pasar el tiempo Δt se encontraba en cualquiera de los puntos de la parte no sombreada del volumen que estudiamos (por ejemplo, véase el punto O en la fig. 73.1) alcanza la misma velocidad (y, por consiguiente, tiene la misma energía cinética) que tenía la partícula, que se hallaba en ese mismo punto en el momento inicial de tiempo. Por esta razón, el incremento de la energía ΔE del volumen total que consideramos, puede ser calculado como la diferencia de las energías de los volúmenes sombreados ΔV_2 y ΔV_1.

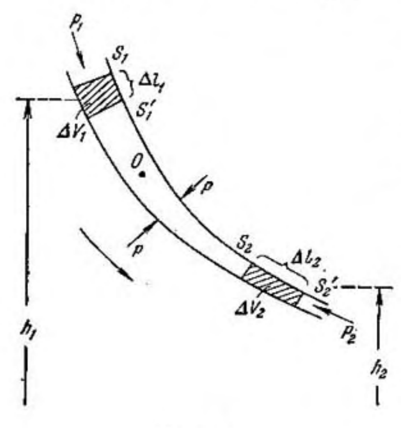


Fig. 73.1

Tomemos la sección del tubo de corriente y los segmentos Δl tan pequeños que pueda ser adjudicado a todos los puntos de cada uno de los volúmenes sombreados el mismo valor de la velocidad v, la presión p y la altura h. En tal caso, el incremento de la energía se escribirá del siguiente modo:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho\Delta V v_2^2}{2} + \rho\Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho\Delta V v_1^2}{2} + \rho\Delta V g h_1\right) \qquad (73.1)$$

(ρ es la densidad del líquido).

Los líquidos perfectos están exentos de las fuerzas de rozamiento. Por esta causa, el incremento de la energía (73.1) debe ser igual al trabajo que las fuerzas de presión realizan sobre el volumen destacado. Las fuerzas de presión sobre la superficie lateral, son perpendiculares en cada punto a la dirección de desplazamiento de las partículas a las que están aplicadas, por lo que no realizan trabajo alguno. Sólo es diferente de cero el trabajo de las fuerzas aplicadas a secciones S_1 y S_2. Este trabajo es igual a

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\,\Delta V. \qquad (73.2)$$

Igualando las expresiones (73.1) y (73.2), reduciendo por ΔV y pasando los términos con iguales índices a un mismo miembro de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (73.3)$$

Las secciones S_1 y S_2 fueron tomadas por completo al azar. Por esta causa, podemos afirmar que en cualquier sección del tubo de corriente la expresión $\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh+p$ tiene igual valor. En correspondencia con las suposiciones que hicimos al deducirla, la ecuación (73.3) será precisa en absoluto sólo cuando la sección transversal S tiende a cero, es decir, al estirar el tubo de corriente para que ésta forme una línea. Así, pues, las magnitudes p, v y h, que figuran en los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (73.3) deben ser consideradas como que se refieren a dos puntos arbitrarios de una misma línea de corriente.

El resultado obtenido puede ser enunciado del modo siguiente: *en un líquido perfecto en movimiento estacionario a lo largo de cualquier línea de corriente, se cumple la condición*

$$\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh+p=\text{const.} \quad (73.4)$$

La ecuación (73.4) o bien (73.3), equivalente a la primera, recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli*. A pesar de que dicha ecuación fue obtenida por un líquido perfecto, se cumple también con suficiente precisión para los líquidos reales, en los que el rozamiento interior no es muy grande.

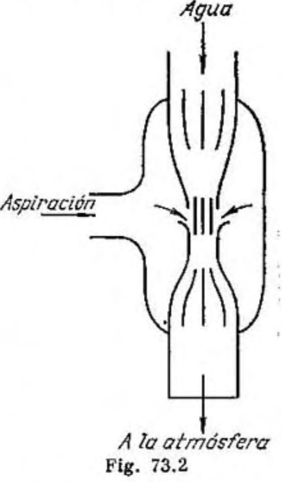


Fig. 73.2

Para una línea horizontal de corriente la condición (73.3) toma el aspecto

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2,$$

es decir, en aquellos puntos donde la velocidad es mayor, la presión resulta ser menor (de modo cualitativo esto ya fue mostrado en el anterior parágrafo).

La disminución de la presión en los puntos donde la velocidad del flujo es mayor, sirve de base en la estructura de la bomba de chorro de agua (fig. 73.2). El chorro de agua se alimenta a un tubo comunicado con la atmósfera, de forma que en la salida de dicho tubo la presión es igual a la atmosférica. En el tubo hay un estrechamiento por el que el agua pasa a gran velocidad, por lo que la presión en dicho lugar es menor que la atmosférica. Esta misma presión se establece también en la cámara de la bomba, que cubre el tubo. Dicha cámara se comunica con el tubo por el intervalo que hay en la parte estrecha del tubo.

Uniendo la cámara de la bomba con un volumen que se bombea, de él se puede evacuar el aire (o cualquier otro gas) hasta una presión de un orden de 100 mm Hg. El aire que se bombea se captura por el chorro de agua y se expulsa a la atmósfera.

§ 74. Salida de un líquido por un orificio

Apliquemos la ecuación de Bernoulli a la salida de un líquido por un pequeño orificio de un ancho recipiente abierto. Tomemos en el líquido un tubo de corriente, cuya sección tiene por un lado la superficie abierta del líquido en el recipiente y, por otro lado, el orificio por el que el líquido sale [1]) (fig. 74.1). En cada una de estas secciones la velocidad y la altura sobre cierto nivel inicial pueden considerarse iguales, por lo que respecto a ellas puede ser aplicada la ecuación (73.3), que fue obtenida partiendo de dicha suposición. Además, las presiones son iguales a la atmosférica en las dos secciones, es decir, son las mismas. Más aún, la velocidad de desplazamiento de la superficie abierta en el recipiente ancho puede ser tomada igual a cero. Teniendo en cuenta todo lo dicho, la ecuación (73.3), en lo que atañe al caso que examinamos, podemos escribirla en la forma

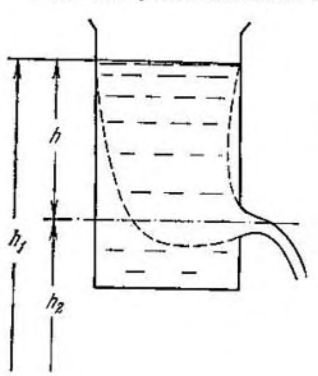


Fig. 74.1

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2,$$

donde v es la velocidad de salida del orificio. Reduciendo ρ e introduciendo $h = h_1 - h_2$, es decir, la altura de la superficie abierta del líquido sobre el orificio, obtenemos: $v^2/2 = gh$, de donde

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{74.1}$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Torricelli.*

Así, pues, la velocidad de salida de un líquido por un orificio, situado a la profundidad h bajo una superficie abierta, coincide con la velocidad que adquiriría cualquier cuerpo al caer de una altura h. Hay que recordar que este resultado se ha obtenido partiendo de la suposición de que el líquido es perfecto. Para los líquidos reales, la

---

[1]) Con mayor precisión, la sección del chorro en la salida del orificio. Si no se toman medidas especiales, la sección del chorro será menor que la del orificio.

velocidad de salida será menor, con la particularidad de que mientras más difiera ésta del valor (74.1), mayor será la viscosidad del líquido.

El chorro del líquido, que sale por el orificio en el recipiente (fig. 74.2), lleva consigo durante el tiempo Δt la cantidad de movimiento $\Delta\mathbf{K} = \rho S v \mathbf{v} \Delta t$ (ρ es la densidad del líquido, S, el área del orificio, $\mathbf{v}$, la velocidad de salida del chorro). Esta cantidad de movimiento es transmitida por el recipiente al líquido que sale. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el recipiente recibe del líquido que sale, durante un intervalo de tiempo Δt, una cantidad de movimiento igual a $-\Delta\mathbf{K}$, es decir, sufre la acción de la fuerza

$$\mathbf{F}_r = -\frac{\Delta\mathbf{K}}{\Delta t} = -\rho S v \mathbf{v}, \qquad (74.2)$$

que recibe el nombre de *reacción del chorro que sale*. Si el recipiente se ubica en un carrito, bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}_r$, éste se pondrá en movimiento en la dirección opuesta a la del chorro.

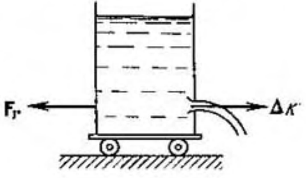


Fig. 74.2

Para hallar el valor de la fuerza $\mathbf{F}_r$, hagamos uso de la fórmula (74.1), que sirve para determinar la velocidad de salida del líquido por un orificio:

$$F_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \qquad (74.3)$$

Si la fuerza $\mathbf{F}_r$, como podría parecer a primera vista, coincidiera en magnitud con la fuerza de la presión hidroestática que ejercería el líquido sobre el tapón que cerraba el orificio, F_r sería igual a $gh\rho S$. En realidad, la fuerza $\mathbf{F}_r$ resulta ser dos veces mayor. Esto puede ser explicado por el hecho de que la presión del líquido en el recipiente, que surge al salir el chorro, conduce a la redistribución de la presión, con la particularidad de que junto a la pared que se encuentra frente al orificio, la presión resulta en cierto grado mayor que junto a la pared en la que está el orificio.

El funcionamiento de los motores reactivos y los cohetes se basan en la reacción del chorro de gas que se expulsa. El movimiento reactivo, no necesita la atmósfera para su realización, se usa para los vuelos en el espacio cósmico.

El fundador de la teoría de las comunicaciones interplanetarias, es el eminente científico e inventor ruso K. E. Tsiolkovski (1857—1935). El científico creó la teoría del vuelo del cohete y fundamentó la posibilidad de aplicación de los aparatos de propulsión a chorro para la comunicación interplanetaria. En particular, Tsiolkovski elaboró la teoría de movimiento de los cohetes compuestos, en las que cada siguiente etapa comienza a funcionar después de que la anterior, al consumir por completo el combustible, se separa (eyecta)

del cohete. Las ideas de Tsiolkovski obtuvieron su posterior desarrollo y fueron realizadas por los científicos e ingenieros soviéticos que aseguraron a la Unión Soviética un papel directriz en la asimilación y estudio del espacio cósmico.

§ 75. Fuerzas de rozamiento interno

El líquido perfecto, es decir, aquel que carece de rozamiento, es una abstracción. De todos los líquidos y gases reales, en mayor o menor grado, es propia la viscosidad o rozamiento interno. La viscosidad se manifiesta en que en el movimiento que surge en un líquido o gas, después de desaparecer las causas que lo motivaron, cesa gradualmente.

Para aclarar las regularidades a las que se supeditan las fuerzas de rozamiento interno, examinemos el siguiente experimento. En

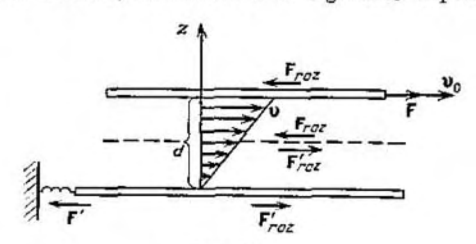


Fig. 75.1

un líquido están sumergidas dos placas paralelas entre sí (fig. 75.1), cuyas dimensiones lineales superan en mucho la distancia d entre ellas. La placa inferior está fijada en su lugar, mientras que la superior se pone en movimiento respecto de la inferior a cierta velocidad v_0. El experimento muestra que para desplazar la placa superior a velocidad constante v_0 hay que aplicar sobre ella una determinada fuerza **F** de magnitud constante. Como la placa no recibe aceleración, quiere decir que dicha fuerza se equilibra por una fuerza de igual magnitud y de dirección opuesta que, según parece, es la fuerza de rozamiento que actúa sobre la placa durante el movimiento de ésta en el líquido. Designémosla por $\mathbf{F}_{roz}$.

Variando la velocidad de las placas v_0, el área de éstas S y la distancia d entre ellas, podemos obtener

$$F_{roz} = \eta \frac{v_0}{d} S, \qquad (75.1)$$

donde η es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la naturaleza y el estado (por ejemplo, de la temperatura) del líquido

y que se denomina *coeficiente de rozamiento interno* o *coeficiente de viscosidad* o simplemente viscosidad del líquido (o gas).

Al moverse la placa superior, la inferior también sufre la acción de la fuerza $\mathbf{F}'_{roz}$, igual en magnitud a $\mathbf{F}_{roz}$. Para que la placa inferior quede inmóvil, la fuerza $\mathbf{F}'_{roz}$ debe ser equilibrada con ayuda de la fuerza $\mathbf{F}'$.

De este modo, al moverse una respecto a otra, dos placas sumergidas en un líquido, entre ellas surge cierta interacción caracterizada por la fuerza (75.1). La acción que las placas ejercen una sobre otra se realiza, por lo visto, a través del líquido que se encuentra entre las placas, transmitiéndose de una capa de éste a otra. Si en cualquier lugar del espacio entre las placas se traza un plano imaginario paralelo a las placas (véase la línea de trazos en la fig. 75.1), podemos afirmar que la parte del líquido que se encuentra sobre este plano actúa con una fuerza $\mathbf{F}'_{roz}$ sobre la parte del líquido que se halla debajo del plano, mientras que aquella parte del líquido que se halla debajo del plano, a su vez actúa en la parte del líquido sobre el plano con una fuerza $\mathbf{F}_{roz}$, con la particularidad de que los valores de $\mathbf{F}_{roz}$ y $\mathbf{F}'_{roz}$ se determinan con la fórmula (75.1). Así, pues, la fórmula (75.1) determina no sólo la fuerza de rozamiento ejercida sobre las placas, sino que también la fuerza de rozamiento entre las capas en contacto del líquido.

Si estudiamos la velocidad de las partículas de un líquido en diversas capas, resultará que en la dirección z, perpendicular a las placas (fig. 75.1), ella varía según la ley lineal

$$v(z)=\frac{v_0}{d}z. \qquad (75.2)$$

Las partículas del líquido que hacen contacto directo con las placas parece como si se adherieran a ellas y tuvieran la misma velocidad que las propias placas. De acuerdo con la fórmula (75.2)

$$\left|\frac{dv}{dz}\right|=\frac{v_0}{d}. \qquad (75.3)$$

Hemos puesto el signo de módulo por la siguiente causa. Si hubiéramos fijado la placa superior y desplazáramos la inferior (véase la fig. 75.1) o variáramos la dirección del eje z por la opuesta, la derivada dv/dz sería negativa. Pero la magnitud v_0/d siempre es positiva. Por esta causa, para que la fórmula (75.3) siempre sea válida, hay que tomar el módulo de dv/dz.

Haciendo uso de la igualdad (75.3), podemos dar a la fórmula (75.1) el siguiente aspecto

$$F_{roz}=\eta\left|\frac{dv}{dz}\right|S. \qquad (75.4)$$

Esta fórmula determina el módulo de la fuerza de rozamiento. La magnitud $|dv/dz|$ muestra la rapidez de variación de la velocidad

en la dirección del eje z y es el módulo del gradiente del módulo de velocidad (si v sólo depende de z, $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$, $\partial v/\partial z = \partial v/\partial z$).

La fórmula (75.4) ha sido obtenida para el caso cuando la velocidad varía según una ley lineal. Resulta que esta fórmula sigue también siendo justa para cualquier otra ley de variación de la velocidad de una a otra capa. En tal caso, para determinar la fuerza de rozamiento entre dos capas vecinas, hay que tomar el valor de $|dv/dz|$ en aquel lugar por donde pasa la superficie imaginaria de división (separación) de las capas.

Todo lo dicho en este parágrafo se refiere no sólo a los líquidos, sino que también a los gases.

La unidad de viscosidad en el SI, es una viscosidad tal, con la que el gradiente de velocidad con módulo igual a 1 m/s por 1 m provoca la creación de una fuerza de rozamiento interno de 1 N por 1 m² de superficie de contacto de las capas. Esta unidad recibe el nombre de *pascal-segundo* (se designa Pa·s)[1]).

En el sistema CGS la unidad de viscosidad es el poise (P), igual a la viscosidad con la que el gradiente de velocidad con módulo equivalente a 1 cm/s por 1 cm provoca el surgimiento de una fuerza de rozamiento interno de 1 dina por 1 cm² en superficie de contacto de las capas. La unidad igual a 10^{-6} P denomínase micropoise (μP). Entre el poise y el pascal-segundo existe la correlación

$$1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ P}.$$

El coeficiente de viscosidad depende de la temperatura, siendo el carácter de esta dependencia diferente de modo substancial para los líquidos y los gases. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de los líquidos disminuye fuertemente y a la inversa, en los gases dicho coeficiente crece con la temperatura. La diferencia en el carácter de la conducta de η al variar la temperatura, indica la diversidad del mecanismo del rozamiento interno de los líquidos y los gases.

§ 76. Corrientes laminar y turbulenta

Existen dos tipos de corriente de los líquidos (gases). En unos casos parece como si el líquido se dividiera en capas que resbalan unas respecto de otras sin mezclarse. Semejante corriente recibe el nombre de *laminar*[2]). Si introducimos en la corriente laminar un chorrito colorado éste se conserva, sin difuminarse, por toda la longitud del flujo, ya que las partículas del líquido en la corriente laminar no pasan de una a otra capa. La corriente laminar es estacionaria.

Al aumentar la velocidad o las dimensiones transversales del flujo, el carácter de la corriente varía de forma substancial. Comienza

[1]) Denomínase pascal la unidad de presión en SI (1 Pa = 1 N/m²).

[2]) Del latín «*lamina*».

una enérgica mezcla del líquido. Semejante corriente se llama *turbulenta*, con la que la velocidad de las partículas en cada lugar dado varía continuamente al azar, es decir, la corriente no es estacionaria. Si en la corriente turbulenta introducimos un chorrito colorado, ya a una pequeña distancia del lugar donde fue introducido, el líquido colorado se distribuye uniformemente por toda la sección de la corriente.

El científico inglés Reynolds estableció que el carácter de la corriente depende del valor de una magnitud adimensional

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \tag{76.1}$$

donde ρ es la densidad del líquido (o del gas), v, la velocidad media del flujo (por la sección del tubo), η, el coeficiente de viscosidad del líquido, l, una dimensión característica para la sección transversal, por ejemplo, el lado de un cuadrado cuando la sección es cuadrada, el radio o el diámetro cuando la sección es redonda, etc.

La magnitud (76.1) recibe el nombre de *número de Reynolds*. Con pequeños valores del número de Reynolds se observa la corriente laminar. A partir de cierto determinado valor de Re, llamado crítico, la corriente adquiere carácter turbulento. Si tomamos como dimensión característica de un tubo redondo su radio r, el valor crítico del número de Reynolds (que en tal caso tiene la forma $\mathrm{Re} = \rho v r/\eta$ resulta ser aproximadamente igual a[1]) 1000. En el número de Reynolds entran en forma de una razón dos magnitudes que dependen de las propiedades del líquido: la densidad ρ y el coeficiente de viscosidad η. La razón

$$\nu = \eta/\rho \tag{76.2}$$

recibe el nombre de *viscosidad cinemática*. A diferencia de ν, la magnitud η denomínase *viscosidad dinámica*. Empleando la viscosidad cinemática el número de Reynolds puede tomar el siguiente aspecto:

$$\mathrm{Re} = vl/\nu. \tag{76.3}$$

El número de Reynolds puede servir de criterio de semejanza de la corriente de los líquidos en tubos, canales, etc. El carácter de la corriente de diversos líquidos (o gases) en tubos de diferentes secciones será igual en absoluto, si a cada corriente le corresponde un mismo valor de Re.

§ 77. Corriente de un líquido por un tubo redondo

Cuando un líquido se mueve por un tubo redondo, junto a las paredes de éste la velocidad será igual a cero y adquirirá su máximo valor en el eje del tubo. Suponiendo que la corriente es laminar, ha-

[1]) Es evidente que tomamos como l no el radio, sino el diámetro del tubo, debemos aumentar dos veces el valor crítico de Re.

llemos la ley de variación de la velocidad con relación a la distancia r del eje del tubo.

Destaquemos un volumen cilíndrico imaginario del líquido de radio r y longitud l (fig. 77.1). Durante la corriente estacionaria, en un tubo de sección constante las velocidades de todas las partículas del líquido quedan invariables. Por lo tanto, la suma de las fuerzas externas, aplicadas a cualquier volumen del líquido, es nula. Sobre las bases del volumen cilíndrico que examinamos, actúan fuerzas de presión, cuya suma es igual a $(p_1 - p_2)\,\pi r^2$. Esta fuerza actúa en la dirección del movimiento del líquido. Además, sobre la

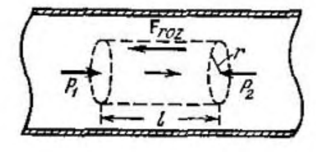


Fig. 77.1

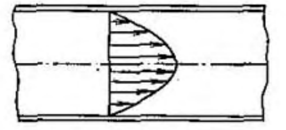


Fig. 77.2

superficie lateral del cilindro actúa la fuerza de rozamiento igual a $\eta\,|\,dv/dr\,|\,2\pi rl$ (se trata del valor de dv/dr a una distancia r del eje del tubo). La condición del carácter estacionario tiene el aspecto

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 = \eta\,|\,dv/dr\,|\,2\pi rl. \qquad (77.1)$$

La velocidad decrece con la distancia hasta el eje del tubo. Por consiguiente, dv/dr es negativa y $|\,dv/dr\,| = -dv/dr$. Tomando esto en consideración, transformemos la correlación (77.1) del modo siguiente:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)\,r}{2\eta l}.$$

Separando las variables, obtenemos la ecuación:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l}\,r\,dr.$$

La integración nos da que

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\,r^2 + C. \qquad (77.2)$$

La constante de integración debe ser designada de manera que la velocidad se reduzca a cero en las paredes del tubo, es decir, con $r = R$ (R es el radio del tubo). De esta condición

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\,R^2.$$

Poniendo el valor de C en (77.2) se obtiene

$$v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}(R^2-r^2)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (77.3)$$

El valor de la velocidad en el eje del tubo es igual a

$$v_0=v(0)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2. \qquad (77.4)$$

Tomando en consideración esto último, a la fórmula (77.3) se le puede aducir la forma

$$v(r)=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (77.5)$$

De este modo, durante la corriente laminar la velocidad varía al cambiar la distancia desde el eje del tubo según una ley parabólica (fig. 77.2).

Con la corriente turbulenta la velocidad en cada punto varía de manera desordenada. Quedando invariables las condiciones exte-

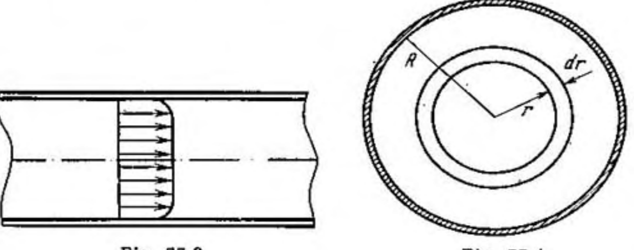


Fig. 77.3 Fig. 77.4

riores, resulta ser constante la velocidad media (según el tiempo) en cada punto de la sección del tubo. El perfil de las velocidades medias con la corriente turbulenta se muestra en la fig. 77.3. Cerca de las paredes del tubo, la velocidad cambia mucho más fuertemente que con la corriente laminar, en el resto de la sección la velocidad varía menos.

Suponiendo que la corriente es laminar calculemos el flujo Q del líquido, es decir, el volumen de éste que pasa por la sección transversal del tubo por la unidad de tiempo. Dividamos la sección transversal del tubo en anillos de anchura dr (fig. 77.4). Por un anillo de radio r pasará por segundo un volumen de líquido igual al producto del área del anillo $2\pi r\,dr$ por la velocidad de la corriente en los puntos distanciados del eje del tubo a una longitud r. Teniendo

en cuenta la fórmula (77.5), obtenemos

$$dQ = v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr. \qquad (77.6)$$

Para conseguir el flujo Q hay que integrar la expresión (77.6) por r en los límites desde 0 hasta R:

$$Q=\int_0^R v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr=\frac{1}{2}\pi R^2 v_0=\frac{1}{2}Sv_0 \qquad (77.7)$$

(S es el área de la sección del tubo). De la fórmula (77.7) se desprende que con la corriente laminar el valor medio (por la sección) de la velocidad, es igual a la mitad del valor de la velocidad en el eje del tubo.

Poniendo en (77.7) el valor (77.4) de v_0, para el flujo obtenemos la fórmula

$$Q=\frac{(p_1-p_2)\pi R^4}{8\eta l}. \qquad (77.8)$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de Poiseuille*. De acuerdo con (77.8) el flujo de un líquido es proporcional a la caída de la presión por unidad de longitud del tubo, es proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo e inversamente proporcional al coeficiente de rozamiento del líquido. Recordemos que la fórmula de Poiseuille sólo puede ser empleada para la corriente laminar.

La correlación (77.8) se utiliza para determinar la viscosidad de los líquidos. Haciendo pasar el líquido por un capilar cuyo diámetro es conocido y midiendo la caída de la presión y el flujo Q, puede ser hallado η.

§ 78. Movimiento de sólidos en líquidos y gases

Durante el movimiento de un sólido en un líquido o un gas[1], sobre éste actúan fuerzas, cuya resultante vamos a designar con la letra **R** (fig. 78.1). La fuerza **R** puede ser descompuesta en dos componentes, una de las cuales **Q** está dirigida en sentido opuesto al movimiento del sólido (o bien en dirección del movimiento del flujo que rodea el sólido), mientras que la segunda **P** es perpendicular a dicha dirección. Las componentes **Q** y **P** reciben correspondientemente el nombre de *resistencia frontal* y *fuerza de sustentación (ascensional)*. Es evidente, que sobre un sólido, simétrico respecto de la

[1] Cabe señalar que a velocidad constante de movimiento del sólido respecto del líquido, la fuerza que actúa sobre el cuerpo será, de acuerdo con el principio de relatividad de Galileo, la misma que cuando el líquido se mueve con relación a un sólido inmóvil a la misma velocidad. La fig. 78.1 corresponde a este último caso.

dirección de movimiento, sólo puede actuar la resistencia frontal, en lo que se refiere a la fuerza sustentadora, en este caso ésta será nula.

Como muestran los cálculos, el movimiento uniforme de sólidos en un líquido perfecto debe transcurrir sin resistencia frontal. Como el líquido perfecto carece de viscosidad, debe deslizarse libremente por la superficie del sólido, rodeándolo por completo. En la fig. 78.2 se muestran las líneas de corriente al pasar un líquido perfecto alrededor de un cilindro muy largo («infinito»). A causa de que el líquido

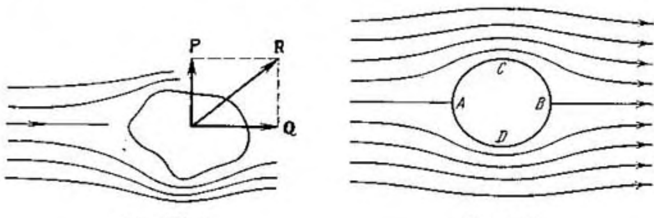
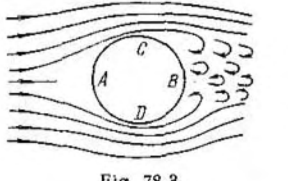


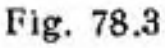
Fig. 78.1 Fig. 78.2

rodea por completo el sólido, el cuadro de las líneas de corriente resulta ser simétrico en absoluto tanto respecto de una recta que pasa por los puntos A y B, como con relación a la recta que pasa por los puntos C y D. Por esta razón, la presión en el entorno de los puntos A y B será igual (y mayor que en un flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a dichos puntos es menor); del mismo modo, junto a los puntos C y D la presión será también igual (y menor que el flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a estos puntos es mayor). Por consiguiente, la resultante de las fuerzas de presión en la superficie del cilindro (que al no haber viscosidad podría condicionar la resistencia frontal), con evidencia, es igual a cero. Para sólidos de otras formas obtendremos el mismo resultado. De forma completamente diferente transcurren los fenómenos durante el movimiento de un sólido en un líquido que posee viscosidad. En tal caso, una capa muy fina del líquido se adhiere a la superficie del cuerpo y se mueve junto con él como un todo único, llevándose tras de sí las siguientes capas. A medida que se alejan de la superficie del cuerpo, la velocidad de las capas disminuye y, por fin, a cierta distancia de la superficie el líquido resulta estar, prácticamente, no perturbado por el movimiento del sólido, de modo que el sólido se encuentra rodeado por una capa del líquido en la que hay gradiente de velocidad. Esta capa se denomina *límite*. En ella actúan las fuerzas de rozamiento que, al fin de cuentas, resultan aplicadas al sólido y provocan el surgimiento de la resistencia frontal.

18-01050

Pero la cosa no termina aquí. La frecuencia de la capa límite varía radicalmente el carácter de la corriente del líquido alrededor del sólido. El rodeo completo se hace imposible. La acción de la fuerza de rozamiento sobre la capa superficial, conduce a que el flujo se separa de la superficie del sólido, como resultado por la parte posterior del sólido se crean torbellinos o vórtices (véase la fig. 78.3, en la que está mostrado cómo un líquido viscoso rodea un cilindro). Los torbellinos son arrastrados por el flujo y se extinguen gradualmente a causa del rozamiento; con esto, la energía de los torbellinos se consume para calentar el líquido. La presión en la




Fig. 78.3

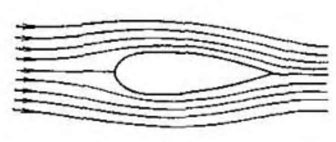


Fig. 78.4

zona de torbellinos, creada tras el sólido, es reducida, por lo que la resultante de las fuerzas de presión será diferente de cero condicionando a su vez la resistencia frontal.

Así, pues, la resistencia frontal se compone de la resistencia de rozamiento y de la resistencia de presión. Con las dimensiones transversales dadas del sólido, la resistencia de presión depende en alto grado de la forma del sólido. Por esta causa, ésta también recibe el nombre de resistencia de la forma. Tienen la resistencia de presión mínima los sólidos bien fuselados, en forma de gota (fig. 78.4). Semejante forma se tiende a dar al fuselaje y a las alas de los aviones, a la carrocería de los automóviles, etc.

La correlación entre la resistencia de rozamiento y la resistencia de presión se determina por el valor del número de Reynolds (76.1). En el caso dado, l es cierta dimensión característica del sólido (por ejemplo, el radio de un cuerpo esférico), v, la velocidad del cuerpo respecto del líquido.

Con pequeños Re, desempeña el fundamental papel la resistencia de rozamiento, de forma que la resistencia de presión puede no tomarse en consideración. Al aumentar Re, el papel de la resistencia de presión crece en mayor grado. Con grandes valores de Re en la resistencia frontal predominan las fuerzas de presión.

Al determinar el carácter de las fuerzas que actúan sobre el sólido en el flujo, el número de Reynolds también puede ser en este caso criterio de semejanza de los fenómenos. Esta circunstancia se utiliza durante la modelación. Por ejemplo, el modelo de un avión se com-

portará en un flujo de gas de la misma manera que su prototipo, si además de la semejanza geométrica entre modelo y el avión, en ellos también se observa la igualdad de los números de Reynolds.

Fórmula de Stokes. Con pequeños Re, o sea, con grandes velocidades de movimiento (y pequeñas l; véase (76.1)), la resistencia del medio está sólo condicionada, prácticamente, por las fuerzas de rozamiento. Stokes estableció que la fuerza de resistencia es proporcional, en tal caso, al coeficiente de viscosidad dinámica η, a la velocidad v de movimiento del sólido respecto del líquido y a la dimensión característica l del sólido: $F \sim \eta l v$ (se supone que la distancia desde el sólido hasta el límite del líquido, por ejemplo, hasta las

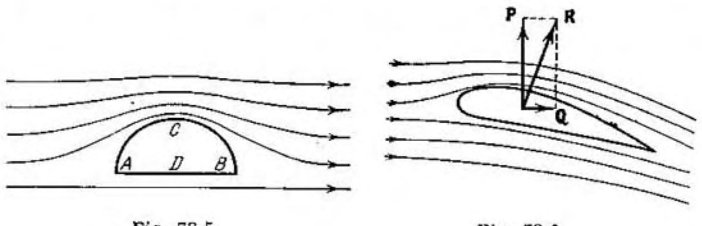


Fig. 78.5 Fig. 78.6

paredes del recipiente, es mucho mayor que las dimensiones del sólido). El coeficiente de proporcionalidad depende de la forma del cuerpo. Para una esfera, si se toma en calidad de l el radio r, el coeficiente de proporcionalidad será 6π. Por consiguiente, la fuerza de resistencia al movimiento a pequeñas velocidades de la esfera en los líquidos, en correspondencia con la fórmula de Stokes, será igual a

$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (78.1)$$

Fuerza de sustentación. Para el surgimiento de la fuerza de sustentación, la viscosidad del líquido no tiene gran importancia. En la fig. 78.5 se muestran las líneas de corriente al ser rodeado un semicilindro por un líquido perfecto. A causa del rodeo completo, las líneas de corriente serán simétricas con relación a la recta CD. No obstante, respecto de la recta AB el cuadro será asimétrico. Las líneas de corrientes se condensan junto al punto C, por lo que aquí la presión será menor que junto al punto D y surge la fuerza de sustentación **P**. De forma análoga surge dicha fuerza en un líquido viscoso.

La fuerza que sustenta el avión en el aire es la fuerza de sustentación que actúa sobre sus alas. Durante el vuelo del avión la resistencia frontal desempeña un papel nocivo. Por esta razón, las alas y el fuselaje del avión tienen forma fuselada. Al mismo tiempo, el perfil

del ala debe asegurar una fuerza de sustentación de suficiente magnitud. El perfil óptimo del ala se muestra en la fig. 78.6, que fue creado por el eminente científico ruso N. E. Zhukovski (1847—1921). Los trabajos de Zhukovski y de su alumno S. A. Chapliguin, fueron la base de la aerodinámica contemporánea. V. I. Lenin llamó a Zhukovski «padre» de la aviación rusa. En particular, Zhukovski dedujo la fórmula para determinar la fuerza de sustentación, que es la base para todos los cálculos aerodinámicos de los aviones.

SEGUNDA PARTE

FÍSICA MOLECULAR Y TERMODINÁMICA

CAPÍTULO X

GENERALIDADES

§ 79. Física estadística y termodinámica

La física molecular es la parte de la física que estudia la estructura y las propiedades de la materia, apoyándose en las representaciones cinético-moleculares. En correspondencia con ellas, todo cuerpo: sólido, líquido o gaseoso, consta de gran cantidad de muy pequeñas partículas aisladas, es decir, de moléculas[1]). Las moléculas de toda sustancia se hallan en continuo movimiento desordenado, caótico, que no tiene ninguna dirección preferente. Su intensidad depende de la temperatura de la sustancia.

La demostración directa de la existencia del movimiento caótico de las moléculas es el movimiento browniano. Este fenómeno consiste en que extremadamente pequeñas partículas (visibles sólo con el microscopio) suspendidas en un líquido siempre se encuentran en constante movimiento desordenado, que no depende de causas exteriores y que es una de las manifestaciones de movimiento interior de la sustancia. Las partículas brownianas se mueven a causa de los choques desordenados de las moléculas.

La teoría cinético-molecular tiene como objetivo interpretar aquellas propiedades de los cuerpos que se observan directamente en el experimento (presión, temperatura, etc.), como el resultado sumario de la acción de las moléculas. Con esto, dicha teoría hace uso de un método estadístico, ya que interesan no las moléculas por separado, sino que sólo aquellas magnitudes medias que caracterizan el movimiento de un enorme conjunto de partículas. De aquí su segunda denominación—física estadística.

La termodinámica también se ocupa del estudio de diversas propiedades de los cuerpos y de las variaciones del estado de la sustancia. Sin embargo, a diferencia de la teoría cinético-molecular, termodinámica estudia las propiedades macroscópicas de los cuerpos y los fenómenos de la naturaleza, sin prestar atención al cuadro microscópico. Sin introducir en la consideración las moléculas y los

---

[1]) Los átomos pueden ser considerados como moléculas monoatómicas.

átomos, sin penetrar en el estudio microscópico de los procesos, la termodinámica permite llegar a una serie de conclusiones respecto de su transcurso.

La termodinámica se basa sobre varias leyes fundamentales (llamadas *principios de termodinámica*), establecidas gracias a la generalización de un gran conjunto de hechos experimentales. Por esta causa, las conclusiones de termodinámica tienen un carácter muy general.

Abordando el estudio de la variación de los estados de la sustancia desde diversos puntos de vista, la termodinámica y la teoría cinético-molecular, se completan mutuamente, formando, en realidad, un todo único.

Si echamos una mirada al desarrollo de las representaciones cinético-moleculares, cabe ante todo señalar que las representaciones acerca de la estructura atómica de la sustancia, fueron ya expresadas por antiguos griegos. Sin embargo, para ellos estas ideas no eran otra cosa que una genial suposición. En el siglo XVII la atomística de nuevo se crea, pero ya no como una suposición, sino como una hipótesis científica. Esta hipótesis obtuvo particular desarrollo en las obras del genial sabio y pensador ruso M. V. Lomonósov (1711—1765) quien intentó dar un cuadro único de todos los fenómenos físicos y químicos conocidos en su época. Con ello, él partía de la representación corpuscular (en la terminología contemporánea, molecular) de la estructura de la materia. Luchando contra la teoría del calórico (líquido térmico hipotético, cuyo contenido en el cuerpo determina el grado de su calentamiento), que en sus tiempos predominaba, Lomonósov veía «la causa del calor» en el movimiento rotativo de las partículas del cuerpo. De este modo, Lomonósov, en esencia, enunció representaciones cinético-moleculares.

Durante la segunda mitad del siglo XIX y a comienzos del XX, gracias a las obras de una serie de científicos, la atomística se convirtió en una teoría científica.

§ 80. Masa y dimensiones de las moléculas

Para caracterizar las masas de los átomos y las moléculas se aplican magnitudes que recibirán el nombre de *masa atómica relativa del elemento* (abreviado—masa atómica) y *masa molecular relativa de la sustancia* (abreviado—masa molecular)[1].

Se denomina masa atómica (A_r) de un elemento químico, la razón entre la masa del átomo de este elemento y 1/12 de la masa del átomo ^{12}C (así se designa el isótopo de carbono con número másico 12). Recibe el nombre de masa molecular (M_r) de la sustancia, la razón

[1]) Antes estas magnitudes se llamaban peso atómico y peso molecular.

entre la masa de la molécula de dicha sustancia y 1/12 de la masa del átomo ^{12}C. Como se desprende de la definición las masas atómica y molecular son magnitudes adimensionales.

La unidad de masa, igual a 1/12 de la masa del átomo ^{12}C, denomínase *unidad atómica de masa* (u.a.m.). Designemos esta unidad, expresada en kilogramos, por m_{un}. Entonces, la masa del átomo expresada en kilogramos será igual a $A_r m_{un}$ y la masa de la molécula, $M_r m_{un}$.

La cantidad de sustancia que contiene un número de partículas (átomos, moléculas, iones, electrones, etc.) igual al número de átomos en 0.012 kg del isótopo ^{12}C se denomina *mol*. También se utilizan unidades múltiples y fraccionarias: kilomol (kmol), milimol (mmol), micromol (μmol), etc.

El número de partículas que contiene un mol de la sustancia, recibe el nombre de *número de Avogadro*, que, como se ha determinado por vía experimental, es igual a

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}. \qquad (80.1)$$

De este modo, por ejemplo, un mol de cobre contiene N_A átomos de cobre, un mol de agua contiene N_A moléculas de agua, un mol de electrones contiene N_A electrones, etc. ...

La masa de un mol es denominada *masa molar M*. Es evidente, que M es igual al producto de N_A por la masa de la molécula $M_r m_{un}$:

$$M = N_A M_r m_{un}. \qquad (80.2)$$

En el caso del carbono ^{12}C, $M = 0{,}012$ kg/mol, mientras que la masa del átomo es igual a $12m_{un}$. Poniendo estos valores en la correlación (80.2) obtenemos

$$0{,}012\ (\text{kg/mol}) = N_A\ (\text{mol}^{-1}) \cdot 12 m_{un}\ (\text{kg}).$$

De aquí,

$$m_{un}\,(\text{kg}) = \frac{0{,}001 \cdot (\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1})}{N_A\,(\text{mol}^{-1})} = \frac{0{,}001\ \text{kg}}{6{,}022\cdot 10^{23}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}. \qquad (80.3)$$

Esto quiere decir, que la masa de cualquier átomo es igual a $1{,}66 \times \times 10^{-27} \cdot A_r$ kg y la masa de cualquier molécula es igual a $1{,}66 \cdot 10^{-27} M_r$ kg.

De (80.3) se desprende que el producto $N_A m_{un}$ es igual a 0,001 kg/mol. Sustituyendo este valor en la fórmula (80.2), obtenemos

$$M = 0{,}001 \cdot M_r\ \text{kg/mol} \qquad (80.4)$$

o bien

$$M = M_r\ \text{g/mol}. \qquad (80.5)$$

Así, pues, la masa de un mol, expresada en gramos, es numéricamente igual a la masa molecular relativa. No obstante, hay que tener en cuenta que en tanto que M_r es una magnitud adimensional, M tiene la dimensión kg/mol (o g/mol).

Ahora apreciemos las dimensiones de la molécula. Es natural suponer que en los líquidos las moléculas se disponen bastante cerca unas de otras. Por esta razón, la apreciación aproximada del volumen de una molécula se puede obtener dividiendo el volumen de un mol de cierto líquido, por ejemplo el agua, por el número de moléculas en el mol N_A. Un mol (es decir, 18 g) de agua ocupa un volumen de 18 cm^3 = $18\cdot 10^{-6}$ m^3. Por lo tanto, a una molécula le corresponde un volumen igual a

$$(18\cdot 10^{-6})/(6\cdot 10^{23}) = 30\cdot 10^{-30}\ \text{m}^3.$$

De aquí se desprende que las dimensiones lineales de una molécula de agua son iguales, aproximadamente, a

$$\sqrt[3]{30\cdot 10^{-30}} \approx 3\cdot 10^{-10}\ \text{m} = 3\ \text{Å}.$$

Las moléculas de otras sustancias también tienen dimensiones de un orden de varios angström[1]).

§ 81. Estado del sistema. Transformación

Llamaremos sistema de cuerpos o simplemente sistema, el conjunto de los cuerpos que consideramos. Un ejemplo de sistema puede ser un líquido y un vapor que se encuentra en equilibrio con éste. En particular, el sistema puede constar de un solo cuerpo.

Todo sistema puede estar en diferentes estados que se diferencian por la temperatura, presión, volumen, etc. Estas magnitudes, que caracterizan el estado del sistema, denomínanse *parámetros de estado*.

No siempre cualquier parámetro tiene valor determinado. Por ejemplo, si la temperatura en diversos puntos del cuerpo no es igual, a este último no se le puede adjudicar un valor determinado del parámetro T. En semejante caso, el estado se denomina *de desequilibrio* (o fuera de equilibrio). Si tal cuerpo se aísla de otros cuerpos y se le deja por su propia cuenta, la temperatura se nivelará y tomará en todos sus puntos un valor igual T, es decir, el cuerpo pasa al estado de equilibrio. Este valor de T no variará hasta que no se saque el cuerpo del estado de equilibrio por un influjo del exterior.

Puede ocurrir lo mismo con otros parámetros, por ejemplo, con la presión p. Si en un recipiente cilíndrico, cerrado con un émbolo bien ajustado, se halla un gas y comenzamos a desplazar con rapidez el émbolo, por debajo de éste se crea una almohada de gas en la que la presión será mayor que el resto del volumen de gas. Esto significa, que aquí el gas no puede ser caracterizado por un valor determinado de la presión p y su estado será de desequilibrio. Sin embargo, si cesamos el desplazamiento del émbolo, la presión en diversos puntos

[1]) Se denomina angström (Å) una unidad de longitud fuera de sistema igual a 10^{-10} m. En la física atómica esta unidad es muy cómoda.

del volumen se nivelará y el gas pasará al estado de equilibrio.

La transición del sistema del estado de desequilibrio al de equilibrio se llama *proceso de relajación* o simplemente *relajación*. El tiempo consumido para semejante transición denomínase *tiempo de relajación*. Como tiempo de relajación se toma el tiempo necesario para que la discrepancia inicial de cierta magnitud respecto de su valor de equilibrio disminuya e veces. Cada parámetro del sistema tiene su tiempo de relajación. El mayor de estos tiempos se toma como tiempo de relajación del sistema.

Así, pues, se llama *de equilibrio* tal estado de un sistema con el que los parámetros de éste tienen determinados valores que quedan constantes el tiempo que se quiera[1]), cuando las condiciones externas son invariables.

Si en los ejes de coordenadas se trazan los valores de cualesquiera dos parámetros, todo estado de equilibrio del sistema puede ser representado por un punto en el plano de coordenadas (véase, por ejemplo, el punto *1* en la fig. 81.1). El estado de desequilibrio no puede ser representado de este modo, ya que en semejante estado, por lo menos uno de los parámetros no tendrá valor determinado.

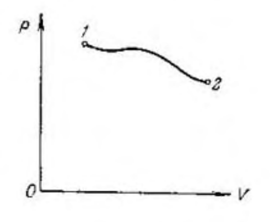


Fig. 81.1

Toda transformación, es decir, la transición del sistema de un estado a otro, está ligada con la alteración del equilibrio del sistema. Por lo tanto, cuando en un sistema transcurre cierta transformación, ésta pasa por una secuencia de estados de desequilibrio. Retornando al proceso de compresión de un gas en un recipiente cerrado con un émbolo, que más arriba ya hemos estudiado, podemos llegar a la conclusión de que la violación del equilibrio al introducir el émbolo será tanto mayor, cuanto más rápida sea la compresión del gas. Si desplazamos el émbolo con gran lentitud, el equilibrio se altera de modo insignificante y la presión en diferentes puntos poco divergirá de cierto valor medio p. En el límite, si la compresión del gas transcurre con infinita lentitud, en cada momento de tiempo el gas se caracterizará por un determinado valor de la presión. Por lo tanto, en semejante caso, el estado del gas en cada momento de tiempo es de equilibrio y la transformación infinitamente lenta estará constituida por sucesivos estados de equilibrio.

La transformación que consta de una secuencia ininterrumpida de estados de equilibrio recibe el nombre de *equilibrada* o *cuasiestática*.

[1]) En el caso, cuando el gas se encuentra en el campo de fuerzas externo (por ejemplo, en el campo gravitatorio), el estado de equilibrio se realizará a una presión que varía con regularidad de punto en punto (véase el § 92).

De lo dicho se desprende que sólo una transformación infinitamente lenta puede ser equilibrada. Con transcurso suficientemente lento, las transformaciones reales pueden cuan se quiera aproximarse a la equilibrada.

Una transformación equilibrada puede ser realizada en sentido opuesto, con la particularidad de que pasará por los mismos estados que con el transcurso directo, pero en sucesión inversa. Por esta razón, las transformaciones equilibradas también reciben el nombre de *reversibles*.

Una transformación reversible (es decir, equilibrada) puede ser representada en el plano de coordenadas con una curva (véase la fig. 81.1). Las transformaciones irreversibles (o sea, no equilibradas) serán representadas convencionalmente con líneas de trazos.

Si después de una serie de cambios el sistema retorna al estado inicial, semejante transformación denomínase *circular* (cerrada) o *ciclo*. En las gráficas el ciclo se representa con una curva cerrada.

En termodinámica, las nociones de estado de equilibrio y de transformación reversible desempeñan importante papel. Todas las deducciones cuantitativas en termodinámica son aplicables con rigor sólo a los estados de equilibrio y a las transformaciones reversibles.

§ 82. Energía interna del sistema

Llamamos energía interna de cualquier cuerpo, su energía de la que se ha sustraído la energía cinética del cuerpo como un todo y la energía potencial de éste en el campo exterior de fuerzas. Por ejemplo, al determinar la energía interna de cierta masa de gas no debemos tomar en consideración la energía de movimiento del gas junto con el recipiente y la energía condicionada por hallarse el gas en el campo de fuerzas de la atracción terrestre.

Es decir, en la noción de energía interna se incluyen la energía del movimiento caótico de las moléculas, la energía potencial de interacción entre ellas y la energía intramolecular[1]).

La energía interna de un sistema es igual a la suma de las energías internas de cada uno de los cuerpos por separado y de la energía de interacción entre los cuerpos, que de por sí es la energía de interacción intermolecular en una fina capa en la superficie de separación entre los cuerpos. Este último tipo de energía es tan pequeña, en comparación con la de los cuerpos macroscópicos, que puede ser despreciada y se considera que la energía interna de un sistema de cuerpos macroscópicos es igual a la suma de las energías internas de

---

[1]) Esta definición debe ser considerada como previa. En la física estadística la noción de energía interna se precisa. La aclaración de dicha precisión sale de los márgenes del presente manual.

los cuerpos que lo constituyen. De este modo, la energía interna es una magnitud aditiva.

La energía interna es función del estado del sistema, lo que significa que cada vez que el sistema se encuentra en el estado dado, su energía interna toma el valor propio de dicho estado, independientemente de la prehistoria del sistema. Por consiguiente, durante el paso de un sistema de un estado a otro, la variación de la energía interna siempre será igual a la diferencia de los valores de la energía interna en dichos estados independientemente del camino por el que se realizó la transición, es decir, sin que dependa de la transformación o del conjunto de transformaciones que provocaron la transición del sistema de un estado a otro.

§ 83. Primer principio de termodinámica

En lo fundamental, la energía interna puede variar a cuenta de dos transformaciones diferentes: del trabajo A' realizado sobre el cuerpo y por comunicar a éste la cantidad de calor Q. La realización de trabajo se acompaña por el desplazamiento de las fuerzas externas, ejercidas sobre el sistema. Por ejemplo, al introducir el émbolo, que cierra el recipiente con gas, éste, al moverse, efectúa sobre el gas el trabajo A'. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el gas ejecuta sobre el émbolo un trabajo $A = -A'$.

La transmisión del calor al gas no está ligada con el desplazamiento de los cuerpos externos y, por consiguiente, no está relacionada con el trabajo macroscópico (es decir, que se refiere a todo el conjunto de moléculas de las que consta el cuerpo) que se ejerce sobre este gas. En este caso, la variación de la energía interna está condicionada porque moléculas aisladas del cuerpo más caliente realizan trabajo sobre moléculas por separado del cuerpo menos caliente. En este caso, la transmisión de energía también transcurre a cuenta de la radiación. El conjunto de las transformaciones microscópicas (o sea, que no abarcan a todo el cuerpo, sino a sus moléculas aisladas) que conducen a la transmisión de energía de uno a otro cuerpo, recibe el nombre de *transmisión de calor*.

De modo semejante a cómo la cantidad de energía que un cuerpo comunica a otro se determina por el trabajo A que se realiza entre ellos, la cantidad de energía comunicada de un cuerpo a otro mediante la transmisión de calor se determina por la *cantidad de calor Q* que uno de los cuerpos cede al otro. Así, pues, el incremento de la energía del sistema debe ser igual a la suma del trabajo A', ejercido sobre el sistema, más la cantidad de calor Q, comunicado al sistema

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \qquad (83.1)$$

Aquí, U_1 y U_2 son los valores inicial y final de la energía interna del sistema. Generalmente, en lugar del trabajo A', que ejercen los

cuerpos exteriores sobre el sistema, se considera el trabajo A (igual a $-A'$) que el sistema realiza sobre los cuerpos exteriores. Poniendo $-A$ en lugar de A' y resolviendo la ecuación (83.1) respecto de Q, obtenemos:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (83.2)$$

La ecuación (83.2) expresa el principio de conservación de la energía y es el contenido del *primer principio (ley) de termodinámica*. Este principio puede ser enunciado así: *la cantidad de calor comunicada al sistema se gasta en el incremento de su energía interna y en el trabajo que realizan las fuerzas del sistema aplicadas a cuerpos exteriores.*

Lo dicho no significa, de ninguna manera, que siempre que se comunica calor crece la energía interna del sistema. Puede ocurrir que aunque al sistema se le comunique calor su energía no crece, sino que decrece ($U_2 < U_1$). Entonces, de acuerdo con (83.2) $A > Q$, es decir, el sistema realiza trabajo tanto a cuenta del calor Q que recibe, como de la reserva de energía interna, cuyo decrecimiento es igual a $U_1 - U_2$. Hay que tener en cuenta que las magnitudes Q y A en (83.2) son algebraicas ($Q < 0$ quiere decir, que el sistema en realidad no recibe calor, sino que lo cede).

De (83.2) se desprende que la cantidad Q de calor se puede medir en las mismas unidades que el trabajo o la energía. En el SI la unidad de cantidad de calor es el julio.

Para medir la cantidad de calor también se utiliza una unidad especial llamada *caloría*. Una caloría es igual a la cantidad de calor necesaria para calentar 1 g de agua desde 19,5 hasta 20,5 °C. Mil calorías reciben el nombre de gran caloría o kilocaloría.

Por vía experimental ha sido establecido que una caloría equivale a 4,18 J. Por lo tanto, un julio es igual a 0,24 cal. La magnitud $I = 4{,}18$ J/cal denomínase *equivalente mecánico del calor*.

Si las magnitudes que entran en (83.2), están expresadas en diversas unidades, algunas de ellas deberán ser multiplicadas por el correspondiente equivalente. Por ejemplo, al expresar Q en calorías, mientras que A y U en julios, la correlación (83.2) se escribirá así:

$$IQ = U_2 - U_1 + A.$$

En adelante, siempre vamos a suponer que Q, A y U están expresadas en iguales unidades y escribiremos la ecuación del primer principio de termodinámica en la forma (83.2).

Al calcular el trabajo que realiza el sistema o el calor recibido por éste, por regla, hay que dividir la transformación que se estudia en una serie de transformaciones elementales, cada una de las cuales corresponde a una variación muy pequeña de los parámetros del sistema (en el límite, infinitesimal). Para una transformación elemental la ecuación (83.2) toma el aspecto

$$\Delta'Q = \Delta U + \Delta'A, \quad (83.3)$$

donde $\Delta'Q$ es una cantidad elemental de calor, $\Delta'A$, un trabajo elemental, ΔU, el incremento de la energía interna del sistema durante el transcurso de la transformación elemental.

Es de gran importancia tener en cuenta que $\Delta'Q$ y $\Delta'A$ no pueden ser consideradas como los incrementos de Q y A. La magnitud que corresponde a la transformación elemental Δ de cierta magnitud f puede ser considerada como el incremento de dicha magnitud sólo en el caso de que $\sum\Delta f$, que corresponde a la transición de uno a otro estado, no depende del recorrido por el que transcurre la transición, es decir, si la magnitud f es función del estado. En lo que se refiere a la función de estado podemos hablar de su «reserva» en cada uno de los estados. Por ejemplo, es posible hablar de la reserva de energía interna que posee el sistema en diversos estados.

Más adelante veremos que la magnitud del trabajo que realiza el sistema y la cantidad de calor que él recibe, dependen del recorrido por el que el sistema pasa de un estado a otro. Por consiguiente, ni Q ni A no son funciones de estado por lo que no podemos hablar de la reserva de calor o de trabajo que el sistema posee en diversos estados.

De este modo, al símbolo Δ, que figura ante A y Q, se le aduce un sentido diferente del que tiene dicho símbolo ante U. Para remarcar este hecho, en el primer caso Δ tiene una raya. El símbolo ΔU designa el incremento de la energía interna, los símbolos $\Delta'Q$ y $\Delta'A$ no significan incremento, sino cantidad elemental de calor y trabajo elemental.

Para realizar los cálculos, en (83.3) se pasa a las diferenciales. Entonces, la ecuación del primer principio de termodinámica toma el siguiente aspecto[1]):

$$d'Q = dU + d'A. \qquad (83.4)$$

La integración de (83.4) por toda la transformación nos conduce a la expresión

$$Q = (U_2 - U_1) + A,$$

idéntica a la ecuación (83.2).

Remarcamos una vez más que, por ejemplo, el resultado de la integración $d'A$ no puede ser escrito en la forma

$$\int_1^2 d'A = A_2 - A_1$$

Semejante anotación significaría que el trabajo que realiza el sistema es igual a la diferencia de los valores (o sea, de las reservas) de trabajo en los estados primero y segundo.

[1]) En la ecuación (83.4) dU es la diferencial completa, $d'Q$ y $d'A$ no son diferenciales completas (véase el § 22).

§ 84. Trabajo que realiza un cuerpo durante las variaciones de volumen

La interacción del cuerpo dado con los cuerpos que con él hacen contacto, puede ser caracterizada por la presión que el primero ejerce sobre los otros. Con ayuda de la presión es posible describir la interacción del gas con las paredes del recipiente, así como la de un sólido o líquido con el medio (por ejemplo, con un gas) que lo rodea. El desplazamiento de los puntos de aplicación de las fuerzas de interacción se acompaña de la variación de volumen del cuerpo. Por lo

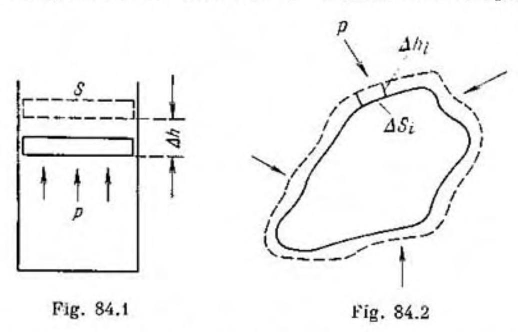


Fig. 84.1 Fig. 84.2

tanto, el trabajo realizado por el cuerpo dado sobre los cuerpos exteriores, puede ser expresado por la presión y la variación del volumen del cuerpo. Con el fin de hallar esta expresión, examinemos el siguiente ejemplo.

Supongamos que un gas se encuentra en un recipiente cilíndrico cerrado con un émbolo móvil bien ajustado (fig. 84.1). Si por ciertas causas el gas comienza a dilatarse, éste desplazará el émbolo y realizará sobre él trabajo. El trabajo elemental que efectúa el gas al desplazarse el émbolo por el segmento Δh es igual a

$$\Delta' A = F\,\Delta h,$$

donde F es la fuerza que el gas ejerce en el émbolo. Sustituyendo esta fuerza por el producto de la presión del gas p por el área del émbolo S, obtenemos:

$$\Delta' A = pS\,\Delta h.$$

Pero $S\,\Delta h$ es el incremento del volumen del gas ΔV. Por esto, para el trabajo elemental podemos escribir:

$$\Delta' A = p\,\Delta V. \tag{84.1}$$

Es evidente, que la magnitud $\Delta' A$ en (84.1) es algebraica. En efecto, al comprimir el gas las direcciones del desplazamiento de Δh y de la fuerza F, con la que el gas actúa sobre el émbolo, son opuestas, por lo que el trabajo elemental $\Delta' A$ será negativo. El incremento del volumen ΔV también será aquí negativo. Así, pues, la fórmula (84.1) proporciona una expresión correcta para el trabajo con cualesquiera variaciones del volumen del gas.

Si la presión del gas queda constante (para lo que del modo correspondiente debe variar al mismo tiempo la temperatura), el trabajo que se realiza al cambiar el volumen del valor V_1 al V_2, será igual a

$$A_{12} = p\,(V_2 - V_1). \tag{84.2}$$

Pero si al cambiar el volumen cambia la presión, la fórmula (84.1) sólo es válida para ΔV suficientemente pequeños. En este caso, el trabajo que se realiza con las variaciones finales del volumen, debe calcularse como la suma de los trabajos elementales de la forma (84.1), o sea, integrando:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \tag{84.3}$$

Las expresiones halladas para el trabajo son justas con cualesquiera variaciones de volumen de los sólidos, líquidos y gases. Para cerciorarse de que esta afirmación es correcta, examinemos un ejemplo más. Tomemos un sólido de forma arbitraria sumergido en un medio líquido o gaseoso, que por todos los puntos del sólido ejerce una misma presión p (fig. 84.2). Supongamos que el sólido se dilata de forma que sectores elementales aislados de su superficie ΔS_i reciben distintos desplazamientos Δh_i. Entonces el i-ésimo sector realizará un trabajo $\Delta' A_i$ igual a $p\,\Delta S_i \Delta h_i$. El trabajo efectuado por el cuerpo puede ser hallado como la suma de los trabajos de sectores por separado:

$$\Delta' A = \sum \Delta' A_i = \sum p \Delta S_i \Delta h_i.$$

Sacando tras el signo de la suma la presión p, que es igual para todos los sectores, y notando que $\sum \Delta S_i \Delta h_i$ nos proporciona el incremento del volumen ΔV del cuerpo, es posible escribir: $\Delta' A = p \Delta V$, es decir, en el caso general también llegamos a la fórmula (84.1).

Representemos el proceso de variación del volumen del sólido en la gráfica (p, V) (fig. 84.3). El trabajo elemental $\Delta' A_i = p_i \Delta V_i$ corresponde al área de la estrecha banda sombreada en la gráfica. Es evidente, que el área limitada por el eje V, la curva $p = f(V)$ y las rectas V_1 y V_2, es numéricamente igual al trabajo que se realiza al variar el volumen desde el valor V_1 hasta V_2. El trabajo que se ejecuta durante un ciclo, es numéricamente igual al área que

limita la curva (fig. 84.4). En efecto, el trabajo en el sector *1—2* es positivo y numéricamente igual al área marcada con rayado a la derecha (se considera un ciclo que transcurre en sentido horario). En el sector *2—1* el trabajo es negativo y numéricamente igual al área marcada con rayado a la izquierda. Por lo tanto, durante el

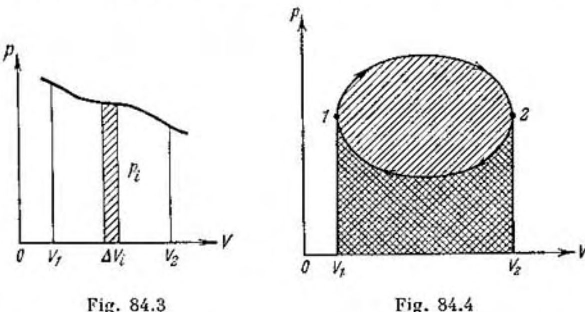


Fig. 84.3 Fig. 84.4

ciclo el trabajo es igual al área abarcada por la curva y será positivo con el ciclo directo (es decir, aquel que se efectúa en dirección horaria) y negativo con el ciclo inverso.

De lo dicho en el § 81 está claro que las fórmulas que hemos obtenido pueden ser utilizadas sólo para las transformaciones reversibles.

Cabe indicar, que si hacemos uso de la expresión (84.1) (pasando a las diferenciales), la ecuación (83.4) del primer principio de termodinámica, puede ser escrita del modo siguiente:

$$d'Q = dU + p\,dV. \tag{84.4}$$

§ 85. Temperatura

Las siguientes consideraciones nos conducirán a la definición de la noción de temperatura. Si los cuerpos en contacto se hallan en estado de equilibrio térmico, o sea, no hay intercambio de energía por medio de la transmisión de calor, a dichos cuerpos se adjudica igual temperatura. Cuando al establecer contacto térmico entre dos cuerpos, uno de ellos transmite al otro energía por intermedio de la transmisión de calor, al primer cuerpo se le atribuye mayor temperatura que al segundo. Una serie de propiedades de los cuerpos— volumen, resistencia eléctrica, etc., depende de la temperatura. Cualquiera de estas propiedades puede ser utilizada para la determinación cuantitativa de la temperatura.

Hagamos que el cuerpo que hemos elegido para medir la temperatura (cuerpo termométrico) se encuentre en equilibrio con el hielo en fusión, atribuyendo al cuerpo la temperatura de 0° y caractericemos de forma cuantitativa aquella propiedad del cuerpo (criterio de temperatura) que vamos a utilizar para medir la temperatura. Sea que como semejante criterio hemos elegido el volumen del cuerpo y que a una temperatura de 0° es igual a V_0. A continuación, ese mismo cuerpo se pone en equilibrio térmico con agua hirviendo a presión atmosférica, atribuyéndole en este estado un valor de la temperatura igual a 100° y determinamos el correspondiente valor V_{100}. Considerando que el criterio de temperatura (en el ejemplo que examinamos es el volumen) que hemos elegido varía con la temperatura de modo lineal, al estado con el que el cuerpo termométrico tiene un volumen V se le debe atribuir la temperatura

$$t=\frac{V-V_0}{V_{100}-V_0}\,100°. \tag{85.1}$$

La escala de temperaturas que hemos establecido del modo descrito, como sabemos, recibe el nombre de escala Celsius. Una correlación análoga a (85.1) puede ser también escrita cuando para la medición de la temperatura no se toma el volumen, sino otro cualquier criterio de temperatura.

Si del modo descrito graduamos un termómetro, éste puede ser utilizado para medir la temperatura poniéndolo en equilibrio térmico con aquel cuerpo, cuya temperatura nos interesa, efectuando el registro de la magnitud del volumen.

Al comparar los termómetros en los que se emplean cuerpos termométricos de diversa naturaleza (por ejemplo, mercurio, alcohol) o diferentes criterios de temperatura (por ejemplo, el volumen y la resistencia eléctrica) advertiremos que las indicaciones de los dos termómetros, que coinciden a 0° y 100°, a causa del procedimiento de graduación, no coinciden a otras temperaturas. De aquí se desprende que para la determinación unívoca de la escala de temperaturas, hay que concordar, además del procedimiento de graduación, la elección del cuerpo termométrico y el criterio de temperatura. En el próximo parágrafo relataremos cómo se ejecuta dicha elección, al establecer la llamada escala empírica de temperaturas. Adelantando los acontecimientos, indicaremos que sobre la base del segundo principio de termodinámica puede ser establecida una escala de temperaturas que no depende de las propiedades del cuerpo termométrico (véase el § 106). Dicha escala lleva el nombre de *escala termodinámica de temperaturas*.

En la técnica y la vida cotidiana se utiliza la *escala práctica termométrica internacional* del año 1968 (EPTI-68), que antes se denominaba centígrada o Celsius. En física es más cómoda la *escala absoluta*. La temperatura T registrada mediante esta escala, se rela-

ciona con la temperatura t, según la escala práctica internacional, por medio de la correlación

$$T = t + 273{,}15.$$

La unidad de temperatura absoluta recibe el nombre de *Kelvin* (K). Antes se llamaba grado de Kelvin (°K). La temperatura práctica internacional se mide en *grados Celsius* (°C). El valor del kelvin y del grado Celsius es igual. La temperatura igual a 0 K denomínase *cero absoluto* y le corresponde $t = -273{,}15$ °C.

Más adelante (véase el § 97) mostraremos que la temperatura absoluta es proporcional a la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de la sustancia. En esto consiste el sentido físico de la temperatura absoluta.

§ 86. Ecuación de estado de un gas ideal

El estado de la masa prefijada de gas se determina por los valores de tres parámetros: la presión p, el volumen V y la temperatura T. Estos parámetros de forma regular están ligados entre sí, de manera que la variación de uno de ellos provoca el cambio de los demás. La ligazón indicada puede ser prefijada analíticamente como la función

$$F(p, V, T) = 0. \qquad (86.1)$$

La correlación que determina la ligazón entre los parámetros de cierto cuerpo recibe el nombre de *ecuación de estado* de dicho cuerpo. Por lo tanto (86.1), es la ecuación de estado de la masa prefijada del gas.

Un gas en el que la interacción entre las moléculas es despreciablemente pequeña tiene las más sencillas propiedades. Semejante gas se llama *ideal* o *perfecto*. La interacción entre las moléculas de todo gas será menospreciablemente débil con gran enrarecimiento, es decir, con pequeñas densidades del gas. Con suficiente enrarecimiento, cualquier gas real se aproxima por sus propiedades a un gas ideal. Ciertos gases, tales como el aire, nitrógeno, oxígeno, incluso a condiciones normales, es decir, a temperatura ambiente y presión atmosférica, poco se diferencian de un gas ideal. En particular, por sus propiedades, el helio e hidrógeno, se aproximan a un gas ideal.

Con pequeñas densidades, los gases se supeditan con suficiente precisión a la ecuación

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \qquad (86.2)$$

Por lo tanto, esta es la *ecuación de estado del gas ideal*.

De acuerdo con la ley establecida por Avogadro, los moles de todos los gases, a iguales condiciones (es decir, a iguales temperatura y presión), ocupan el mismo volumen. En particular, a las llamadas

condiciones normales, es decir, para 0 °C y a una presión de 1 atm ($1{,}01 \cdot 10^5$ Pa), el volumen de un mol de todo gas es igual a 22,4 l/mol = $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m³/mol. De aquí se desprende que cuando la cantidad de gas es igual a un mol, la magnitud de la constante en (86.2) será igual para todos los gases. Designando por R la magnitud de la constante que corresponde a un mol, la ecuación (86.2) puede ser escrita:

$$pV_m = RT. \tag{86.3}$$

A V hemos puesto el índice «m» para mostrar que se trata del volumen que ocupa un mol de gas, con p y T prefijadas. La ecuación (86.3) es la ecuación de estado de un gas ideal, escrita para un mol.

La magnitud R denomínase *constante de los gases*. En correspondencia con la correlación (86.3) y la ley de Avogadro

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3}}{273} \, \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol}}{\text{K}} = 8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$$

(se lee: julio por mol-kelvin)[1].

De la ecuación (86.3) para un mol, es fácil pasar a la ecuación para cualquier masa m, tomando en consideración que con iguales presión y temperatura ν moles de gas ocuparán un volumen ν veces mayor que el que ocupa un mol: $V = \nu V_m$. Multiplicando (86.3) por $\nu = m/M$ (m es la masa del gas, M, masa molar) y sustituyendo νV_m por V, obtenemos la ecuación

$$pV = \frac{m}{M} RT. \tag{86.4}$$

Ésta es la ecuación de estado de un gas ideal escrita para una masa de gas igual a m.

Podemos dar a la ecuación (86.4) otro aspecto. Para ello introducimos la magnitud

$$k = \frac{R}{N_A} \tag{86.5}$$

(R, constante de los gases, N_A, número de Avogadro). Esta magnitud recibe el nombre de *constante de Boltzmann*. Ésta tiene un sentido físico más profundo que la constante R. En el § 97 mostraremos que k es un coeficiente de proporcionalidad entre la energía media del movimiento térmico de la molécula y la temperatura absoluta. Poniendo en (86.5) los valores numéricos de R y N_A, obtenemos

$$k = \frac{8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

[1]) Para los cálculos prácticos, es cómodo en ocasiones hacer uso del valor de R en litros-atmósferas por mol-kelvin:

$$R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22{,}4 \text{ l/mol}}{273 \text{ K}} = 0{,}0820 \text{ l} \cdot \text{atm/(mol} \cdot \text{K)}.$$

Multipliquemos y dividamos el segundo miembro de la ecuación (86.4) por N_A. Entonces dicha ecuación puede ser escrita

$$pV = \nu N_A kT.$$

El producto νN_A es igual al número de moléculas N que contiene la masa m del gas. Tomando esto en consideración, obtenemos

$$pV = NkT. \tag{86.6}$$

Ahora dividamos los dos miembros de (86.6) por V. Prestando atención a que N/V es el número de moléculas por unidad de volumen n, llegamos a la fórmula

$$p = nkT. \tag{86.7}$$

Las ecuaciones (86.4), (86.6) y (86.7) son diversas formas de anotación de la ecuación de estado de un gas ideal.

La razón entre la masa del gas y el volumen que éste ocupa proporciona la densidad del gas: $\rho = m/V$. De acuerdo con (86.4) la densidad del gas ideal

$$\rho = \frac{Mp}{RT}. \tag{86.8}$$

De este modo, la densidad de un gas ideal es razón directa de la presión e inversa de la temperatura.

La sencilla ligazón entre la temperatura y los demás parámetros del gas ideal hace atractiva su utilización como sustancia termométrica. Asegurando la constancia del volumen y haciendo uso de la presión del gas como criterio de temperatura, podemos crear un termómetro en el que la escala de temperaturas sea por completo lineal. En adelante, dicha escala recibirá el nombre de *escala ideal gaseosa de temperaturas*.

En correspondencia con un acuerdo internacional, en la práctica se toma el hidrógeno como cuerpo termométrico. La escala establecida respecto del hidrógeno, haciendo uso de la ecuación (86.4), denomínase *escala empírica de temperaturas*.

§ 87. Energía interna y capacidad calorífica de un gas ideal

La experiencia muestra que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura:

$$U = BT. \tag{87.1}$$

Aquí, B es un coeficiente de proporcionalidad que en un extenso intervalo de temperaturas queda constante.

La falta de dependencia entre la energía interna y el volumen que ocupa el gas, indica que las moléculas de un gas ideal, la parte

aplastante de tiempo, no ejercen entre sí interacción. En efecto, si hubiera interacción entre las moléculas, en la energía interna una de las componentes sería la energía potencial de interacción, que dependería de la distancia media entre las moléculas, es decir, de $V^{1/3}$.

Señalemos, que la interacción debe tener lugar durante los choques, o sea, cuando las moléculas se aproximan a distancias muy pequeñas. Pero en un gas enrarecido semejantes choques se producen con muy poca frecuencia. La parte más grande del tiempo, las moléculas se encuentran en movimiento libre.

Recibe el nombre de capacidad calorífica de cierto cuerpo una magnitud igual a la cantidad de calor que hay que comunicarle para aumentar su temperatura en un kelvin. Si al comunicar al cuerpo una cantidad de calor $d'Q$, su temperatura aumenta en dT, por definición, la capacidad calorífica será igual a

$$C_{\text{cuerpo}} = \frac{d'Q}{dT}. \qquad (87.2)$$

Esta magnitud se mide en julios por kelvin (J/K).

La capacidad calorífica de un mol de la sustancia, llamada *capacidad calorífica molar*, será designada con la letra mayúscula C. Se mide en julios por mol-kelvin (J/(mol·K)).

La capacidad calorífica de la unidad de masa de la sustancia denomínase *calor específico*, que designaremos con la letra minúscula c. Esta magnitud se mide en julios por kilogramo-kelvin (J/(kg·K)).

Entre la capacidad calorífica molar y el calor específico de una misma sustancia existe la siguiente correlación

$$c = C/M \qquad (87.3)$$

(M es la masa molar).

La magnitud de la capacidad calorífica depende de las condiciones con las que transcurrió el calentamiento del cuerpo. La capacidad calorífica ofrece el mayor interés para aquellos casos, cuando el calentamiento se realiza con volumen o presión constantes. En el primer caso dicha magnitud recibe el nombre de capacidad calorífica a volumen constante (se designa con C_V), en el segundo, capacidad calorífica a presión constante (se designa con C_p).

Si el calentamiento transcurre a volumen constante, el cuerpo no ejerce trabajo sobre los cuerpos exteriores y, por lo tanto, de acuerdo con el primer principio de termodinámica (véase (83.4)), todo el calor se dirige al incremento de la energía interna del cuerpo:

$$d'Q_V = dU. \qquad (87.4)$$

De (87.4) se desprende que la capacidad calorífica de cualquier cuerpo con volumen constante es igual a

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V. \tag{87.5}$$

Semejante anotación remarca la circunstancia de que al derivar la expresión para U por T se debe considerar que el volumen es constante. Para un gas ideal U sólo depende de T, de forma que la expresión (87.5) puede tener el aspecto

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}$$

(para obtener la capacidad calorífica molar hay que emplear la energía interna de un mol de gas).

La expresión (87.1) para un mol de gas tiene la forma $U_m = B_m T$. Derivando esta fórmula por T, tendremos que $C_V = B_m$. De este modo, la expresión para la energía interna de un mol de gas ideal es

$$U_m = C_V T, \tag{87.6}$$

donde C_V es la capacidad calorífica de un gas a volumen constante.

La energía interna de una masa de gas m tomada al azar, será igual a la energía interna de un mol multiplicada por el número de moles de gas que contiene la masa m:

$$U = \frac{m}{M} C_V T. \tag{87.7}$$

Si el calentamiento transcurre a presión constante, el gas se dilatará realizando, por lo tanto, trabajo positivo sobre los cuerpos exteriores. Así, pues, en este caso, para elevar la temperatura del gas en un kelvin hará falta más calor que al calentarlo a volumen constante, es decir, parte del calor se consumirá para que el gas ejecute trabajo. Por esta razón, a presión constante la capacidad calorífica deberá ser mayor que a volumen constante.

Escribamos la ecuación (84.4) del primer principio de termodinámica para un mol de gas:

$$d'Q_p = dU_m + p\, dV_m. \tag{87.8}$$

El índice p en $d'Q$ significa en esta expresión que al gas se le comunica el calor cuando p es constante. Dividiendo (87.8) por dT se obtiene la expresión para la capacidad calorífica molar de un gas a presión constante:

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + p\left(\frac{\partial V_m}{\partial T}\right)_p \tag{87.9}$$

El sumando dU_m/dT, como ya sabemos, es igual a la capacidad calorífica molar a volumen constante. Por esta razón, la fórmula (87.9)

puede escribirse de la forma siguiente:

$$C_p = C_V + p\left(\frac{\partial V_m}{\partial T}\right)_p. \qquad (87.10)$$

La magnitud $(\partial V_m/\partial T)_p$ es el incremento del volumen de un mol de gas al aumentar la temperatura en un kelvin, que se produce cuando p es constante. De acuerdo con la ecuación de estado (86.3) $V_m = RT/p$. Derivando esta expresión por T, suponiendo que $p = \text{const}$, hallamos

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}.$$

Por fin, poniendo este resultado en (87.10), tenemos

$$C_p = C_V + R. \qquad (87.11)$$

Así, pues, el trabajo que realiza un mol de gas ideal al aumentar a presión constante la temperatura de un kelvin, resulta ser igual a la constante de los gases R. Cabe indicar, que la correlación (87.11) se ha hallado haciendo uso de la ecuación de estado de un gas ideal y que, por lo tanto, sólo es justa para un gas de dicho tipo.

La magnitud

$$\gamma = C_p/C_V \qquad (87.12)$$

es una magnitud característica para cada gas. Para todos los gases monoatómicos esta razón es próxima a 5/3, para los biatómicos, a 7/5, para los triatómicos, a 4/3, etc. Más adelante (véase el § 97) veremos que el valor de γ, se determina por el número y el carácter de los grados de libertad de la molécula.

En correspondencia con (87.11)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V},$$

de donde

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \qquad (87.13)$$

Poniendo este valor de C_V en la fórmula (87.7), obtenemos la expresión siguiente:

$$U = \frac{m}{M}\frac{RT}{\gamma - 1}. \qquad (87.14)$$

La comparación con (86.4) nos da una expresión más para la energía interna de un gas ideal:

$$U = \frac{1}{\gamma - 1}\, pV. \qquad (87.15)$$

§ 88. Ecuación de la adiabática de un gas ideal

En el transcurso de cualquier transformación, el gas, además de supeditarse a la ecuación de estado, se somete a una condición adicional que se determina por el carácter del proceso. Por ejemplo, durante la transformación llamada *isobárica* se cumple la condición $p =$ const. Durante la transformación *isócora* se realiza la condición $V =$ const. Por fin, durante la *transformación isotérmica*, se cumple la condición $T =$ const. Para un gas ideal, la condición $T =$ const es equivalente a la condición

$$pV = \text{const.} \tag{88.1}$$

La ecuación (88.1) recibe el nombre de ecuación de la isoterma de un gas ideal, mientras que la curva definida con esta ecuación es llamada *isoterma*.

Adiabática denomínase la transformación que transcurre sin intercambio de calor con el medio circundante. Hallemos la ecuación que liga los parámetros del gas ideal durante la transformación adiabática. Pongamos en la ecuación (84.4) del primer principio de termodinámica la expresión de dU para un gas ideal:

$$d'Q = \frac{m}{M} C_V \, dT + p \, dV.$$

Como para la transformación adiabática $d'Q = 0$, debe cumplirse la condición

$$\frac{m}{M} C_V \, dT + p \, dV = 0. \tag{88.2}$$

Ahora expresemos p por intermedio de V y T, lo que corresponde a la ecuación de estado de un gas ideal:

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V},$$

y pongamos esta expresión en (88.2). Como resultado, reduciendo el factor m/M diferente de cero, hallamos

$$C_V \, dT + RT \frac{dV}{V} = 0.$$

Transformemos la ecuación obtenida del siguiente modo:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Esta última correlación puede ser escrita así como

$$d\left(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V\right) = 0,$$

de donde sigue que durante la transformación adiabática

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const.} \tag{88.3}$$

De acuerdo con (87.13) la razón R/C_V puede ser sustituida por $\gamma - 1$, donde $\gamma = C_p/C_V$. Realizando en (88.3) semejante sustitución y potenciando la expresión obtenida, llegamos a la ecuación

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \tag{88.4}$$

La correlación obtenida es la ecuación de la adiabática de un gas ideal en las variables T y V. De ésta, se puede pasar a la ecuación en las variables p y V, sustituyendo en ella T por p y V en correspondencia con la ecuación de estado de un gas ideal:

$$T = \frac{M}{m} \frac{pV}{R}.$$

Poniendo esta expresión en (88.4) y teniendo en cuenta que m, M y R son constantes, hallamos

$$pV^{\gamma} = \text{const}\ ^{1)}. \tag{88.5}$$

La correlación (88.5) es la ecuación de la adiabática de un gas ideal en las variables p y V. También recibe el nombre de *ecuación de Poisson*.

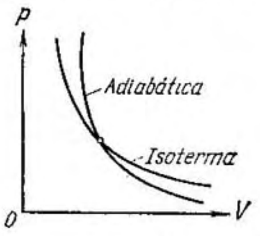


Fig. 88.1

De la comparación de la ecuación de la adiabática (88.5) y la de la isoterma (88.1) se desprende que la adiabática es más abrupta que la isoterma. Calculemos dp/dV para una isoterma y adiabática en un mismo punto (p, V) (fig. 88.1). La derivación de la ecuación (88.1) nos ofrece

$$p\,dV + V\,dp = 0,$$

de donde obtenemos para la isoterma

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \tag{88.6}$$

Después de derivar (88.5) resulta que $p\gamma V^{\gamma-1}\,dV + V^{\gamma}\,dp = 0$, de donde

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

De aquí vemos que la tangente del ángulo de inclinación de la adiabática es γ veces mayor que para la isoterma.

En todos los razonamientos hemos supuesto que el estado del gas, en cada momento de tiempo, se caracteriza por determinados

[1]) El valor de la constante en las fórmulas (88.3) — (88.5) es evidentemente distinto.

valores de los parámetros p y T, es decir, que la transformación adiabática que estudiamos es reversible. Como ya sabemos, sólo puede ser reversible una transformación que transcurre con gran lentitud. Al mismo tiempo, como en la naturaleza no hay cuerpos que no transmitan en absoluto el calor, la cantidad de calor que el sistema cede al medio ambiente, será tanto menor, cuanto menos dure la transformación. Así, pues, sólo las transformaciones que transcurren con gran rapidez pueden ser próximas a las adiabáticas. Un ejemplo de semejante transformación puede ser la compresión y expansión que se producen en cada punto de un gas, cuando por éste se propaga una onda sonora. A pesar de que en los límites de un gran volumen, el estado del gas, en este caso, no es de ningún modo de equilibrio (p y T en diferentes puntos son diferentes), la conducta del gas en los márgenes de un volumen suficientemente pequeño se describe de modo satisfactorio por medio de la ecuación de la adiabática (88.5).

§ 89. Transformaciones politrópicas

Reciben el nombre de *politrópicas* aquellas transformaciones durante las que la *capacidad calorífica del cuerpo queda constante.* Así, pues, la condición que se cumple durante la transformación politrópica consiste en que

$$C = \text{const.} \tag{89.1}$$

Hallemos la *ecuación de la politrópica* para un gas ideal. Escribamos la ecuación del primer principio de termodinámica (84.4) para un mol de gas representando $d'Q$ como $C\,dT$, mientras que dU como $C_V\,dT$:

$$C\,dT = C_V\,dT + p\,dV. \tag{89.2}$$

En la ecuación obtenida entran los tres parámetros: p, V y T. Uno de ellos puede ser excluido mediante la ecuación de estado. Para obtener de inmediato la ecuación de la politrópica en las variables p y V, excluyamos T. Con este fin, derivemos la correlación $pV = RT$:

$$p\,dV + V\,dp = R\,dT. \tag{89.3}$$

Excluyendo de las ecuaciones (89.2) y (89.3) dT y realizando la reducción de términos semejantes, tendremos

$$(C - C_V - R)\,p\,dV + (C - C_V)\,V\,dp = 0. \tag{89.4}$$

Sustituyendo $C_V + R$ por C_p (véase (87.11)) y dividiendo (89.4) por pV, llegamos a la ecuación diferencial

$$(C - C_p)\frac{dV}{V} + (C - C_V)\frac{dp}{p} = 0. \tag{89.5}$$

Las magnitudes C, C_p, C_V son constantes. Por esto, la integración de la ecuación (89.5) conduce a la correlación

$$(C - C_p) \ln V + (C - C_V) \ln p = \text{const.} \qquad (89.6)$$

Dividiendo esta correlación por $C - C_V$ (lo que es posible si $C \neq C_V$) y potenciando, resulta que

$$pV^n = \text{const}, \qquad (89.7)$$

donde

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}. \qquad (89.8)$$

La ecuación (89.7) es la buscada ecuación de la politrópica de un gas ideal para el caso cuando $C \neq C_V$. La magnitud (89.8) denomínase *exponente de la politrópica*.

Para establecer el carácter de la transformación politrópica con $C = C_V$, apelemos a la ecuación (89.6). Con $C = C_V$ esta ecuación toma la forma $(C - C_p) \ln V = \text{const}$, de donde sigue que V queda constante en el transcurso de la transformación. De este modo, la transformación politrópica con $C = C_V$ es isócora. Este hecho podía haber sido previsto de antemano, ya que $C_V = \text{const}$ es, ni más ni menos, que la capacidad calorífica a volumen constante, es decir, durante la transformación isócora. De acuerdo con (89.8) el exponente de la politrópica durante la transformación isócora es igual al infinito.

Las demás transformaciones consideradas en el parágrafo anterior, también se refieren a las transformaciones politrópicas. A la transformación isobárica corresponde $n = 0$ (véase (89.7)), a la isotérmica,

Tabla 89.1

Transformación	n
Isobárica	0
Isotérmica	1
Adiabática	γ
Isócora	∞

$n = 1$ y, por fin, a la adiabática, $n = \gamma$. Los valores del exponente de la politrópica n para las transformaciones enumeradas se aducen en la tabla 89.1.

Resolviendo la ecuación (89.8) respecto de C, obtenemos la fórmula para la capacidad calorífica de un gas ideal durante una transformación politrópica:

$$C = \frac{nC_V - C_p}{n - 1}. \qquad (89.9)$$

Poniendo en la expresión (89.9) $n = \gamma$, ésta se anula (al comprobar esta afirmación hay que tomar en consideración la fórmula (87.13)). Por lo tanto, durante una transformación adiabática, la capacidad calorífica de un gas ideal es cero, con la particularidad de que esta afirmación es justa para todos los cuerpos. Esto se desprende de que durante la transformación adiabática $d'Q = 0$, mientras que dT es diferente de cero.

Si ponemos $n = 1$, la expresión (89.9) se reduce al infinito. Así, pues, con la transformación isotérmica la capacidad calorífica es infinitamente grande. Esto se explica porque con dicha transformación $dT = 0$, en tanto que $d'Q$ se distingue de cero.

§ 90. Trabajo que realiza un gas ideal durante diversas transformaciones

El trabajo que cierto cuerpo ejerce sobre los cuerpos exteriores al pasar del estado *1* al estado *2*, es igual a

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV \tag{90.1}$$

(véase (84.3)). Para realizar la integración hay que expresar p por V. Con este fin, hagamos uso de la ligazón entre p y V durante diferentes transformaciones.

La ecuación de la politrópica de un gas ideal (89.7) puede ser escrita del modo siguiente:

$$pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n,$$

donde, p_1, V_1 y p_2, V_2 son los valores de la presión y el volumen del gas, correspondientemente, en los estados primero (inicial) y segundo (final), p y V, la presión y el volumen en cualquier estado intermedio. De acuerdo con esto expresemos la correlación de la presión del gas por intermedio de su volumen y de los valores de los parámetros en el estado inicial[1]):

$$p = p_1V_1^n/V^n.$$

Poniendo esta expresión en (90.1), obtenemos

$$A_{12} = p_1V^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \tag{90.2}$$

[1]) Del mismo modo, la presión se puede expresar mediante los parámetros del estado final.

Primero, consideremos el caso cuando $n \neq 1$; entonces la integral en (90.2)

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}}\right).$$

Sustituyendo este valor de la integral en (90.2) y después de ejecutar sencillas transformaciones, resulta que:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (90.3)$$

La expresión obtenida puede ser transformada, haciendo uso de que fuera cual fuese la transformación que sufre el gas ideal, sus parámetros están ligados con la ecuación de estado. En particular, esto es también justo para el estado inicial:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1. \qquad (90.4)$$

Tomando en consideración (90.4), escribamos la expresión (90.3) en la forma

$$A_{12} = \frac{m}{M}\,\frac{RT_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (90.5)$$

Las expresiones (90.3) y (90.5) nos proporcionan el trabajo que realiza el gas ideal con cualquier transformación politrópica, salvo la isotérmica (que corresponde a $n = 1$)[1]. En particular, con la transformación adiabática

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \qquad (90.6)$$

o bien

$$A_{12} = \frac{m}{M}\,\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (90.7)$$

Para calcular el trabajo de un gas ideal durante la transformación isotérmica, sustituyamos la presión en la fórmula (90.1) por su expresión mediante otras magnitudes, de acuerdo con la ecuación de estado. Como resultado obtenemos (como T es constante puede ser sacada tras el signo de la integral):

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Así, pues, el trabajo que durante una transformación isotérmica realiza un gas ideal

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (90.8)$$

[1] Con $n = 1$ las expresiones (90.3) y (90.5) se hacen indeterminadas.

Durante una transformación isobárica, el trabajo ejercido por todo cuerpo, incluido también un gas ideal, como se desprende de (90.1), es igual a

$$A_{12} = p\,(V_2 - V_1). \tag{90.9}$$

Este mismo resultado se obtiene si en (90.3) n se hace igual a cero. Para finalizar, cabe señalar que con la transformación isócora el trabajo es igual a cero, lo que es justo para todos los cuerpos.

§ 91. Gas de Van der Waals

En el § 86 fue indicado que la conducta de los gases reales se describe correctamente con la ecuación

$$pV_m = RT \tag{91.1}$$

sólo con pequeñas densidades, es decir, a presiones no muy grandes y temperaturas suficientemente altas (véase (86.8)). Con el aumento de la presión y disminución de la temperatura, se observan considerables divergencias de la indicada ecuación. En la segunda columna de la tabla 91.1 se aducen los valores del producto pV para una masa

Tabla 91.1

p, atm	pV, atm·l	$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$, atm·l
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

de nitrógeno que, a condiciones normales, ocupa un volumen igual a un litro. Los valores indicados se dan para diferentes presiones y una misma temperatura de 0 °C.

En correspondencia con la ecuación (91.1), el producto pV debe quedar constante a temperatura invariable. En efecto, como vemos en la tabla, a presiones de un orden de 200 atm se observan considerables divergencias que, creciendo continuamente al aumentar la presión, alcanzan a 1000 atm más del 100%. Estas divergencias no parecen asombrosas, ya que al aumentar la densidad comienzan a desempeñar creciente papel el volumen de las moléculas y la interacción entre ellas.

Con el fin de describir la conducta de los gases en un extenso intervalo de densidades, fue propuesta gran cantidad de diferentes ecuaciones. Entre ellas, la más sencilla y que al mismo tiempo proporciona buenos resultados, resultó ser la ecuación de Van der

Waals, que se obtuvo introduciendo correcciones en la ecuación (91.1) y que tiene el aspecto siguiente:

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}\right)(V_{\mathrm{m}}-b)=RT, \qquad (91.2)$$

donde p es la presión que se ejerce sobre el gas del exterior (igual a la presión del gas contra las paredes del recipiente), a y b, las constantes de Van der Waals, que para diferentes gases tienen distintos valores, que se determinan por vía experimental. Si la presión está expresada en pascales y el volumen en metros cúbicos por mol, la constante a se mide en $\mathrm{Pa\cdot m^6/mol^2}$, la constante b, en $\mathrm{m^3/mol}$. A veces, la constante a se expresa en $\mathrm{atm\cdot l^2/mol^2}$, la constante b, en l/mol.

A causa de la atracción de las moléculas entre sí, parece como si el gas se comprimiese a una presión mayor que p, que es la que ejercen sobre el gas las paredes que lo contienen. La corrección a/V_{m}^2 caracteriza aquella adición a la presión externa, condicionada por la atracción de las moléculas entre sí. Una notable acción de las moléculas, unas sobre otras, se realiza en los límites de pequeñas distancias, llamadas *radio de acción molecular*. La fuerza de atracción mutua de dos volúmenes elementales con dimensiones del orden de dicho radio, es proporcional tanto al número de moléculas que contiene uno de dichos volúmenes, como al número de moléculas contenidas en el otro volumen. A su vez, cada uno de estos números es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen, es decir, es razón inversa al volumen de gas. Con estas consideraciones puede ser explicado el hecho de que la corrección a la presión en (91.2) tiene el aspecto a/V_{m}^2.

A causa de que las moléculas tienen volumen finito, el espacio accesible para el movimiento de éstas es menor que el volumen del recipiente V_{m}. La corrección b en (91.2) caracteriza aquella parte del volumen que es accesible para el movimiento de las moléculas. Es igual a varios volúmenes sumarios de las moléculas que contiene un mol de gas.

La ecuación (91.2) está escrita para un mol de gas. Para pasar a la ecuación de una masa m arbitraria, hay que tomar en consideración que ν moles de gas, a iguales condiciones, ocupan un volumen ν veces mayor: $V=\nu V_{\mathrm{m}}$. Sustituyendo en (91.2) V_{m} por V/ν, obtenemos

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right)=RT.$$

Multiplicando esta ecuación por ν e introduciendo las designaciones

$$a'=\nu^2 a \text{ y } b'=\nu b, \qquad (91.3)$$

llegamos a la ecuación de Van der Waals para ν moles

$$\left(p+\frac{a'}{V^2}\right)(V-b')=\nu RT. \qquad (91.4)$$

Con las letras a' y b' se designan las constantes de Van der Waals para ν moles. Su ligazón con a y b se da con ayuda de las correlaciones (91.3). La constante a' se mide en Pa·m^6, la constante b' tiene la dimensión del volumen.

Hasta qué punto la ecuación de Van der Waals transmite mejor que la (91.1) la conducta de los gases, se puede juzgar por los datos de la tabla 91.1. En la tercera columna de la tabla se dan los valores de la magnitud $\left(p+\frac{a'}{V^2}\right)(V-b')$[1] para la misma masa de nitrógeno, para la que en la segunda columna se dan los valores de pV. Como vemos en la tabla, la ecuación de Van der Waals concuerda mucho mejor que la ecuación (91.1) con los experimentos.

En correspondencia con el hecho de que al disminuir la densidad todos los gases reales se aproximan por sus propiedades a un gas ideal, la ecuación de Van der Waals en el límite, cuando el volumen tiende al infinito, se convierto en la ecuación (91.1). Podemos cerciorarnos de esto sacando p y V del paréntesis en la ecuación (91.4):

$$pV\left(1+\frac{1}{pV}\frac{a'}{V}\right)\left(1-\frac{b'}{V}\right)=\nu RT$$

y tomando en consideración que el producto pV es constante aproximadamente.

Los gases reales se subordinan a la ecuación de Van der Waals sólo de forma aproximada. Un gas imaginario que por completo se supedita a la ecuación (91.2) recibe el nombre de gas de Van der Walls.

La energía interna del gas de Van der Waals debe contener, además de la energía cinética de las moléculas, la energía de interacción entre éstas. Con el fin de hallar la energía interna de un gas de Van der Waals, hagamos uso del hecho que el trabajo que se realiza durante la dilatación de un gas contra las fuerzas de la atracción recíproca de las moléculas, es igual al incremento de la energía de interacción: $d'A = dE_p$. Las fuerzas de atracción entre las moléculas se tuvieron en cuenta en la ecuación (91.2) con ayuda de una adición a la presión igual a a/V_m^2. Correspondientemente, el trabajo contra las fuerzas de interacción entre las moléculas puede ser representado como $(a/V_m^2)\,dV_m$ (de modo semejante, el trabajo que realiza el gas contra las fuerzas exteriores se determina con la expresión $p\,dV$). Así, pues,

$$dE_p=\frac{a}{V_m^2}\,dV_m.$$

[1] De acuerdo con (91.4) esta magnitud debe ser constante.

La integración de esta expresión nos da

$$E_p = -\frac{a}{V_m} + \text{const.} \qquad (91.5)$$

La energía interna de un gas de Van der Waals depende tanto del volumen, como de la temperatura. Por lo tanto, la expresión para U_m tiene la forma

$$U_m = f(T) - \frac{a}{V_m}$$

(la constante de la expresión (91.5) ha sido incluida en $f(T)$). En el límite, cuando el volumen tiende al infinito, esta expresión debe convertirse en la (87.6) para la energía interna de un gas ideal. Por consiguiente, $f(T) = C_V T$.

Así, pues, la energía interna de un mol de gas de Van der Waals, se determina por la fórmula

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}. \qquad (91.6)$$

La energía interna de ν moles será ν veces mayor:

$$U = \nu C_V T - \frac{a'}{V} \qquad (91.7)$$

(hemos tenido en cuenta que $\nu^2 a = a'$ y $\nu V_m = V$). Con las fórmulas (91.6) y (91.7) se pueden hallar los valores aproximados de la energía interna de los gases reales.

§ 92. Fórmula barométrica

La presión atmosférica a cierta altura h está condicionada por el peso de las capas de gas que se encuentran más arriba. Designemos con la letra p la presión a una altura h. Entonces, la presión a la altura $h + dh$ será $p + dp$, con la particularidad de que si dh es mayor que cero, dp será menor que cero, ya que el peso de las capas superiores de la atmosféra, y, por lo tanto la presión, disminuyen. La diferencia de presiones p y $p + dp$, es igual al peso del gas contenido en el volumen de un cilindro con área de la base igual a la unidad y altura dh (fig. 92.1):

$$p - (p + dp) = \rho g\, dh,$$

donde ρ es la densidad del gas a la altura h. De aquí

$$dp = -\rho g\, dh. \qquad (92.1)$$

En el § 86 se señaló que a condiciones próximas a la normales, el aire poco se diferencia por su conducta de un gas ideal. Por esta razón, la densidad del aire se puede calcular por la fórmula (86.8).

Poniendo esta expresión en (92.1), obtenemos

$$dp = -\frac{Mpg}{RT}\,dh. \tag{92.2}$$

La magnitud M, que entra en esta fórmula, es numéricamente igual a la masa molecular media del aire determinada tomando en consideración el contenido en por ciento de nitrógeno, oxígeno y otros gases.

De (92.2) se desprende que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\,dh. \tag{92.3}$$

La temperatura T es cierta función de h. Si la forma de esta función es conocida, la ecuación (92.3) puede ser integrada y hallada la de-

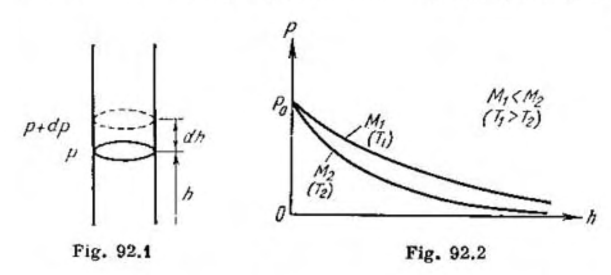


Fig. 92.1

Fig. 92.2

pendencia entre p y h. En el caso, cuando la temperatura es constante, es decir, para la atmósfera isotérmica, la integración de la ecuación (92.3) conduce a la correlación

$$\ln p = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C,$$

donde C es una constante (aquí es más cómodo designar la constante de integración por $\ln C$). La potenciación de la expresión obtenida nos permite hallar que

$$p = C \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Poniendo aquí $h = 0$, obtenemos que $C = p_0$, donde p_0 es la presión a la altura $h = 0$.

De este modo, con la suposición que hemos hecho acerca de la constancia de la temperatura, la dependencia entre la presión y la

altura se expresa con la fórmula

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \qquad (92.4)$$

Esta fórmula se denomina *barométrica*. De ella se deduce que la presión decrece con la altura con tanta mayor rapidez, cuanto más pesado sea el gas (cuanto mayor sea M) y cuanto más baja sea la temperatura. En la fig. 92.2 están representadas dos curvas del tipo (92.4) que pueden ser interpretadas como que corresponden a diferentes M (con iguales T) o bien que concuerdan con diversas T (con iguales M).

CAPITULO XI

FÍSICA ESTADÍSTICA

§ 93. Ciertos datos sobre la teoría de las probabilidades

Supongamos que cierto sistema macroscópico[1]) se encuentra en el estado prefijado. Sea que cierta magnitud x, característica para nuestro sistema, puede tener valores discretos:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_s.$$

Realicemos en este sistema una gran cantidad N de mediciones de la magnitud x, reduciendo el sistema antes de cada medición a un mismo estado inicial. En lugar de efectuar en un mismo sistema mediciones reiteradas, es posible tomar N sistemas iguales, que se hallen en un mismo estado y realizar una sola medición de la magnitud x en todos estos sistemas. Semejante conjunto de iguales sistemas en el mismo estado, recibe el nombre de *conjunto estadístico*.

Supongamos que N_1 mediciones dieron el resultado x_1, N_2 mediciones, el resultado x_2, . . ., N_i mediciones, el resultado x_i, etc. ($\sum N_i = N$ es el número de sistemas en el conjunto). La magnitud N_i/N denomínase *frecuencia relativa* de aparición del resultado x_i, mientras que el límite de esta magnitud, obtenido al tender N al infinito, es decir,

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}, \tag{93.1}$$

se denomina *probabilidad de aparición del resultado* x_i. Para simplificar las fórmulas, en adelante escribiremos la expresión para la probabilidad en la forma N_i/N, sobreentendiendo que se realiza el paso al límite con $N\to\infty$.

Como $\sum N_i = N$,

$$\sum P_i = \sum \frac{N_i}{N} = 1, \tag{93.2}$$

o sea, la suma de las probabilidades de todos los posibles resultados de las mediciones es igual a uno.

La probabilidad de obtener el resultado x_i o x_k

$$P_{i\ o\ k} = \frac{N_i + N_k}{N} = \frac{N_i}{N} + \frac{N_k}{N} = P_i + P_k.$$

De este modo, hemos llegado al *teorema de la suma de las probabilidades*, que afirma que

$$P_{i\ o\ k} = P_i + P_k. \tag{93.3}$$

[1]) Llamamos macroscópico a un sistema formado por un número enorme de partículas (moléculas, átomos, iones, electrones).

Sea que un sistema está caracterizado por dos magnitudes x e y, con la particularidad de que ambas magnitudes pueden tomar valores discretos, siendo la probabilidad de su aparición

$$P(x_i) = \frac{N(x_i)}{N} \text{ y } P(y_k) = \frac{N(y_k)}{N}.$$

Hallemos la probabilidad $P(x_i, y_k)$ de que durante cierta medición de x obtendremos el resultado x_i, mientras que para y, el resultado y_k. El resultado x_i será obtenido con un número de mediciones igual a $N(x_i) = P(x_i) N$. Si el valor de la magnitud y no depende del valor de la magnitud x, el resultado y_k se obtendrá al mismo tiempo que x_i en una cantidad de casos

$$N(x_i, y_k) = N(x_i) \cdot P(y_k) = (P(x_i) N) P(y_k)$$

($N(x_i)$ desempeña para y el papel de N). La probabilidad buscada será igual a

$$P(x_i, y_k) = \frac{N(x_i, y_k)}{N} = P(x_i) P(y_k).$$

Hemos llegado al *teorema de multiplicación de las probabilidades*, de acuerdo con el cual *la probabilidad de la aparición simultánea de acontecimientos estadísticamente independientes es igual al producto de las probabilidades de dichos acontecimientos*:

$$P(x_i, y_k) = P(x_i) P(y_k). \tag{93.4}$$

Conociendo la probabilidad de aparición de diversos resultados de las mediciones, puede ser hallado el valor medio de todos ellos. De la definición de la media

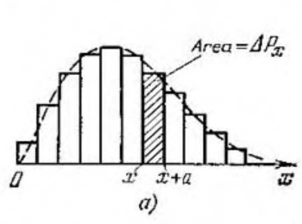
$$\langle x \rangle = \frac{\sum N_i x_i}{N} = \sum P_i x_i. \tag{93.5}$$

Difundamos los resultados hallados al caso, cuando la magnitud x, que caracteriza el sistema, puede tomar una serie ininterrumpida de valores de 0 a ∞. En este caso, se dice que la magnitud x tiene un espectro continuo (o ininterrumpido) de valores (en el caso anterior el espectro de valores era discreto).

Tomemos una magnitud a muy pequeña (digamos, $a = 10^{-6}$) y hallemos el número de mediciones ΔN_0 con las que $0 < x < a$, ΔN_1, con las que $a < x < 2a$, . . ., ΔN_x con las que el resultado de las mediciones se encuentra en el intervalo de x a $x + a$, etc. La probabililidad de que el resultado de las mediciones se halle en el intervalo desde cero hasta a, es igual a $\Delta P_0 = \Delta N_0/N$, en el intervalo desde a hasta $2a$ $\Delta P_1 = \Delta N_1/N$, . . ., en el intervalo desde x hasta $(x + a)$, $\Delta P_x = \Delta N_x/N$. Tracemos el eje x y construyamos hacia arriba de él, bandas de anchura a y altura $\Delta P_x/a$ (fig. 93.1, *a*). El diagrama escalonado obtenido recibe el nombre de *histograma*.

El área de la banda, cuyo extremo izquierdo tiene la coordenada x, es igual a ΔP_x, mientras que el área de todo histograma, a la unidad (véase (93.2)).

El histograma caracteriza de modo evidente la probabilidad de obtención de los resultados de las mediciones contenidas en diversos intervalos de anchura a. Mientras menor es la anchura del intervalo a, con mayor detalle será caracterizada la distribución de las probabilidades de los valores de la magnitud x. En el límite, con $a \to 0$, la línea escalonada que limita el histograma, se convierte



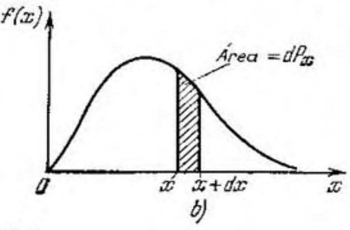


Fig. 93.1

en una curva suave (fig. 93.1, *b*). La función $f(x)$ que determina de forma analítica esta curva, recibe el nombre de *función de distribución de las probabilidades.*

En correspondencia con el procedimiento de construcción de la curva de distribución, el área de una columna de anchura dx (véase la fig. 93.1, *b*) es igual a la probabilidad de que el resultado de la medición se encuentre en los límites desde x hasta $x + dx$. Designando esta probabilidad por dP_x, podemos escribir que

$$dP_x = f(x)\,dx. \tag{93.6}$$

El índice «x» en dP indica que tenemos en cuenta la probabilidad para un intervalo, cuyo extremo izquierdo se halla en un punto con coordenada x. El área limitada con la curva de distribución, como la del histograma, es igual a uno. Esto significa que

$$\int f(x)\,dx = \int dP_x = 1. \tag{93.7}$$

La integración se realiza por todo el intervalo de los posibles valores de la magnitud x. La fórmula (93.7) es análoga a (93.2).

Conociendo la función de distribución $f(x)$ podemos hallar el valor medio de los resultados de las mediciones de la magnitud x. En $dN_x = N\,dP_x$ casos se obtiene un resultado igual a x. La suma de tales resultados se determina con la expresión $x\,dN_x = xN\,dP_x$. La suma de todos los posibles resultados es igual a $\int x\,dN_x =$

$= \int xN\,dP_x$. Dividiendo esta suma por el número de mediciones N, obtenemos el valor medio de la magnitud x:

$$\langle x\rangle = \int x\,dP_x. \qquad (93.8)$$

Esta fórmula es análoga a (93.5).

Poniendo en (93.8) la expresión (93.6) para dP_x llegamos a la fórmula

$$\langle x\rangle = \int xf(x)\,dx. \qquad (93.9)$$

Razonamientos análogos nos conducen a que el valor medio de cierta función $\varphi(x)$ puede ser calculado con la fórmula

$$\langle\varphi(x)\rangle = \int \varphi(x)\,f(x)\,dx. \qquad (93.10)$$

Por ejemplo,

$$\langle x^2\rangle = \int x^2 f(x)\,dx. \qquad (93.11)$$

§ 94. Carácter del movimiento térmico de las moléculas

Si un gas está en equilibrio, sus moléculas se mueven en absoluto desorden, de manera caótica. Todas las direcciones de movimiento son equiprobables, a ninguna de ellas se le puede dar preferencia con relación a las demás direcciones. Por su magnitud, las velocidades de las moléculas pueden ser las más diferentes. Después de cada choque con otras moléculas, la magnitud de la velocidad de la molécula dada, hablando en general, debe variar, con la particularidad de que con igual probabilidad puede tanto crecer, como disminuir.

La variación de las velocidades de las moléculas durante los choques transcurre de forma casual. Puede ocurrir, que cierta molécula en una gran serie de choques sucesivos, recibirá energía por parte de sus parejas durante los choques, por lo que su energía superará considerablemente el valor medio $\langle\varepsilon\rangle$. No obstante, si incluso nos imaginamos el caso completamente fantástico, durante el que todas las moléculas del gas se paran, transmitiendo su energía a una sola molécula, también entonces la energía de ésta y, por lo tanto, su velocidad será finita. Así que la velocidad de las moléculas de gas no pueden, por regla, tener valores a partir de cierta $v_{\text{máx}}$ y hasta ∞. Tomando en consideración que son poco probables las transformaciones, que podrían conducir a la concentración en una molécula de una parte notable de la energía sumaria de todas las moléculas, podemos afirmar que velocidades con valores mucho mayores en comparación con el valor medio de la velocidad pueden realizarse

muy rara vez. De este mismo modo, está prácticamente excluido, que como resultado de los choques la velocidad de la molécula se haga con exactitud igual a cero. Es decir, son poco probables velocidades muy pequeñas o muy grandes en comparación con el valor medio de ésta, con esto, la probabilidad del valor v dado tiende a cero, tanto con $v \to 0$, como con $v \to \infty$. De lo expuesto se desprende que las velocidades de las moléculas se agrupan, fundamentalmente, cerca del más probable de los valores.

El carácter caótico del movimiento de las moléculas puede hacerse muy evidente por medio del siguiento procedimiento. Rodeemos el punto O con una esfera de radio r tomado al azar (fig. 94.1). Cualquier punto A en esta esfera determina una dirección de O a A. Por lo tanto, las direcciones por las que las moléculas de gas se mueven en cierto momento de tiempo, pueden ser prefijadas con puntos en la esfera. La equiprobabilidad de todas las direcciones conduce a que los puntos, que representan las direcciones de movimiento de las moléculas, se distribuyan por la esfera con densidad constante, igual al número N de moléculas que consideramos, dividido por el área de la esfera $4\pi r^2$. Los choques provocan el cambio de las direcciones de movimiento de las moléculas, a causa de lo cual la posición de N puntos en la esfera cambia constantemente. Sin embargo, por ser el movimiento caótico, la densidad de los puntos en cualquier lugar de la esfera queda todo el tiempo invariable.

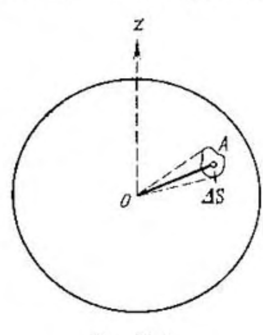


Fig. 94.1

El número de probables direcciones en el espacio es infinitamente grande. Pero en cada momento de tiempo se realiza un número finito de direcciones, igual a la cantidad de moléculas que consideramos. Por esta causa, no tiene sentido plantear el problema acerca del número de moléculas que tienen la dirección prefijada de movimiento (representada con un punto en la esfera). En efecto, como el número de las posibles direcciones es infinitamente grande, mientras que el de moléculas finito, la probabilidad de que por una dirección determinada de modo riguroso se desplaza por lo menos una molécula, es igual a cero. Es justo el planteamiento del problema acerca de la cantidad de moléculas que se mueven en las direcciones próximas a la dada (determinada por el punto A en la esfera). A semejantes direcciones corresponden todos los puntos del elemento de la superficie de la esfera ΔS, tomado en el entorno del punto A (véase la fig. 94.1). Como los puntos que representan las direcciones de movimiento de las moléculas están distribuidas por la esfera uniforme-

mente, en los límites de ΔS habrá una cantidad de puntos, igual a

$$\Delta N_A = N \frac{\Delta S}{4\pi r^2}. \tag{94.1}$$

El índice A en ΔN nos indica que se tienen en cuenta las moléculas, cuyas direcciones de movimiento son cercanas a la dirección determinada por el punto A.

La razón $\Delta S/r^2$ es el ángulo sólido $\Delta\Omega$ que se apoya en el área ΔS. Por esto, la fórmula (94.1) puede ser escrita del modo siguiente:

$$\Delta N_A = N \frac{\Delta\Omega}{4\pi}. \tag{94.2}$$

Aquí, $\Delta\Omega$ es el ángulo sólido en cuyos límites están contenidas las direcciones de movimiento de las moléculas que consideramos. Recordemos que 4π es el ángulo sólido completo (que corresponde a toda la superficie de la esfera).

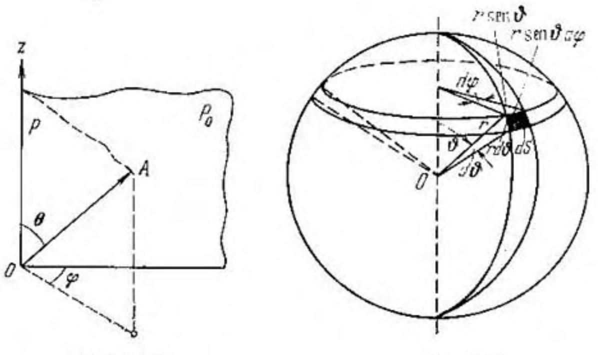


Fig. 94.2 Fig. 94.3

La dirección del segmento OA puede ser prefijada mediante el ángulo polar ϑ y el ángulo azimutal φ (fig. 94.2). Por lo tanto, las direcciones de movimiento de las moléculas de un gas pueden ser caracterizadas, prefijando para cada molécula los valores de los ángulos ϑ y φ, contados a partir de cierta dirección fijada Oz y trazada por el plano P_0 (en calidad de la indicada dirección podemos tomar, por ejemplo, la de la normal a una superficie del recipiente que contiene el gas).

Rodeemos el origen de coordenadas O con una esfera de radio r y hallemos el elemento dS de la esfera que corresponda a los incrementos $d\vartheta$ y $d\varphi$ de los ángulos ϑ y φ (fig. 94.3). El elemento que consideramos es un rectángulo con lados $r\,d\vartheta$ y $r \operatorname{sen} \vartheta\, d\varphi$. Así,

pues,

$$dS = r^2 \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \qquad (94.3)$$

La expresión obtenida nos proporciona el elemento de la superficie $r =$ const en un sistema esférico de coordenadas.

Dividiendo la expresión (94.3) por r^2, hallamos el elemento del ángulo sólido que corresponde a los intervalos de los ángulos desde ϑ hasta $\vartheta + d\vartheta$ y desde φ hasta $\varphi + d\varphi$:

$$d\Omega_{\vartheta, \varphi} \quad \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \qquad (94.4)$$

Dos esferas con radios r y $r + dr$, dos conos con ángulo de abertura ϑ y $\vartheta + d\vartheta$ y dos planos que forman con P_0 los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$, destacan en el espacio un paralelepípedo rectangular con lados $r \, d\vartheta$, $r \operatorname{sen} \vartheta \, d\varphi$ y dr (véase la fig. 94.3). El volumen de este paralelepípedo

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \qquad (94.5)$$

es un elemento de volumen en un sistema esférico de coordenadas (un volumen que corresponde al incremento de las coordenadas r, ϑ, φ en dr, $d\vartheta$ y $d\varphi$.

Pasando en (94.2) de las deltas a las diferenciales y poniendo la expresión (94.4) para $d\Omega$, llegamos a la fórmula:

$$dN_{\vartheta, \varphi} = N \frac{d\Omega_{\vartheta, \varphi}}{4\pi} = N \frac{\operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{4\pi}. \qquad (94.6)$$

Los índices ϑ y φ en dN indican que se tienen en cuenta las moléculas con direcciones de movimiento que corresponden a los intervalos de los ángulos desde ϑ hasta $\vartheta + d\vartheta$ y desde φ hasta $\varphi + d\varphi$.

§ 95. Número de choques de las moléculas contra la pared

Consideremos un gas que está en equilibrio, contenido en cierto recipiente. Tomemos un elemento de la superficie del recipiente ΔS y calculemos el número de choques de las moléculas contra este elemento en el transcurso del tiempo Δt.

De N moléculas que se encuentran en el recipiente, destaquemos aquellas dN_v que tienen una velocidad en los márgenes desde v hasta $v + dv$. Del número total de estas moléculas, tendrán direcciones de movimiento que se hallarán en el interior del ángulo sólido $d\Omega$ una cantidad de moléculas igual a

$$dN_{v, \vartheta, \varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\vartheta, \varphi}}{4\pi} \qquad (95.1)$$

(véase (94.6)). De las moléculas destacadas de este modo, durante el tiempo Δt al área ΔS llegarán y chocarán contra ella[1]) las moléculas contenidas en el cilindro oblicuo de base ΔS y altura $v \cos \vartheta \, \Delta t$ (fig. 95.1). La cantidad de estas moléculas

$$d\nu_{v,\vartheta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\vartheta,\varphi}}{4\pi} \frac{\Delta S v \cos \vartheta \Delta t}{V} \qquad (95.2)$$

(V es el volumen del recipiente). Con el fin de obtener el número total de choques de las moléculas contra el área ΔS, hay que sumar la expresión (95.2) por el ángulo sólido 2π (que corresponde a la variación de ϑ desde 0 hasta $\pi/2$ y la variación de φ desde 0 hasta 2π) y por la velocidad en los márgenes desde 0 hasta $v_{máx}$, donde $v_{máx}$ es la mayor velocidad que pueden tener las moléculas en las condiciones dadas (véase el parágrafo anterior).

Comencemos con la suma por las direcciones. Con este objeto, representemos $d\Omega$ en la forma sen $\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ (véase (94.4)) e integremos la expresión (95.2) respecto de ϑ en los límites desde 0 hasta $\pi/2$ y respecto de φ en los márgenes desde cero hasta 2π:

$$d\nu_v = \frac{dN_v v \Delta S \Delta t}{4\pi V} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

La integración por $d\varphi$ nos da 2π, la integral por $d\vartheta$ es igual a 1/2. Por consiguiente,

$$d\nu_v = \frac{dN_v v \Delta S \Delta t}{4V}. \qquad (95.3)$$

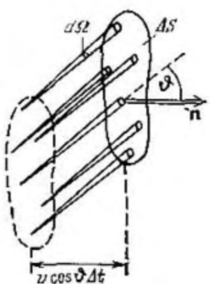


Fig. 95.1

Esta expresión nos proporciona la cantidad de choques contra el área ΔS, durante el tiempo Δt, de las moléculas que vuelan en las direcciones contenidas en los límites del ángulo sólido 2π y cuya velocidad alcanza magnitudes entre v y $v + dv$.

La suma por las velocidades nos da el número completo de choques de las moléculas contra el área ΔS durante el tiempo Δt:

$$\nu_{\Delta S, \Delta t} = \frac{\Delta S \Delta t}{4V} \int_0^{v_{máx}} v \, dN_v. \qquad (95.4)$$

[1]) Claro está, que se puede objetar que parte de estas moléculas chocan durante su camino con otras moléculas, por lo que cambian la dirección de su movimiento y no llegan al área ΔS. Sin embargo, los choques no alteran el carácter caótico del movimiento de las moléculas: el paso de cierta cantidad de moléculas del grupo que se mueve hacia la pared a los grupos que van en otras direcciones, está acompañado del paso simultáneo de ese mismo número

La expresión

$$\frac{1}{N}\int\limits_{0}^{v_{\text{máx}}} v\,dN_v$$

es el valor medio de la magnitud de la velocidad v. Sustituyendo en (95.4) la integral por el producto $N\langle v\rangle$, obtenemos

$$\nu_{\Delta S,\,\Delta t}=\frac{\Delta S\,\Delta t}{4V}N\langle v\rangle=\frac{1}{4}\Delta S\ \Delta t\ n\langle v\rangle. \qquad (95.5)$$

Aquí, $n = N/V$ es igual al número de moléculas de gas por unidad de volumen.

Por fin, dividiendo la expresión (95.5) por ΔS y Δt, hallamos el número de choques de las moléculas de gas contra la unidad de superficie de la pared por unidad de tiempo:

$$\nu=\frac{1}{4}n\langle v\rangle. \qquad (95.6)$$

El resultado obtenido quiere decir que el número de choques es proporcional a la cantidad de moléculas por unidad de volumen (la «concentración» de moléculas) y al valor medio de la magnitud de la velocidad de las moléculas[1]). Cabe señalar, que la magnitud (95.6) es la densidad del flujo de moléculas que «cae» sobre la pared.

Representémonos en el gas un área unitaria imaginaria. Si el gas está en equilibrio por dicha área, en ambas direcciones, volarán, por término medio, iguales cantidades de moléculas, con la particularidad de que la cantidad de moléculas que vuelan por la unidad de tiempo en cada una de las direcciones, también se determina con la fórmula (95.6).

Con una precisión salvo el coeficiente numérico, la expresión (95.6) puede ser obtenida mediante los siguientes razonamientos simplificados. Supongamos que las moléculas del gas sólo se mueven a lo largo de tres direcciones perpendiculares entre sí. Si el recipiente contiene N moléculas, en cualquier momento, a lo largo de cada una de las direcciones se desplazará $N/3$ moléculas, moviéndose la mitad de ellas (es decir, $N/6$ moléculas) a lo largo de la dirección dada hacia uno de los lados, la otra mitad, hacia el otro. Por lo tanto, en la dirección que nos interesa (por ejemplo, por la normal al elemento ΔS dado de la pared del recipiente) se mueve 1/6 parte de las moléculas.

---

que moléculas de otros grupos al grupo que se mueve en dirección de la pared. Por esta causa, cuando se calcula la cantidad de moléculas que llegan hasta la pared, pueden no tomarse en consideración los choques entre las propias moléculas.

[1]) Se trata del módulo de la velocidad. El valor medio del vector de la velocidad de las moléculas es igual a cero cuando el gas está en equilibrio.

Además, supongamos que todas las moléculas se mueven a igual velocidad $\langle v \rangle$. En semejante caso, durante el tiempo Δt llegarán hasta el elemento de la pared ΔS todas las moléculas que hacia él vuelan, contenidas en el volumen de un cilindro con base ΔS y altura $\langle v \rangle \Delta t$ (fig. 95.2). El número de estas moléculas es igual a $\Delta \nu = (n/6) \Delta S \langle v \rangle \Delta t$. En correspondencia, el número de choques contra el área unitaria por unidad de tiempo es

$$\nu = \frac{1}{6} n \langle v \rangle. \qquad (95.7)$$

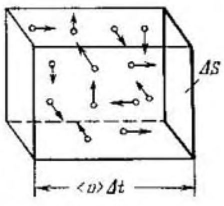


Fig. 95.2

La expresión obtenida sólo se distingue de (95.6) por el valor del factor numérico (1/6 en lugar de 1/4).

Conservando la suposición acerca del movimiento de las moléculas por tres direcciones perpendiculares entre sí, pero refutando la suposición sobre las velocidades iguales de las moléculas, hay que destacar del número de moléculas por unidad de volumen, aquellas dn_v moléculas cuyas velocidades se hallan en el intervalo desde v hasta $v + dv$. La cantidad de moléculas que tienen tales velocidades y que llegan al área ΔS durante el tiempo Δt, es igual a

$$d\nu_v = \frac{1}{6} dn_v \Delta S \; v \; \Delta t. \qquad (95.8)$$

El número total de choques será obtenido integrando la expresión (95.8) respecto de las velocidades:

$$\Delta \nu = \int d\nu_v = \frac{1}{6} \Delta S \Delta t \int_0^{v_{\text{máx}}} v \, dn_v = \frac{1}{6} \Delta S \, \Delta t \, n \langle v \rangle.$$

Por fin, dividiendo $\Delta \nu$ por ΔS y Δt llegamos a la fórmula (95.7). De este modo, la suposición sobre la igualdad de las velocidades de las moléculas no influye sobre el resultado que se obtiene para el número de choques de las moléculas contra la pared. No obstante, como veremos en el parágrafo siguiente, este resultado hace variar el resultado de los cálculos de la presión.

§ 96. Presión del gas contra la pared

Las paredes de un recipiente que contiene gas sufren continuo bombardeo de las moléculas. Por esta causa, al elemento ΔS de la pared se comunica por segundo cierta cantidad de movimiento que es igual a la fuerza que actúa sobre ΔS. La razón entre dicha fuerza y la magnitud de ΔS nos proporciona la presión que el gas ejerce sobre la pared del recipiente. A causa del carácter caótico del movi-

miento de las moléculas, la presión del gas sobre diversos sectores de las paredes del recipiente es igual (claro está, si el gas está en estado de equilibrio).

Si suponemos que las moléculas botan de la pared según la ley de la reflexión especular ($\vartheta_{ref} = \vartheta_{inc}$) y que no cambia la magnitud de la velocidad de las moléculas [1]), la cantidad de movimiento que se comunica durante el choque de la molécula contra la pared, será igual a $2mv \cos \vartheta$ (fig. 96.1; m es la masa de la molécula). Esta cantidad de movimiento está dirigida por la normal al área. Cada una de $d\nu_{v,\vartheta,\varphi}$ moléculas (véase (95.2)) comunica a la pared un impulso $2mv \cos \vartheta$, mientras que todas las moléculas comunican una cantidad de movimiento

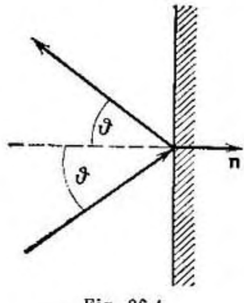


Fig. 96.1

$$dK_{v,\vartheta,\varphi} = 2mv \cos \vartheta \, d\nu_{v,\vartheta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\vartheta,\varphi}}{4\pi} \frac{2mv^2 \cos^2 \vartheta \Delta S \Delta t}{V}.$$

Sumemos la expresión obtenida por las direcciones en los márgenes del ángulo sólido 2π (que corresponde a las variaciones de ϑ desde 0 hasta $\pi/2$ y a las variaciones de φ desde 0 hasta 2π). Así, obtenemos la cantidad de movimiento que las moléculas comunican, cuyas velocidades tienen una magnitud desde v hasta $v + dv$:

$$dK_v = dN_v \frac{2mv^2 \Delta S \Delta t}{4\pi V} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

(hemos puesto la expresión (94.4) para $d\Omega$). La integración por $d\varphi$ nos da 2π, la integral por $d\vartheta$ es igual a 1/3. Por lo tanto,

$$dK_v = dN_v \frac{mv^2 \Delta S \Delta t}{3V}.$$

Después de integrar esta expresión por las velocidades desde 0 hasta $v_{máx}$, se obtiene la cantidad completa de movimiento que se comunica al área ΔS durante el tiempo Δt:

$$\Delta K = \frac{m \Delta S \Delta t}{3V} \int_0^{v_{máx}} v^2 \, dN_v. \tag{96.1}$$

[1]) En realidad, la interacción de las moléculas con la pared del recipiente tiene un carácter más complicado (véase la pág. 341) y las suposiciones que hemos hecho son justas sólo para el término medio de gran número de choques.

La expresión

$$\frac{1}{N}\int_0^{v_{\text{máx}}} v^2\,dN_v$$

es el valor medio del cuadrado de las velocidades de las moléculas. Sustituyendo en (96.1) la integral por el producto $N\langle v^2\rangle$, obtenemos

$$\Delta K=\frac{m\Delta S\Delta t}{3V}N\langle v^2\rangle=\frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle\Delta S\Delta t$$

($n=N/V$ es el número de moléculas por unidad de volumen). Por fin, dividiendo esta expresión por ΔS y Δt tendremos la presión del gas sobre la pared del recipiente:

$$p=\frac{1}{3}nm\langle v^2\rangle=\frac{2}{3}n\frac{m\langle v^2\rangle}{2}. \qquad (96.2)$$

Como supusimos, la masa de todas las moléculas era igual, por lo que ésta se puede introducir en el signo de la media. Como resultado, la expresión (96.2) toma la forma

$$p=\frac{2}{3}n\left\langle\frac{mv^2}{2}\right\rangle=\frac{2}{3}n\langle\varepsilon_{\text{tras}}\rangle, \qquad (96.3)$$

donde $\langle\varepsilon_{\text{tras}}\rangle$ es el valor medio de la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas.

Obtengamos la expresión para la presión, partiendo de las representaciones simplificadas que nos condujeron a la fórmula (95.7). De acuerdo con ellas, cada molécula comunica a la pared, al chocar con ella, una cantidad de movimiento $2m\langle v\rangle$. Multiplicando esta magnitud por el número de choques (véase (95.7)), obtendremos la cantidad de movimiento que se comunica al área unitaria por unidad de tiempo, es decir, la presión. Así, pues, llegamos a la fórmula

$$p=\frac{1}{6}n\langle v\rangle\cdot 2m\langle v\rangle=\frac{1}{3}nm\langle v\rangle^2. \qquad (96.4)$$

Esta fórmula se diferencia de (96.2) porque en lugar de la media del cuadrado de la velocidad $\langle v^2\rangle$ tenemos el cuadrado de la velocidad media $\langle v\rangle^2$. Más adelante, (véase el § 97), nos cercioraremos de que estas dos magnitudes se distinguen una de otra, es decir, que $\langle v^2\rangle \neq \langle v\rangle^2$.

Al realizar un cálculo más minucioso, el número de moléculas determinado por la fórmula (95.8) debe ser multiplicado por $2mv$ y, a continuación, realizar la suma por todas las v. Como resultado obtenemos la cantidad de movimiento que se comunica al área ΔS

durante el tiempo Δt:

$$\Delta K = \int_0^{v_{\text{máx}}} \frac{1}{6}\, dn_v \Delta S \Delta t \cdot 2mv = \frac{1}{3} \Delta S \Delta t m \int_0^{v_{\text{máx}}} v^2\, dn_v = \frac{1}{3} \Delta S \Delta t n m \langle v^2 \rangle .$$

Después de dividir esta expresión por ΔS y Δt, para la presión obtenemos la fórmula (96.2). De esta manera, partiendo de la representación simplificada acerca del movimiento de las moléculas a lo largo de tres direcciones perpendiculares entre sí, obtenemos una expresión precisa para la presión. Esto es explicable por el hecho de que la señalada simplificación conduce, por un lado, a la reducción de la cantidad de choques de las moléculas contra la pared ($^1/_6 n \langle v \rangle$ en lugar de $^1/_4 n \langle v \rangle$, véanse (95.6) y (95.7)) y, por otro, el aumento de la cantidad de movimiento que durante cada choque se transmite a la pared. Al realizar la deducción simplificada habíamos adoptado que con cada choque se transmitía a la pared una cantidad de movimiento igual a 2 mv. En realidad, la magnitud de la cantidad de movimiento que se transmite a la pared depende del ángulo ϑ, por lo que la cantidad de movimiento media, comunicada durante un choque, será $^4/_3 mv$. Como resultado, las dos imprecisiones se compensan recíprocamente y, a pesar de la simplificación de la consideración, se obtiene una expresión precisa para la presión.

§ 97. Energía media de las moléculas

Escribamos una tras de otra la expresión (96.3) para la presión obtenida en el parágrafo anterior y la ecuación de estado de un gas ideal (86.7):

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{tras}} \rangle , \quad p = nkT .$$

De la comparación de estas expresiones se desprende que

$$\langle \varepsilon_{\text{tras}} \rangle = \frac{3}{2} kT . \qquad (97.1)$$

Aquí, hemos llegado a una importante conclusión: *la temperatura absoluta es una magnitud proporcional a la energía media de movimiento de traslación de las moléculas.* Con movimiento de traslación sólo se desplazan las moléculas de gas. Para los sólidos y líquidos la energía media de las moléculas es proporcional a la temperatura absoluta sólo en aquel caso, cuando el movimiento de las moléculas tiene carácter clásico. En la región cuántica la proporcionalidad entre la energía media de las moléculas y la temperatura absoluta deja de observarse.

La expresión (97.1) es notable en el sentido de que la energía media resulta depender sólo de la temperatura y no depende de la masa de la molécula.

Ya que $\langle \varepsilon_{tras} \rangle = \langle mv^2/2 \rangle = (m/2) \langle v^2 \rangle$, de (97.1) sigue que

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m. \qquad (97.2)$$

Representando v^2 como la suma de los cuadrados de las componentes de la velocidad, podemos escribir:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

A causa de la equivalencia de todas las direcciones de movimiento, se realiza la igualdad

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Teniendo esto en cuenta, hallamos que

$$\langle v_x^2 \rangle = {}^1/_3 \langle v^2 \rangle = kT/m. \qquad (97.3)$$

La fórmula (97.1) determina la energía sólo del movimiento de traslación de la molécula. Sin embargo, junto con este movimiento, también es posible la rotación de la molécula y las vibraciones de los átomos que la componen. Estos dos tipos de movimientos están relacionados con cierta reserva de energía que puede ser determinada gracias a la regla sobre la equipartición de la energía por los grados de libertad de la molécula, establecida por la física estadística.

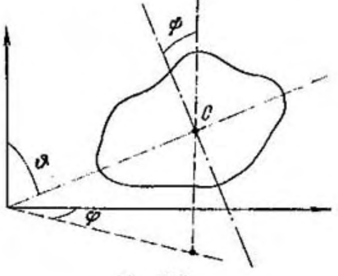


Fig. 97.1

Recibe el nombre de grados de libertad de un sistema mecánico, la cantidad de magnitudes independientes con las cuales puede ser prefijada la posición del sistema. Por ejemplo, la posición en el espacio de un punto material se determina por completo preestableciendo los valores de sus tres coordenadas (por ejemplo, cartesianas x, y, z o bien esféricas r, ϑ, φ, etc.). De acuerdo con esto, el punto material tiene tres grados de libertad.

La posición de un sólido indeformable puede ser determinada prefijando las tres coordenadas de su centro de masas (x, y, z), dos ángulos ϑ y φ, que indican la dirección de cualquier eje ligado con el sólido y que pasa por su centro de masas (fig. 97.1) y, por fin, el ángulo ψ que determina la dirección del segundo eje ligado con el cuerpo y perpendicular al primero. Así, pues, un sólido indeformable tiene seis grados de libertad. La variación de las coordenadas del centro de masas, quedando invariables los ángulos ϑ, φ y ψ, está condicionada por el movimiento de traslación del sólido. Por esta razón, los correspondientes grados de libertad denomínanse *de trasla-*

ción. La variación de cualesquiera de los ángulos ϑ, φ, ψ, con la posición invariable del centro de masas, condiciona la rotación del sólido, por lo que los correspondientes grados de libertad se llaman *de rotación*. Por consiguiente, de los seis grados de libertad de un sólido indeformable, tres son de traslación y tres de rotación.

Fig. 97.2

Un sistema de N puntos materiales, entre los que no hay enlaces rígidos, tiene $3N$ grados de libertad (la posición de cada uno de los N puntos debe ser prefijada con tres coordenadas). Todo enlace rígido que establece una disposición recíproca invariable entre dos puntos, disminuye en uno el número de grados de libertad. Por ejemplo, si el sistema consta de dos puntos materiales, entre los cuales queda invariable la

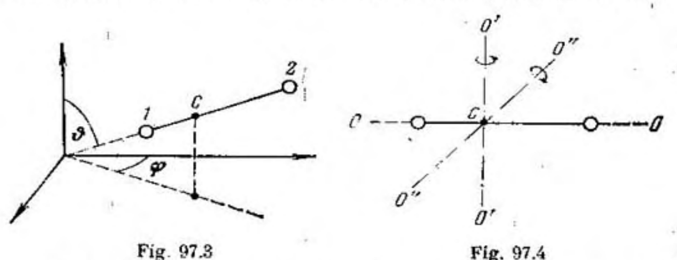


Fig. 97.3 Fig. 97.4

distancia l (fig. 97.2), el número de grados de libertad del sistema es igual a cinco. En efecto, en este caso, entre las coordenadas existe la siguiente correlación

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2, \qquad (97.4)$$

a causa de lo cual, las coordenadas no serán independientes: es suficiente prefijar cualesquiera cinco coordenadas, para que la sexta se determine de la condición (97.4). Señalemos, que para clasificar estos cinco grados de libertad, la posición de un sistema constituido por dos puntos materiales ligados rígidamente entre sí, puede ser determinada de modo siguiente: prefijar las tres coordenadas del centro de masas del sistema (fig. 97.3) y dos ángulos ϑ y φ, con los que se determinan en el espacio las direcciones de los ejes del sistema (es decir, de la recta que pasa por los dos puntos). De aquí se desprende que tres grados de libertad pueden ser de traslación y dos, de rotación. Los grados de libertad de rotación corresponden a las rotaciones alrededor de dos ejes perpendiculares entre sí $O'O'$ y $O''O''$ y perpendiculares al eje del sistema OO (fig. 97.4). Para los puntos materiales, la rotación alrededor del eje OO no tiene sentido.

Si dos puntos materiales están ligados entre sí con enlace rígido y no elástico (es decir, tal que cualquier variación de la distancia de equilibrio r_0 entre los puntos conduce al surgimiento de fuerzas que tienden a establecer entre los puntos la distancia inicial), el número de grados de libertad será igual a seis. En semejante caso, la posición del sistema puede ser determinada prefijando las tres coordenadas del centro de masa (fig. 97.5), dos ángulos ϑ, φ y la distancia r entre los puntos. Las variaciones de r corresponden a las oscilaciones en el sistema, por lo que este grado de libertad recibe el nombre de *vibratorio*. Así, pues, el sistema considerado tiene tres grados de libertad de traslación, dos de rotación y uno vibratorio.

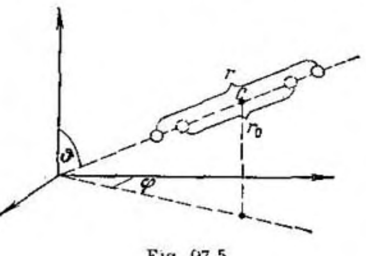


Fig. 97.5

Examinemos un sistema compuesto por N puntos materiales con enlace rígido entre sí. Tal sistema tiene $3N$ grados de libertad. Existe una configuración equilibrada de los puntos que corresponden al mínimo de energía potencial del sistema. Dicha configuración se caracteriza por distancias determinadas en absoluto entre los puntos. Si sacamos los puntos de la posición que responde a la configuración equilibrada, en el sistema surgen vibraciones. La posición del sistema puede ser determinada prefijando la de la configuración equilibrada y las magnitudes que caracterizan el desplazamientos de los puntos de las posiciones de equilibrio. Estas últimas corresponden a los grados de libertad vibratorios.

La posición de la configuración equilibrada, como la de un sólido indeformable, determínase con seis magnitudes, a las que corresponden tres grados de libertad de traslación y tres de rotación. De modo que la cantidad de grados de libertad vibratorios es igual a $3N - 6$[1]).

De los experimentos para definir la capacidad calorífica de los gases se desprende que al determinar el número de grados de libertad de una molécula, hay que considerar los átomos como puntos materiales. Por lo tanto, a una molécula monoatómica hay que atribuir tres grados de libertad de traslación, a la molécula biatómica hay que aducirle, en función del carácter de los enlaces entre los átomos, tres grados de libertad de traslación y dos de rotación (con enlace rígido)

[1]) Se supone que las posiciones de equilibrio de los puntos, no se hallan en una misma recta. En caso contrario, sólo habrá dos grados de libertad de rotación, mientras que los vibratorios, $3N - 5$. Tal caso fue considerado al estudiar un sistema compuesto de dos puntos.

o bien, además de estos cinco, uno más, es decir, un grado de libertad vibratorio (con enlace elástico), a la molécula triatómica con enlace rígido, tres grados de libertad de traslación y tres de rotación, etc.

Cabe notar, que cualquiera que fuese el número de grados de libertad de la molécula, tres de ellos son de traslación. Como ninguno de los grados de libertad de traslación de la molécula tiene preferencia con relación a los demás, a cada uno de ellos debe corresponder, en término medio, la misma cantidad de energía, igual a un tercio del valor (97.1), o sea, $^1/_2\, kT$.

En física estadística clásica se deduce[1]) la *ley de equipartición*, de acuerdo con la cual *a cada grado de libertad de una molécula corresponde, por término medio, la misma energía cinética, igual a* $^1/_2\, kT$.

De acuerdo con la ley de equipartición, el valor medio de la energía de una molécula $\langle\varepsilon\rangle$ será tanto mayor (a igual temperatura), cuanto más complicada sea la molécula, mientras más grande sea su número de grados de libertad. Al determinar $\langle\varepsilon\rangle$ hay que tener en cuenta que el grado de libertad vibratorio debe poseer una capacidad energética dos veces mayor que los grados de libertad de traslación y de rotación. Esto se debe a que el movimiento de traslación y de rotación de la molécula está ligado sólo con la presencia de energía cinética, mientras que el movimiento vibratorio, con la presencia de la energía cinética y potencial, con la particularidad de que para un oscilador armónico el valor medio de la energía cinética y potencial resulta ser el mismo. Por esta causa, a cada grado de libertad vibratorio debe corresponder, por término medio, dos mitades de kT, una en forma de energía cinética y otra, en forma de energía potencial.

Así, pues, la energía media de una molécula debe ser igual a

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2} kT, \qquad (97.5)$$

donde i es la suma de número de grados de libertad de traslación, de rotación y del número doble de los grados de libertad vibratorios

$$i = n_{\text{tras}} + n_{\text{rot}} + 2n_{\text{vib}}. \qquad (97.6)$$

Para una molécula con enlace rígido entre los átomos, i coincide con el número de grados de libertad de la molécula.

Las moléculas de un gas ideal no ejercen entre sí interacción, Por esta causa, la energía interna de un mol de gas ideal puede ser hallada multiplicando el número de Avogadro por la energía media de una molécula:

$$U_{\text{m}} = N_A \langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} R\, T. \qquad (97.7)$$

[1]) Esta definición sale de los márgenes del curso de física general.

La comparación de esta expresión con (87.6) proporciona

$$C_V=\frac{i}{2}R. \tag{97.8}$$

Tomando en consideración la fórmula (87.11) hallamos que

$$C_p=\frac{i+2}{2}R. \tag{97.9}$$

Por lo tanto,

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{i+2}{i} \tag{97.10}$$

Así, pues, la magnitud γ se determina por el número y el carácter de los grados de libertad de la molécula.

En la tabla 97.1 se aducen los valores de C_V, C_p y γ, obtenidos para diversas moléculas según las fórmulas (97.8), (97.9) y (97.10). En la tabla 97.2 se comparan los resultados teóricos y los datos experimentales. Los valores teóricos se han obtenido (salvo en el caso indicado en la observación dada en la tabla) suponiendo que las moléculas son rígidas; los valores experimentales, para temperaturas próximas a la del medio ambiente.

Tabla 97.1

Molécula	Carácter del enlace entre los átomos	Número de grados de libertad: de traslación	de rotación	vibratorio	i	C_V	C_p	γ
Monoatómica	—	3	—	—	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1,67
Biatómica	Rígido	3	2	—	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	1,40
Idem	Elástico	3	2	1	7	$\frac{7}{2}R$	$\frac{9}{2}R$	1,29
Con número de átomos tres y más	Rígido	3	3	—	6	$\frac{6}{2}R$	$\frac{8}{2}R$	1,33

Al parecer, de la tabla 97.2 se desprende que la concordancia entre la teoría y la práctica es satisfactoria para las moléculas mono y biatómicas. Sin embargo, en realidad la cosa no es así. De acuerdo con la teoría estudiada por nosotros, las capacidades caloríficas

Tabla 97.2

Gas	Número de átomos y moléculas	C_V, J/(mol·K)		C_p, J/(mol·K)		γ	
		teórica	experimental	teórica	experimental	teórica	experimental
Helio (He)	1	12,5	12,5	20,8	20,9	1,67	1,67
Oxígeno (O_2)	2	20,8	20,9	29,1	28,9	1,40	1,40
Monóxido carbónico (CO)	2	20,8	21,0	29,1	29,3	1,40	1,40
Vapor de agua (H_2O)	3	25,0 33,2*	27,8	33,2 41,5*	36,2	1,33 1,25*	1,31

* Para $i = 8$, es decir, suponiendo que existe un grado de libertad vibratorio adicional.

de los gases deben ser números enteros o múltiplos de $R/2$, ya que el número de grados de libertad sólo puede ser entero. Por esta causa, incluso pequeñas discrepancias de C_V y C_p de los valores múltiplos a $R/2$ juegan un papel de principio. Como vemos en la tabla, semejantes discrepancias tienen lugar, con la particularidad de que de antemano superan los posibles errores de las mediciones.

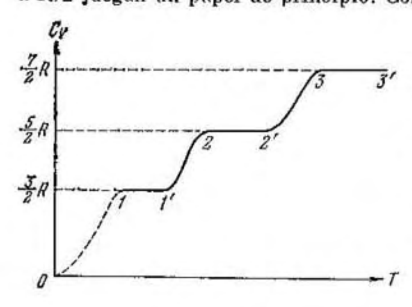


Fig. 97.6

Las discrepancias entre la teoría y los experimentos se hacen especialmente sorprendentes si nos dirigimos a la dependencia de la capacidad calorífica de la temperatura. En la fig. 97.6 está representada la curva de dependencia entre la capacidad calorífica de un kilomol C_V y la temperatura, obtenida de forma experimental para el hidrógeno. De acuerdo con la teoría, la capacidad calorífica no debe depender de la temperatura. En la figura vemos que esta afirmación es justa sólo en los márgenes de ciertos intervalos de temperaturas, teniendo la capacidad calorífica en diferentes intervalos valores que corresponden a distinto número de grados de libertad de la molécula. Por ejemplo, en el sector *1—1'* C_V es igual a $^3/_2\, R$, lo que significa que la molécula se comporta como un sistema que sólo tiene grados de libertad de traslación. En el sector *2—2'* C_V es igual

a $^5/_2R$. Por consiguiente, a las temperaturas que corresponden a dicho sector, las moléculas tendrán dos grados de libertad de rotación, que se adicionarán a los tres grados de libertad de traslación que tenía la molécula a temperaturas más bajas. Por fin, a temperaturas suficientemente altas, C_V se hace igual a $^7/_2R$, lo que certifica que a estas temperaturas aparecen las vibraciones de las moléculas. En el espacio entre los indicados intervalos, la capacidad calorífica crece de forma monótona junto con la temperatura, es decir, parece como si correspondiera a un número no entero variable de grados de libertad.

De este modo, el número de grados de libertad de una molécula que se manifiesta en la capacidad calorífica, depende de la temperatura. A temperaturas bajas sólo se observa el movimiento de traslación de las moléculas. A temperaturas más altas, junto con el movimiento de traslación, se observa la rotación de las moléculas. Por fin, a temperaturas aún más altas, a los dos primeros tipos de movimiento se adicionan las vibraciones de las moléculas. Con esto, como sigue de la marcha monótona de la capacidad calorífica, en el movimiento de rotación y, a continuación, en el movimiento vibratorio no toman parte de golpe todas las moléculas. Por ejemplo, al principio se observa la rotación de sólo una parte de las moléculas. Al aumentar la temperatura esta parte crece y, por fin, al alcanzarse una determinada temperatura, se ponen en movimiento de rotación, prácticamente, todas las moléculas. Un proceso análogo tiene lugar para el movimiento vibratorio de las moléculas.

La explicación de semejante conducta de la capacidad calorífica se ofrece en la mecánica cuántica. Como establece la teoría cuántica, la energía de los movimientos de rotación y vibratorio de las moléculas resulta estar cuantificada. Esto significa que las energías de rotación y vibratoria de la molécula pueden tener no cualesquiera valores, sino sólo discretos (es decir, independientes, que se diferencian entre sí en una magnitud finita). Por lo tanto, la energía relacionada con estos tipos de movimiento sólo puede variar a saltos. En lo que atañe a la energía del movimiento de traslación, no existe semejante limitación.

Los intervalos entre valores tolerables aislados de la energía (o como se ha adoptado decir, entre los niveles de energía) para las vibraciones son, aproximadamente, en un orden mayores que para la rotación. El esquema simplificado[1]) de los niveles de rotación y de vibración de una molécula biatómica se ofrece en la fig. 97.7.

En el § 94 fue señalado que las velocidades de las moléculas se agrupan, principalmente, junto a cierto valor más probable. En correspondencia, la parte aplastante de las moléculas posee energías

[1]) En realidad, la distancia entre los niveles de rotación no es igual. Pero para el problema que consideramos esto no tiene importancia.

próximas al valor medio $\langle\varepsilon\rangle$ y sólo una pequeña parte de éstas tiene energías que de modo considerable superan a $\langle\varepsilon\rangle$. Por esta razón, para que una parte notoria de las moléculas resulte incorporada al movimiento de rotación o vibratorio, su energía media debe ser suficientemente grande en comparación con la distancia entre los niveles permitidos de la correspondiente energía.

Tomemos una temperatura tan baja que la energía media de la molécula $\langle\varepsilon\rangle$ sea mucho menor que el primer valor permitido de la energía del movimiento de rotación (véase la recta de trazos inferior en la fig. 97.7). En tal caso, sólo una parte insignificante de todas las moléculas se ncorporará al movimiento de rotación, de forma que, prácticamente, las moléculas del gas se desplazarán con movimiento de traslación. Pequeñas variaciones de la temperatura llevarán sólo a cambios de la energía del movimiento de traslación, a causa de lo cual la capacid d calorífica del gas resultará ser igual $^3/_2R$ (v ;ase el sector $1-1'$ en la curva de la fig. 97.6).

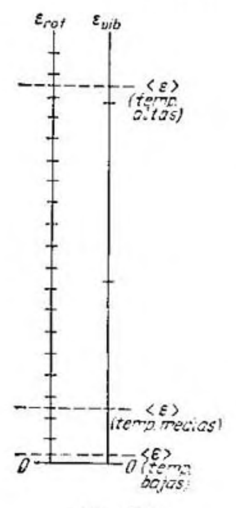


Fig. 97.7

La elevación de la temperatura se acompaña con el crecimiento de $\langle\varepsilon\rangle$, a causa de lo cual una creciente parte de moléculas se pone en movimiento de rotación. A este proceso corresponde el sector $1'-2$ de la fig. 97.6.

Después de que todas las moléculas sean incorporadas al movimiento de rotación, comienza el sector horizontal $2-2'$. A las temperaturas, que corresponden a este sector, $\langle\varepsilon\rangle$ es aún mucho menor que la distancia entre los niveles permitidos de la energía vibratoria, por lo que prácticamente, no habrá vibraciones de las moléculas. Con la posterior elevación de la temperatura, las moléculas comenzarán a incorporarse en creciente número al movimiento vibratorio, a lo que corresponde el sector intermedio $2'-3$ de la curva de capacidad calorífica. Por fin, a una temperatura suficientemente alta, todas las moléculas se verán incorporadas al movimiento vibratorio, por lo que la capacidad calorífica será igual a $^7/_2\ R$.

De este modo, la teoría clásica es con aproximación justa sólo para intervalos aislados de temperaturas, con la particularidad de que a cada intervalo de corresponde su número de grados de libertad de la molécula.

§ 98. Distribución de Maxwell

Consideremos el siguiente ejemplo para aclarar qué procedimiento hay que emplear para describir de forma cuantitativa la **distribución** de las moléculas por los valores de las velocidades. En un espacio imaginario, que llamaremos espacio v (espacio de las velocidades), tomemos los ejes rectangulares de coordenadas, por los que trazaremos los valores v_x, v_y y v_z de ciertas moléculas (se trata de las componentes de las velocidades por los ejes x, y, z tomados en un espacio corriente). En tal caso, a la velocidad de cada molécula corresponderá un punto en dicho espacio. Con motivo de los choques, las posiciones de los puntos cambiarán constantemente, pero su densidad en cada lugar quedará invariable (recordemos, que examinamos un estado de equilibrio del gas).

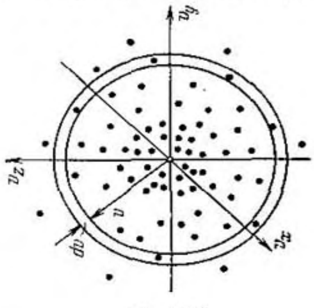


Fig. 98.1

A causa de la equivalencia de todas las direcciones de movimiento, la disposición de los puntos respecto del origen de coordenadas será simétrica esféricamente. Por lo tanto, la densidad de los puntos en el espacio v sólo puede ser función del módulo de la velocidad v (o v^2). Designemos dicha densidad por $Nf(v)$ (N es el número total de moléculas en la masa dada de gas). Entonces, la cantidad de moléculas, cuyas componentes de las velocidades se hallan en los límites desde v_x hasta $v_x + dv_x$, desde v_y hasta $v_y + dv_y$ y desde v_z hasta $v_z + dv_z$, puede ser representado del modo siguiente

$$dN_{vx,\, vy,\, vz} = Nf(v)\, dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{98.1}$$

(el producto de $dv_x\, dv_y\, dv_z$ proporciona el elemento de volumen en el espacio v).

Los puntos que representan las velocidades, cuyos valores se encuentran en los límites desde v hasta $v + dv$, se hallan en la región dispuesta entre las esferas con radios v y $v + dv$ (fig. 98.1). El volumen de la región es igual a $4\pi v^2\, dv$. Por lo tanto, el número de puntos que se hallan en esa región será determinado por la expresión

$$dN_v = Nf(v)\, 4\pi v^2\, dv. \tag{98.2}$$

Esta expresión nos proporciona el número de moléculas, para las que la magnitud de las velocidades se encuentra en el intervalo desde v hasta $v + dv$. Dividiéndolo por N obtenemos la probabilidad dP_v de que la velocidad de la molécula se encuentre en los límites

desde v hasta $v + dv$:

$$dP_v = f(v)\, 4\pi v^2\, dv. \tag{98.3}$$

De la comparación de esta expresión con (93.6), llegamos a la conclusión de que

$$F(v) = f(v)\, 4\pi v^2 \tag{98.4}$$

desempeña el papel de función de distribución de las moléculas del gas por las velocidades.

La forma de la función (98.4) fue establecida por Maxwell de modo teórico en 1860. En la deducción, que a continuación se da, de la ley de distribución de las moléculas de gas por las velocidades, vamos a seguir a Maxwell aproximadamente.

De acuerdo con la fórmula (93.6), la probabilidad de que la componente de la velocidad v_x de cierta molécula tenga valores en los límites de v_x a $v_x + dv_x$, puede ser representada así

$$dP_{v_x} = \varphi(v_x)\, dv_x, \tag{98.5}$$

donde $\varphi(v_x)$ es la función de distribución. Probabilidades análogas para las otras dos componentes se determinan con ayuda de las expresiones

$$dP_{v_y} = \varphi(v_y)\, dv_y, \tag{98.6}$$

$$dP_{v_z} = \varphi(v_z)\, dv_z. \tag{98.7}$$

A causa de la equivalencia de todas las direcciones de movimiento, la forma analítica de las funciones $\varphi(v_x)$, $\varphi(v_y)$ y $\varphi(v_z)$ debe ser igual, estas funciones sólo se diferencian por la designación del argumento.

Maxwell supuso que la probabilidad de diversos valores de una de las componentes, por ejemplo de v_x, no depende de cuál es el valor de las otras dos componentes (en el caso dado de v_y y v_z)[1]. Esto quiere decir, que el acontecimiento que consiste en que v_x de cierta molécula se encuentra en los límites de v_x a $v_x + dv_x$, v_y de esa misma molécula, en los límites de v_y hasta $v_y + dv_y$ y, por fin, v_z de esa misma molécula, en los límites de v_z a $v_z + dv_z$, son estadísticamente independientes. Por eso, la probabilidad de que las componentes de la velocidad de cierta molécula tengan valores en los límites de v_x, v_y, v_z a $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$ es igual al producto de las probabilidades (98.5), (98.6) y (98.7):

$$dP_{v_x, v_y, v_z} = \varphi(v_x)\, \varphi(v_y)\, \varphi(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z \tag{98.8}$$

(véase la fórmula (93.4)). Al mismo tiempo, en correspondencia con (98.1) esta probabilidad puede estar representada en la forma

$$dP_{v_x, v_y, v_z} = f(v)\, dv_x\, dv_y\, dv_z. \tag{98.9}$$

[1]) Esta suposición puede ser demostrada rigurosamente, pero ésta sale de los márgenes del presente curso.

La comparación de (98.8) y (98.9) nos proporciona

$$f(v) = \varphi(v_x)\,\varphi(v_y)\,\varphi(v_z). \tag{98.10}$$

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta igualdad, resulta que

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z).$$

Derivemos por v_x la correlación obtenida:

$$\frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}. \tag{98.11}$$

Pero como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, la derivada parcial de v por v_x, es igual a

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} = \frac{v_x}{v}.$$

Poniendo este valor de la derivada en (98.11) y trasladando v_x del numerador del primer miembro al denominador del segundo, llegamos a la igualdad

$$\frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{1}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}\,\frac{1}{v_x}. \tag{98.12}$$

El segundo miembro de esta igualdad y, por lo tanto, también el primero, no dependen de las variables v_y y v_z. Así, pues, tampoco puede depender de v_x (v_x, v_y, v_z entran en $f(v)$ simétricamente; véase (98.10)). De esta manera, cada una de las expresiones que se hallan en el primero y segundo miembros de (98.12) es igual a cierta constante que vamos a designar con $-\alpha$ (más adelante veremos que la constante es menor que cero, es decir, $\alpha > 0$).

Así, pues,

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}\,\frac{1}{v_x} = -\alpha \quad \text{o bien} \quad \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha v_x.$$

La integración nos da

$$\ln \varphi(v_x) = -\frac{\alpha v_x^2}{2} + \ln A,$$

donde A es una constante. De aquí

$$\varphi(v_x) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right). \tag{98.13}$$

De manera análoga

$$\varphi(v_y) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_y^2}{2}\right), \quad \varphi(v_z) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_z^2}{2}\right).$$

Multiplicando entre sí las funciones halladas, obtendremos que

$$f(v) = A^3 \exp\left(-\frac{\alpha(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2}\right) = A^3 \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{2}\right). \tag{98.14}$$

Del tipo de las funciones (98.13) y (98.14) se desprende que la constante α debe ser mayor que cero. Si ésta fuera negativa, dichas funciones crecerían ilimitadamente al aumentar v.

La constante A se determina de la condición de la normación (93.7). De acuerdo con ella

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right)dv_x=1. \qquad (98.15)$$

En el § 94 fue señalado que los valores de v (y, por consiguiente, v_x) no pueden superar un valor, que aunque muy grande, es, en fin de cuentas, finito $v_{máx}$. Pero al mismo tiempo, hemos tomado como límite de integración $-\infty$ y $+\infty$. Semejante ampliación de dichos límites no introduce notorio error. La función subintegral decrece al aumentar v_x con tal rapidez que con v_x suficientemente grandes, no se diferencia, prácticamente, de cero. Por esta causa, la aportación de los sectores de integración de $v_{máx}$ al ∞ y de $-v_{máx}$ a $-\infty$ es despreciablemente pequeña.

La integral en (98.15) es una integral de Poisson con $\beta=\alpha/2$ (véase el Apéndice I, fórmula (I.1)). De acuerdo con (I.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right)dv_x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha/2}}=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}. \qquad (98.16)$$

Poniendo este valor en (98.15) obtenemos que $A\sqrt{2\pi/\alpha}=1$. De aquí

$$A=\sqrt{\alpha/2\pi}. \qquad (98.17)$$

La sustitución del valor hallado de A en (98.13) y (98.14) nos conduce a las fórmulas

$$\varphi(v_x)=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right), \qquad (98.18)$$

$$f(v)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\alpha v^2}{2}\right). \qquad (98.19)$$

Con el fin de hallar la constante α, con ayuda de la función (98.18) calculamos el valor de $\langle v_x^2\rangle$ e igualamos la expresión obtenida al valor de kT/m, hallado al calcular la presión (véase (97.3)). En correspondencia con (93.11)

$$\langle v_x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}v_x^2\varphi(v_x)\,dv_x=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right)v_x^2\,dv_x. \qquad (98.20)$$

De acuerdo con la fórmula (I.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right)v_x^2\,dv_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{(\alpha/2)^3}}=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha^3}}. \qquad (98.21)$$

Sustituyendo en (98.20) la integral por su valor (98.21), hallamos que

$$\langle v_x^2\rangle = \sqrt{\alpha/2\pi}\cdot\sqrt{2\pi/\alpha^3} = 1/\alpha.$$

La comparación con (97.3) proporciona

$$\alpha = m/kT. \tag{98.22}$$

Poniendo este valor en las fórmulas (98.18) y (98.19) llegamos a las expresiones definitivas para las funciones de distribución:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \tag{98.23}$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \tag{98.24}$$

Recordemos que la función (98.24) al ser multiplicada por N determina la densidad de los puntos que representan las velocidades de las moléculas en el espacio v. Al mutiplicar esta función por $dv_x\, dv_y\, dv_z$, hallamos la posibilidad $dP_{v_x,\, v_y,\, v_z}$ de que las componentes de la velocidad se hallan en los límites de v_x, v_y, v_z a $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$. Con esto, no sólo la magnitud de la velocidad, sino que también su sentido varían en pequeños límites, determinados por dv_x, dv_y, dv_z. Si sólo nos interesa la probabilidad de la magnitud de la velocidad, independientemente de la dirección de movimiento de las moléculas, es decir, dP_v, hay que tomar la función de distribución en la forma (98.4). La multiplicación de esta función por dv proporciona la probabilidad de que el módulo de la velocidad de cierta molécula resulte encontrarse en los límites de v a $v + dv$ (con dirección de movimiento tomada al azar).

De acuerdo con (98.4) y (98.24)

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2. \tag{98.25}$$

Para esta función es característica la circunstancia de que en el grado de la exponente se encuentra la razón, tomada con signo negativo, entre la energía cinética de la molécula, que corresponde a la velocidad que consideramos v, y kT, es decir, la magnitud que caracteriza la energía media de la molécula de gas.

La gráfica de la función (98.23) se ofrece en la fig. 98.2. Coincide con la curva gausiana de distribución de una magnitud casual.

La gráfica de la función (98.25) se da en la fig. 98.3. Como al aumentar v el factor del tipo $e^{-\alpha v^2}$ decrece con mayor rapidez que el factor v^2 crece, la función, que comienza desde cero (a causa de v^2), alcanza el máximo, para después tender a cero de modo asintótico. El área que abarca la curva es igual a uno (comp. con (93.7)).

Hallemos la velocidad media $\langle v\rangle$ de las moléculas (teniendo en cuenta la velocidad media aritmética). Por analogía con (93.9)

tenemos:

$$\langle v\rangle=\int_0^\infty vF(v)\,dv=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^3\,dv.$$

El paso a la variable $\xi = v^2$ y la integración por partes, nos conduce al siguiente resultado:

$$\langle v\rangle=\sqrt{8kT/\pi m}. \tag{98.26}$$

En correspondencia con (93.11)

$$\langle v^2\rangle=\int_0^\infty v^2F(v)\,dv=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^4\,dv. \tag{98.27}$$

De acuerdo con la fórmula (I.6)

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^4\,dv=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{(m/2kT)^5}}=\frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{5/2}.$$

Poniendo este valor de la integral en (98.27) para $\langle v^2\rangle$ obtenemos el valor $3\,kT/m$ (véase (97.2)) que ya conocemos. Nada asombroso hay

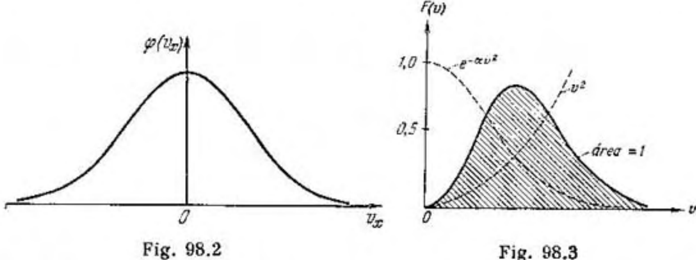


Fig. 98.2

Fig. 98.3

en esto, ya que al hallar el valor de α en (98.18) partimos de la correlación (97.3), es decir, en realidad de la correlación (97.2).

La raíz cuadrada de $\langle v^2\rangle$ recibe el nombre de *velocidad media cuadrática*:

$$v_{\text{m. cuad}}=\sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{3kT/m}. \tag{98.28}$$

La velocidad que corresponde al máximo de $F(v)$ será la más probable. Tomando la derivada de la expresión (98.25) por v, omitiendo los factores constantes e igualando a cero la expresión obtenida, llegamos a la ecuación

$$\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\left(2-\frac{mv^2}{kT}\right)v=0.$$

Los valores $v = 0$ y $v = \infty$ que satisfacen esta ecuación, corresponden a los mínimos de $F(v)$. El valor de v que reduce a cero la expresión entre paréntesis, es la velocidad más probable v_{prob} buscada:

$$v_{\text{prob}} = \sqrt{2kT/m}. \qquad (98.29)$$

La comparación de las expresiones (98.29), (98.26) y (98.28) nos proporciona

$$v_{\text{prob}} : \langle v \rangle : v_{\text{m.cuad}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

La fig. 98.4 ilustra esta correlación.

Poniendo la expresión (98.29) en la fórmula (98.25) hallamos el valor máximo de la función $F(v)$:

$$F(v_{\text{prob}}) = (4/e)\sqrt{m/2\pi kT} \sim \sqrt{m/T}. \qquad (98.30)$$

De las fórmulas (98.29) y (98.30) se desprende que al aumentar la temperatura (o al disminuir la masa de la molécula), el máximo de

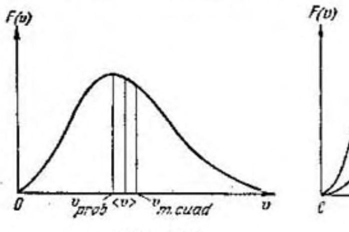


Fig. 98.4

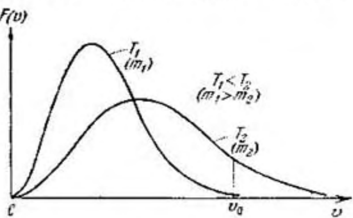


Fig. 98.5

la curva se desplaza a la derecha y desciende, pero, como sabemos, el área que abarca la curva queda invariable. En la fig. 98.5 se comparan dos curvas de distribución, que pueden ser interpretadas como si se refirieran a diversas temperaturas T_1 y T_2 (con igual m) o bien como si se refirieran a diferentes masas de las moléculas m_1 y m_2 (a igual temperatura T).

La cantidad relativa de moléculas, cuya velocidad supera cierto valor v_0, se determina por la expresión

$$\int_{v_0}^{\infty} F(v)\, dv.$$

En la gráfica a esta integral corresponde la parte del área limitada por la curva que se encuentra a la derecha de v_0. En la fig. 98.5 vemos que la cantidad relativa de moléculas, que tiene velocidades mayores que v_0, crece considerablemente al subir la temperatura.

En la tabla 98.1 se aducen las cantidades relativas de moléculas $\Delta N/N$ para diversos intervalos de velocidades, calculadas con ayuda de la función (98.25). De la tabla se desprende que para el 70% de todas las moléculas, la velocidad se diferencia de la más probable no más del 50%. Por término medio sólo el 0,04% de las moléculas

Tabla 98.1

v/v_{prob}	$\Delta N/N$, %	v/v_{prob}	$\Delta N/N$, %
0—0,5	8,1	2—3	4,6
0,5—1,5	70,7	>3	0,04
1,5—2	16,6	>5	$8\cdot10^{-9}$

tienen una velocidad que más de 3 veces supera v_{prob}. En lo que se refiere a las velocidades que superan 5 v_{prob}, éstas, por término medio, se observan en una de 12 mil millones de moléculas.

Apreciemos la velocidad media de las moléculas de oxígeno. Es más cómodo efectuar los cálculos sustituyendo en (98.26) la razón k/m por el cociente R/M, igual a la primera. Entonces, la expresión para la velocidad media tomará la forma

$$\langle v\rangle=\sqrt{8RT/\pi M}. \qquad (98.31)$$

La masa molecular del oxígeno es igual a 32, por lo tanto, la masa de un mol $M = 32\cdot10^{-3}$ kg/mol. La temperatura del medio ambiente es, aproximadamente, igual a 300 K. Poniendo en la fórmula (98.31) los valores numéricos de las magnitudes que en ella entran, resulta que

$$\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8\cdot8,31\cdot300}{3,14\cdot32\cdot10^{-3}}}\approx 500 \text{ m/s}.$$

Esto significa, que cada molécula de oxígeno realiza por segundo un recorrido que, en término medio, es igual a 0,5 km. Como la molécula sufre frecuentes choques con otras moléculas, este recorrido consta de un gran número de cortos segmentos rectilíneos que forman una línea quebrada.

Las moléculas de hidrógeno tienen una masa 16 veces menor que las de oxígeno, por lo que su velocidad, a igual temperatura, será 4 veces mayor y constituye, por término medio, a la temperatura ambiente, 2 km/s.

Si tenemos una mezcla de gases en estado de equilibrio, en los límites de las moléculas de una misma clase, tiene lugar la distribución (98.25) con su valor de m. Las moléculas más pesadas se moverán, en término medio, a velocidad menor que las más ligeras.

Partiendo de la distribución de las moléculas por las velocidades

$$dN_v = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)4\pi v^2\,dv, \qquad (98.32)$$

se puede hallar la distribución de las moléculas por los valores de la energía cinética del movimiento de traslación (designémosla con la letra ε). Con este fin, hay que pasar de la variable v a la variable ε, igual a $mv^2/2$. Realizando en (98.32) la sustitución de $v=(2\varepsilon/m)^{1/2}$ y $dv=(2m\varepsilon)^{-1/2}\,d\varepsilon$, obtenemos

$$dN_\varepsilon = N\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)(kT)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon, \qquad (98.33)$$

donde dN_ε es el número de moléculas, cuya energía cinética del movimiento de traslación tiene valores en los márgenes de ε a $\varepsilon+d\varepsilon$.

De este modo, la distribución de las moléculas por los valores de ε se caracteriza con la función

$$f(\varepsilon) = A\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\varepsilon}, \qquad (98.34)$$

donde A es un factor normalizante, igual a $(2/\sqrt{\pi})\,(kT)^{-3/2}$.

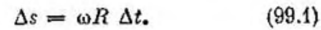
§ 99. Comprobación experimental de la ley de distribución de Maxwell

La primera determinación experimental de las velocidades de las moléculas fue realizada por Stern en 1920. El aparato empleado con ese fin lo constituían dos cilindros coaxiales (fig. 99.1). Por el eje del aparato estaba tensado un hilo de platino cubierto de plata. Al calentar el hilo con la corriente eléctrica de su superficie se evaporaban átomos de plata, cuya velocidad correspondía a la temperatura del hilo. Al abandonar el hilo, los átomos se movían en direcciones radiales. El cilindro interior tenía una estrecha rendija longitudinal por la que pasaba al exterior un haz estrecho de átomos (haz molecular). Para que los átomos de plata no se desviaran a cuenta de los choques con las moléculas de aire, todo el aparato fue evacuado. Al alcanzar la superficie del cilindro exterior, los átomos de plata se sedimentaban sobre ella formando una estrecha banda vertical.

Si todo el aparato se pone en rotación la huella que deja el haz molecular se desplazará por la superficie del cilindro exterior a cierta magnitud Δs (véase la fig. 99.1). Esto ocurre a causa de que en el intervalo de tiempo que los átomos de plata pasan la holgura entre los cilindros, el aparato tiene tiempo para girar a cierto ángulo $\Delta\varphi$,

por lo que frente al haz resulta encontrarse otro sector del cilindro exterior desplazado respecto de la huella inicial s_0 a una magnitud Δs, igual a $R\,\Delta\varphi$ (R es el radio del cilindro exterior). Considerando el movimiento de los átomos de plata en un sistema de referencia en rotación ligado a los cilindros, el desplazamiento de la huella puede ser explicado por la fuerza de Coriolis, igual a $2m\,[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$, que actúa sobre los átomos.

La distancia Δs entre las bandas de plata inicial y desplazada puede ser relacionada con la velocidad angular de rotación de los cilindros ω, con la geometría del aparato y la velocidad de los átomos v. Designando el tiempo de vuelo de los átomos por Δt, podemos escribir que



$$\Delta s = \omega R\,\Delta t. \qquad (99.1)$$

Como el radio del cilindro interior en comparación con el radio del cilindro exterior R es pequeño, el tiempo de vuelo

$$\Delta t = R/v.$$

Poniendo esta expresión en (99.1) y resolviendo la ecuación obtenida respecto de v, resulta que

$$v = \omega R^2/\Delta s.$$

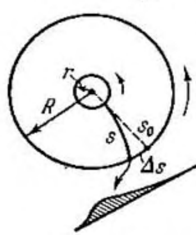


Fig. 99.1

Si medimos el desplazamiento de la huella Δs y la velocidad de rotación del aparato, tendremos la posibilidad de determinar la velocidad de los átomos v. Bien es verdad, que la situación se complica con motivo de que a causa de la distribución por las velocidades, los átomos tienen distintas velocidades, y como resultado la capa desplazada estará difuminada[1]). Estudiando el perfil de la huella (véase la fig. 99.1), es posible crear una representación aproximada sobre la distribución de los átomos de plata por las velocidades.

Los resultados del experimento de Stern certificaron que la apreciación de la velocidad media de los átomos, que se desprende de la distribución de Maxwell, es correcta. En lo que se refiere al carácter de la propia distribución, este experimento podía ofrecer información muy aproximada.

En 1929 la ley de distribución fue comprobada con mayor precisión en el experimento de Lammert, en el cual el haz molecular

---

[1]) La anchura de la capa obtenida en el aparato inmóvil sólo se determina por la geometría del aparato, en particular por la anchura de la rendija por la que sale el haz molecular.

se hacía pasar por dos discos en rotación con rendijas radiales, desplazadas una de la otra a cierto ángulo φ (fig. 99.2). Del número de moléculas que pasa por la rendija del primer disco, por el segundo pasarán sólo aquellas que llegan a él cuando frente al haz se encuentre la rendija en el segundo disco. Las moléculas más rápidas alcanzarán el segundo disco demasiado temprano, las más lentas, demasiado tarde para poder pasar por la rendija. De este modo, el dispositivo permite destacar del haz aquellas moléculas que poseen determinado valor de la velocidad (a causa de la anchura finita de las rendijas, el aparato destaca las moléculas, cuya velocidad se encuentra en los límites de cierto intervalo Δv). La velocidad media de las molécules que el aparato destaca, puede ser hallada de la condición de que el tiempo t_1, durante el que las moléculas pasan la distancia l entre los discos ($t_1 = l/v$), debe coincidir con el tiempo t_2 durante el que los discos giran al ángulo φ ($t_2 = \varphi/\omega$). Igualando los dos tiempos

$$v = \omega l/\varphi.$$

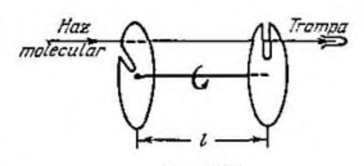


Fig. 99.2

Al variar la velocidad de rotación del aparato ω (o bien el ángulo entre los discos φ), del haz pueden ser destacadas las moléculas que poseen diferentes valores de la velocidad. Captando después dichas moléculas en el transcurso de un determinado tiempo, es posible definir su cantidad relativa en el haz.

Los resultados del experimento de Lammert y otros, que fueron realizados con el mismo fin, concuerdan por completo con la ley de distribución establecida por Maxwell.

Cabe señalar, que la distribución de las moléculas por las velocidades en un haz que sale por un orificio en un recipiente, se diferencia en cierto grado de la distribución que existe en un recinto cerrado. Como las moléculas más rápidas pasarán por el orificio en mayor cantidad que las más lentas, el haz será enriquecido con moléculas más rápidas. Como la cantidad de moléculas que pasa por el orificio por unidad de tiempo es proporcional a v, la distribución en el haz no se caracterizará por la función (98.25), sino que por la función

$$F_1(v) = A_1 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3,$$

donde A_1 es un factor normalizante. La velocidad más probable será aquí $v_{\text{prob}} = \sqrt{3kT/m}$, mientras que la velocidad media $\langle v' \rangle = \sqrt{9\pi\, kT/8m}$.

§ 100. Distribución de Boltzmann

La fórmula barométrica obtenida en el § 92

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) \qquad (100.1)$$

(véase (92.4)) ofrece la dependencia entre la presión y la altura sobre la superficie de la Tierra para una atmósfera isotérmica imaginaria. Sustituyamos en el grado de la exponente la razón M/R por la m/k igual a la primera (m es la masa de la molécula, k, la constante de Boltzmann). Además, de acuerdo con (86.7), pongamos en lugar de p la expresión nkT y, en lugar de p_0, la expresión n_0kT. Reduciendo, a continuación, los dos miembros por kT, llegamos a la fórmula

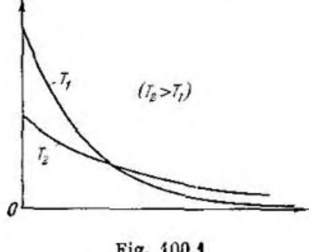


Fig. 100.1

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \qquad (100.2)$$

Aquí, n es la concentración de las moléculas (es decir, su cantidad en la unidad de volumen) a una altura h, n_0, la concentración de moléculas a una altura $h_0 = 0$.

De la fórmula (100.2) se desprende que al disminuir la temperatura el número de partículas, a alturas diferentes de cero, decrece haciéndose nula a $T = 0$ (fig. 100.1). Con el cero absoluto, todas las moléculas se dispondrían en la superficie terrestre. Por lo contrario, a altas temperaturas n decrece lentamente con la altura, de forma que las moléculas se distribuyen casi uniformemente por la altura.

Este hecho tiene sencilla explicación física. Cada distribución concreta de las moléculas por la altura se establece como resultado de la acción de dos tendencias: 1) la atracción de las moléculas hacia la Tierra (caracterizada por la fuerza mg) que tiende a disponerlas en la superficie terrestre; 2) el movimiento térmico (caracterizado por la magnitud kT) que tiende a lanzar las moléculas por todas las alturas de modo uniforme. Mientras mayor sea m y menor T, con mayor fuerza prevalecerá la primera tendencia y las moléculas se acumulan junto a la superficie de la Tierra. En el límite, con $T = 0$, el movimiento térmico cesa por completo y a causa de la atracción las moléculas se disponen en la superficie terrestre. A temperaturas altas, prevalece el movimiento térmico, por lo que lentamente decrece la densidad de las moléculas con la altura.

A distintas alturas la molécula posee diferente reserva de energía potencial:

$$\varepsilon_p = mgh. \qquad (100.3)$$

Por consiguiente, la distribución de las moléculas por la altura también significa, al mismo tiempo, su distribución por los valores de la energía potencial. Tomando en consideración (100.3) podemos escribir la fórmula (100.2) del modo siguiente:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right), \qquad (100.4)$$

donde n es la densidad de las moléculas en aquel lugar del espacio donde la energía potencial de la molécula tiene el valor ε_p, n_0, la densidad de las moléculas en aquel lugar donde la energía potencial de la molécula es igual a cero.

De (100.4) se deduce que las moléculas se disponen con mayor densidad allí donde la energía potencial es menor y, viceversa, con menor densidad en los lugares donde su energía potencial es mayor.

En correspondencia con (100.4) la razón entre n_1 y n_2 en los puntos donde la energía potencial de la molécula tiene los valores ε_{p1} y ε_{p2}, es igual a

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}}{kT}\right). \qquad (100.5)$$

Boltzmann demostró que la distribución (100.4) es justa no sólo para el campo potencial de las fuerzas de la gravedad terrestre, sino que también para cualquier campo potencial de fuerzas respecto del conjunto de cualesquiera partículas iguales que se hallen en el estado de movimiento térmico caótico. De acuerdo con esto, la distribución (100.4) recibe el nombre de *distribución de Boltzmann*.

En tanto que la ley de Maxwell proporciona la distribución de las partículas por los valores de la energía cinética, la ley de Boltzmann nos ofrece la distribución de las partículas por los valores de la energía potencial. Para las dos distribuciones es característica la presencia del factor exponencial, en cuyo exponente se encuentra la razón entre la energía cinética o, correspondientemente, la potencial de una molécula y la magnitud que determina la energía media del movimiento térmico de la molécula.

De acuerdo con la fórmula (100.4) la cantidad de moléculas que entran en los límites del volumen $dV = dx\,dy\,dz$, dispuesto en un punto con coordenadas x, y, z, es igual a

$$dN_{x,y,z} = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(x, y, z)}{kT}\right) dx\,dy\,dz. \qquad (100.6)$$

Hemos obtenido una expresión más de la ley de distribución de Boltzmann.

Las distribuciones de Maxwell y Boltzmann pueden ser reunidas en una sola *ley de Maxwell—Boltzmann*, de acuerdo con la que el número de moléculas, las componentes de las velocidades de las cuales se encuentran en los límites de v_x, v_y, v_z a $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$, mientras que sus coordenadas en los límites de x, y, z a $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, es igual a

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_p + mv^2/2}{kT}\right) dv_x\, dv_y\, dv_z\, dx\, dy\, dz \quad (100.7)$$

(véase (98.1), (98.24) y (100.6)). Aquí A es un factor normalizante, igual a $n_0 (m/2\pi kT)^{3/2}$. Recordemos que $\varepsilon_p = \varepsilon_p (x, y, z)$ y $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

En la distribución (100.7), la energía potencial ε_p y la energía cinética $mv^2/2$ y, por consiguiente, la energía total E pueden tomar una sucesión ininterrumpida de valores. Si la energía total de la partícula puede sólo tomar una sucesión discreta de valores: $E_1, E_2, \ldots$, como sucede, por ejemplo, para la energía interna de un átomo, la distribución de Boltzmann toma la forma

$$N_i = Ae^{-E_i/kT}, \quad (100.8)$$

donde N_i es el número de partículas que se hallan en un estado con energía E_i, A, un coeficiente de proporcionalidad que debe satisfacer la condición

$$\sum N_i = A \sum e^{-E_i/kT} = N$$

(donde N es el número total de partículas en el sistema que consideramos). Poniendo en la fórmula (100.8) el valor de A hallado en la última correlación, obtenemos la expresión definitiva de la distribución de Boltzmann para el caso de valores discretos de la energía:

$$N_i = \frac{Ne^{-E_i/kT}}{\sum e^{-E_i/kT}}. \quad (100.9)$$

§ 101. Determinación del número de Avogadro por Perrin

La distribución (100.2) sirvió a Perrin (1909) de base para los experimentos realizados con el fin de determinar el número de Avogadro. Diminutas partículas sólidas, suspendidas en un líquido, se encuentran en continuo movimiento desordenado, llamado browniano (véase el § 79). La causa de dicho movimiento consiste en que al ser el tamaño de las partículas suficientemente pequeño, las cantidades de movimiento que se comunican a una partícula al chocar con las moléculas que la rodean por todos lados, no se compensan. Contra una partícula de tamaño notorio choca al mismo tiempo gran número de moléculas, de forma que el resultado sumario

de los choques con las moléculas toma bien el valor medio. Con pequeños tamaños de las partículas, comienzan a manifestarse desviaciones del valor medio de las velocidades de moléculas aisladas y del número de las moléculas que chocan. Si la velocidad y el número de moléculas que chocan con la partícula por un lado, son diferentes para las moléculas que chocan por otro lado, la cantidad de movimiento resultante que se comunica a la partícula se distinguirá de cero y la partícula se pone en movimiento en la correspondiente dirección. En el siguiente momento de tiempo la cantidad de movimiento resultante adquiere otro sentido. Por consiguiente, la partícula se desplazará permanentemente de forma desordenada.

El movimiento browniano indica que las partículas suficientemente pequeñas son incorporadas al movimiento térmico que realizan las moléculas. Al tomar parte en dicho movimiento, semejantes partículas se deben comportar como gigantescas moléculas y a ellas deben difundirse las regularidades de la teoría cinética, en particular la ley de distribución de Boltzmann (véase (100.2)).

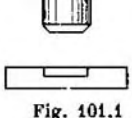


Fig. 101.1

En los experimentos de Perrin la fundamental dificultad consistía en la preparación de iguales partículas y la determinación de su masa. Haciendo múltiples veces uso del método de centrifugación, Perrin consiguió preparar una emulsión de alta homogeneidad de bolas prácticamente iguales de goma guta[1]) con radios de un orden de varias décimas de micrómetro. La emulsión se introducía en una cubeta plana de vidrio de 0,1 mm de profundidad y se estudiaba con un microscopio (fig. 101.1). Este tenía tan pequeña profundidad de campo visual que con él sólo se veían las partículas situadas en una capa horizontal de grosor aproximado igual a 1 μm. Desplazando el microscopio en dirección vertical podía ser investigada la distribución de las partículas brownianas por la altura de la capa.

Designemos por h la altura de la capa sobre el fondo de la cubeta, que vemos en el microscopio. El número de partículas que se hallan en el campo visual del microscopio determínase con la fórmula

$$\Delta N = n(h)\, S\, \Delta h,$$

donde $n(h)$ es el número de partículas brownianas por unidad de volumen a la altura h, S, el área, Δh, la profundidad del campo visual del microscopio.

Aplicando la fórmula (100.2) a las partículas brownianas, podemos escribir:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{p'h}{kT}\right),$$

[1]) Goma guta es látex condensado obtenido de los cortes hechos en la corteza de ciertos géneros de árboles que crecen en East-India y en Sri Lanka.

donde n_0 es el número de partículas por unidad de volumen para $h = 0$, p', el peso de la partícula browniana en la emulsión, es decir, tomado teniendo en cuenta las correcciones para la ley de Arquímedes.]

Después de escribir las expresiones del número de partículas ΔN para dos alturas diferentes h_1 y h_2 hallamos

$$\Delta N_1 = n_0 \exp\left(-\frac{p'h_1}{kT}\right) S\Delta h, \quad \Delta N_2 = n_0 \exp\left(-\frac{p'h_2}{kT}\right) S\Delta h.$$

Por fin, tomando el logaritmo de la razón $\Delta N_1/\Delta N_2$, llegamos a la siguiente expresión:

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{p'(h_2 - h_1)}{kT}.$$

Con ayuda de esta fórmula, según p', T, $(h_2 - h_1)$, ΔN_1 y ΔN_2 medidas, es posible determinar la constante de Boltzmann k. A continuación, dividiendo la constante de los gases R por k, se puede hallar el número de Avogadro N_A.

El valor de N_A, obtenido por Perrin empleando diversas emulsiones, se encontraba en los límites desde $6{,}5 \cdot 10^{23}$ hasta $7{,}2 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. El valor de N_A, determinado por métodos más precisos, es igual a $6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Así, pues, el valor obtenido por Perrin concuerda correctamente con los valores hallados con ayuda de otros métodos, lo que demuestra que la distribución de Boltzmann puede ser aplicada a las partículas brownianas.

§ 102. Estados macro y microscópico. Peso estadístico

El estado de un cuerpo macroscópico (o sea, formado por una enorme cantidad de moléculas) puede ser prefijado con el volumen, presión, temperatura, energía interna y otras magnitudes macroscópicas (es decir, que caracterizan el cuerpo por completo). El estado caracterizado de este modo recibe el nombre de *estado macroscópico* (*macroestado*).

El estado de un cuerpo macroscópico, caracterizado con tan elevado detalle que resultan prefijados los estados de todas las moléculas que forman el cuerpo, denomínase *estado microscópico* (*microestado*).

Todo macroestado puede ser realizado por diferentes procedimientos, cada uno de los cuales corresponde a cierto microestado del cuerpo. *El número de diversos microestados correspondientes al macroestado dado* recibe el nombre de *peso estadístico* o bien *probabilidad termodinámica* de macroestado. Así, pues, el peso estadístico resulta ser el número de procedimientos microscópicos con los que puede ser realizado el macroestado dado.

Con el fin de aclarar la noción de peso estadístico, examinemos los procedimientos con los que las moléculas de gas pueden distribuirse entre las dos mitades de un recinto que contiene gas. Sea N el número total de moléculas. Como característica del estado del gas tomemos el número de moléculas en la parte izquierda del recinto que designaremos con la letra n (correspondientemente el número de moléculas en la mitad derecha será $N - n$). El estado de una molécula aislada se caracterizará indicando en cuál de las mitades del recinto ella se encuentra. Es evidente, que semejante descripción del estado del gas y de los estados de moléculas aisladas no es en absoluto completa. No obstante, es suficiente para aclarar en este ejemplo las singularidades características de la conducta estadística de cualquier sistema macroscópico.

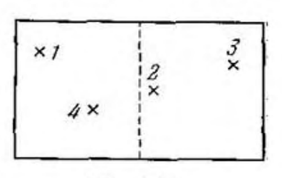


Fig. 102.1

Examinemos primeramente el caso, cuando el número total de moléculas es igual a cuatro (fig. 102.1). Con igual probabilidad cada una de las moléculas puede hallarse tanto en la mitad izquierda del recinto, como en la derecha. Por esta razón, la probabilidad de que, por ejemplo, la molécula *1* se encuentre en la mitad izquierda del recinto, es igual a 1/2. El que la molécula *1* se encuentre en la mitad izquierda del recinto y la molécula *2* también se halle en ella, son acontecimientos estadísticamente independientes. Por esta causa, la probabilidad de que las moléculas *1* y *2* se hallen en la parte izquierda del recinto es igual al producto de las probabilidades, es decir, a $(1/2)^2$. Continuando estos razonamientos, obtenemos que la probabilidad de que las cuatro moléculas se encuentren en la mitad izquierda del recinto, es igual a $(1/2)^4$.

Razonamientos análogos nos proporcionan que la probabilidad de cualquier disposición de las moléculas en el recinto (digamos, con la que la 1ª y 4ª moléculas se encontrarán en la mitad izquierda del recinto y las 2ª y 3ª, en la derecha) también es igual a $(1/2^4)$. Cada una de las disposiciones es cierto microestado del gas. De lo dicho con anterioridad se deduce que la probabilidad de todos los microestados es la misma e igual a $(1/2)^4$.

En la tabla 102.1 se aducen todos los posibles procedimientos de distribución de las moléculas entre las mitades del recinto (todos los microestados de gas). El estado caracterizado por el hecho de que, por ejemplo, en la parte izquierda del recinto se halla una molécula (indiferentemente de cuál de ellas), mientras que en la derecha, tres moléculas, es un macroestado. En la tabla vemos que a dicho macroestado corresponden 4 microestados. Por lo tanto, el peso estadístico del macroestado dado es igual a 4, mientras que la probabilidad (corriente, y no termodinámica) es igual a 4/16.

Tabla 102.1

Estado		Procedimiento para realizar el estado		Número de procedimientos para realizar el estado dado (Ω)
Número de moléculas a la izquierda	Número de moléculas a la derecha	N° de las moléculas a la izquierda	N° de las moléculas a la derecha	
0	4	—	1, 2, 3, 4	1
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4
2	2	1, 2 1, 3 1, 4 2, 3 2, 4 3, 4	3, 4 2, 4 2, 3 1, 4 1, 3 1, 2	6
3	1	1, 2, 3 1, 2, 4 1, 3, 4 2, 3, 4	4 3 2 1	4
4	0	1, 2, 3, 4	—	1
		Total de procedimientos		$2^4 = 16$

El macroestado con el que en las dos mitades del recinto se encuentra un número igual de moléculas, es realizado mediante seis microestados. De modo correspondiente, su peso estadístico es igual a 6 y la probabilidad (corriente), a 6/16.

Del ejemplo que hemos examinado se desprende que todos los microestados del sistema dado son equiprobables, por lo que el peso estadístico resulta ser proporcional a la probabilidad (corriente) del macroestado. La afirmación acerca de la equiprobabilidad de todos los microestados yace en la base de la física estadística y lleva el nombre de *hipótesis ergódica*.

De acuerdo con la tabla 102.1, en el caso de cuatro moléculas, hay una gran probabilidad (igual a 1/8) de que todas las moléculas se reúnan en una de las mitades del recinto (izquierda o derecha). Pero al aumentar el número de moléculas la situación varía de forma notoria.

Hallemos el número de procedimientos (número de microestados) con los cuales puede ser realizado un macroestado que se caracteriza por haber en la mitad izquierda del recinto n moléculas de la cantidad total N de éstas, mientras que en la derecha $(N - n)$ moléculas. Con este fin, numeremos las moléculas aduciéndoles los números desde 1 hasta N. A continuación, tomaremos las moléculas, una por una, y las colocaremos en la mitad izquierda del recinto. La primera molécula puede ser elegida con N procedimientos, la segunda con $(N - 1)$ procedimientos, la tercera con $(N - 2)$ procedimientos y, por fin, es posible elegir la n-ésima molécula con $(N - n + 1)$ procedimientos. Las restantes $(N - n)$ moléculas son colocadas en la mitad derecha del recinto.

De lo expuesto más arriba se deduce que el número z de procedimientos, con los que se puede tomar de modo aleatorio n moléculas de la cantidad total N de éstas, para la mitad izquierda del recinto, es igual a

$$z = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1).$$

Acabando la multiplicación y dividiendo este número por $(N - n)!$, hallamos la expresión

$$z = \frac{N!}{(N-n)!}. \qquad (102.1)$$

Sin embargo, no todos los z procedimientos conducen a microestados que se diferencian entre sí. Algunos microestados sólo se diferencian por el conjunto de los números de las moléculas, elegidas para cada una de las mitades del recinto, pero no por la sucesividad con la que dichas moléculas fueron elegidas. Por ejemplo, para $N = 3$ y $n = 2$ se obtienen las muestras

$$\begin{matrix} 1-2 & 2-1 & 3-1 \\ 1-3 & 2-3 & 3-2 \end{matrix}$$

De ellas, las muestras $1 - 2$ y $2 - 1$ corresponden a un mismo microestado (en la mitad izquierda las 1ª y 2ª moléculas, en la derecha, la 3ª). Lo mismo se refiere a las muestras $1 - 3$ y $3 - 1$, así como a $2 - 3$ y $3 - 2$. De este modo, las muestras que sólo se diferencian por la permutación de n números de moléculas, elegidas para la mitad izquierda del recinto (tales muestras son $n!$), corresponden a un mismo microestado. Por lo tanto, para hallar el número de microestados, con el que puede ser realizado el macroestado $(n, N - n)$, hay que dividir el número (102.1) por $n!$. Como resultado obtenemos la siguiente expresión para el peso estadístico

$$\Omega(n, N-n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \qquad (102.2)$$

Es fácil cerciorarse de que $\Omega(2, 4-2) = 6$, mientras que $\Omega(1, 4-1) = 4$ (véase la **tabla 102.1**).

En la tabla 102.2 se aducen los valores de Ω calculados con la fórmula (102.2) para el caso $N = 24$. El número completo de procedimientos de distribución de 24 moléculas entre las dos mitades del recinto es igual a $2^{24} = 16\ 777\ 216$ y sólo en dos casos todas las

Tabla 102.2

Número de moléculas		Ω	Probabilidad	Número de moléculas		Ω	Probabilidad
a la derecha	a la izquierda			a la derecha	a la izquierda		
0	24	1	$6\cdot10^{-7}$	9	15	1 307 504	$7,8\cdot10^{-2}$
1	23	24	$1,4\cdot10^{-6}$	10	14	1 961 256	0,117
2	22	276	$1,6\cdot10^{-5}$	11	13	2 496 144	0,149
3	21	2 024	$1,2\cdot10^{-4}$	12	12	2 704 156	0,161
4	20	10 626	$6,3\cdot10^{-4}$	13	11	2 496 144	0,149
5	19	42 504	$2,5\cdot10^{-3}$	...	...	. . . .	. . . . .
6	18	134 596	$8\cdot10^{-3}$	23	1	24	$1,4\cdot10^{-6}$
7	17	346 104	$2\cdot10^{-2}$	24	0	1	$6\cdot10^{-7}$
8	16	735 471	$4,4\cdot10^{-2}$				
En total $2^{24} = 16\ 777\ 216$ procedimientos							

moléculas resultan estar concentradas en una de las mitades del recinto. La probabilidad de semejante acontecimiento es, aproximadamente, 10^{-7}. En cuatro centímetros cúbicos de aire hay cerca de 10^{20} moléculas. La probabilidad de que todas estas moléculas se acumulen en una de las mitades del recinto es igual a dos dividido por dos a la 10^{20} potencia, lo que constituye unos $10^{-3\cdot10^{19}}$. Esta probabilidad es tan pequeña que, prácticamente, puede ser considerada igual a cero.

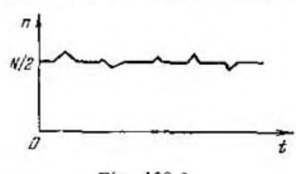


Fig. 102.2

En la fig. 102.2 está representada una gráfica que muestra cómo varía con el transcurso del tiempo el número de moléculas n en una de las mitades del recinto. Este número oscila cerca de un valor medio, igual a $N/2$.

Las desviaciones casuales de los valores de cierta magnitud física x de su valor medio $\langle x\rangle$ reciben el nombre de *fluctuaciones* de esta magnitud. Designando la fluctuación con Δx, hallamos que

$$\Delta x = x - \langle x\rangle. \qquad (102.3)$$

La magnitud media aritmética (102.3) es nula. En realidad

$$\langle \Delta x\rangle = \langle (x - \langle x\rangle)\rangle = \langle x\rangle - \langle x\rangle = 0.$$

Por esta causa, en calidad de característica de las fluctuaciones se toma *la fluctuación media cuadrática*, igual a

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}. \qquad (102.4)$$

Es más demostrativa la fluctuación relativa de la magnitud x, que se determina con la razón

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}}{\langle x\rangle}. \qquad (102.5)$$

En física estadística se demuestra que la fluctuación relativa de una magnitud aditiva (es decir, de semejante magnitud, cuyo valor para un cuerpo es igual a la suma de los valores de sus partes aisladas) es razón inversa a la raíz cuadrada del número N de las moléculas que forman el cuerpo:

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}}{\langle x\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (102.6)$$

De acuerdo con los datos de la tabla 102.1 calculemos la fluctuación relativa del número de moléculas en la mitad izquierda del recinto. Realicemos los cálculos con ayuda de la fórmula (93.5).

Tabla 102.3

$n-N/2$	P
-2	1/16
-1	4/16
0	6/16
$+1$	4/16
$+2$	1/16

En la tabla 102.3 se aducen los valores de las fluctuaciones y su probabilidad P. En correspondencia con dichos datos

$$\langle(n-N/2)^2\rangle = (-2)^2\cdot 1/16 + (-1)^2\cdot 4/16 + \\ + (0)^2\cdot 6/16 + (+1)^2\cdot 4/16 + (+2)^2\cdot 1/16 = 1.$$

Por consiguiente, la fluctuación media cuadrática es igual a $\sqrt{1} = 1$, mientras que la fluctuación relativa, a 1/2 (el valor medio de n es 2). Cálculos análogos, realizados con los datos de la tabla 102.2, para la fluctuación media cuadrática nos proporcionan el valor 2,45, en tanto que para la fluctuación relativa, el valor 0,204. Es fácil cerciorarse de que

$$0{,}5 : 0{,}204 = \sqrt{24 : 4}. \qquad (102.7)$$

Esta correlación concuerda con la fórmula (102.6).

De la tabla 102.2 se desprende que las desviaciones del número medio de moléculas (igual a 12) a no más de 2 moléculas se realizan con una probabilidad igual a 0,7, mientras que las desviaciones a no más de 3 moléculas, con una probabilidad de 0,85. Si el número de moléculas pudiera ser fraccionario, sería posible decir que la mayor parte del tiempo el gas se encontraría en tales estados, en los que las desviaciones del número de moléculas del medio no superarían la fluctuación media cuadrática, es decir, 2,45.

Al confeccionar una proporción análoga a (102.7) para $N = 4$ y $N = 10^{20}$ obtenemos una fluctuación relativa (f. r.) del número de moléculas en la mitad izquierda del recinto, cuando $N = 10^{20}$. Esta proporción tiene la forma

$$0{,}5 : \text{f. r.} = \sqrt{10^{20} : 4},$$

de donde la f. r. $= 10^{-10}$. El resultado obtenido quiere decir que el valor del número de las moléculas en una de las mitades del recinto sufre variaciones que, en lo fundamental, no superan una unidad de la décima cifra significativa.

Hemos examinado las fluctuaciones del número de moléculas en una de las mitades del recinto. También sufren fluctuaciones, es decir, desviaciones de los valores medios, otras características macroscópicas, tales como la presión, la densidad del gas en diversos puntos del espacio, etc.

El macroestado de un sistema es equilibrado, cuando éste no tiende a variar con el transcurso del tiempo. Claro está, que la carencia de semejante tendencia se expresará con la mayor fuerza en el macroestado más probable de todos los que son posibles para el sistema dado. La probabilidad de un estado es proporcional a su peso estadístico. Por esta razón, podemos definir el estado de equilibrio como un estado con el máximo peso estadístico.

Un sistema que está en estado de equilibrio, de vez en cuando, se desvía de forma espontánea del equilibrio. Sin embargo, estas desviaciones son insignificantes y de poca duración. La parte aplastante del tiempo, el sistema se halla en estado de equilibrio, caracterizado por el peso estadístico máximo.

La física estadística revela la naturaleza de los procesos irreversibles. Supongamos que en principio el gas estaba en la mitad izquierda del recinto, separada por un tabique de la derecha vacía. Si se quita el tabique, el gas se propaga espontáneamente por todo el recinto. Este proceso será irreversible, ya que la probabilidad de que como resultado del movimiento térmico todas las moléculas se reúnan en una de las mitades del recinto, como hemos visto, es prácticamente nula. Por lo tanto, sin influjo exterior el gas no puede por sí sólo concentrarse de nuevo en la mitad izquierda del recinto.

Así, pues, el proceso de propagación del gas por todo el recinto resulta ser irreversible a causa de que el proceso inverso a él es

poco probable. Esta conclusión puede ser también difundida a otros procesos. Todo proceso irreversible es un proceso tal, para el que el proceso inverso es en extremo poco probable.

§ 103. Entropía

En el parágrafo anterior fue establecido que la probabilidad de un macroestado (en adelante diremos simplemente estado) es proporcional a su peso estadístico Ω, es decir, al número de procedimientos microscópicos con los que puede ser realizado el macroestado prefijado. Por esto, como característica de la probabilidad del estado, sería posible tomar ese mismo número, o sea, Ω. Pero semejante característica no tendría la propiedad de aditividad. Para cerciorarnos de esto, dividamos el sistema dado en dos subsistemas que, prácticamente, no están en interacción. Sea que dichos subsistemas se hallen en estados con pesos estadísticos Ω_1 y Ω_2. El número de procedimientos con el que puede realizarse el correspondiente estado del sistema, es igual al producto del número de procedimientos con los que pueden ser realizados los estados de cada uno de los subsistemas por separado:

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2. \qquad (103.1)$$

De aquí sigue que Ω en realidad no es una magnitud aditiva.

Tomando los logaritmos de la correlación (103.1), hallamos

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2. \qquad (103.2)$$

De (103.2) se deduce que $\ln \Omega$ es una magnitud aditiva. Tratar magnitudes de este tipo es mucho más sencillo y cómodo. Por esta razón, como característica de la probabilidad del estado se toma la magnitud S, proporcional al logaritmo del peso estadístico. Por una causa que aclararemos más adelante, el coeficiente de proporcionalidad se elige igual a la constante de Boltzmann k. La magnitud que definimos mediante semejante procedimiento

$$S = k \ln \Omega \qquad (103.3)$$

recibe el nombre de *entropía* del sistema.

De lo dicho en el parágrafo anterior se desprenden las siguientes propiedades de la entropía:

1. La entropía de un sistema aislado crece al transcurrir una transformación irreversible. En efecto, un sistema aislado (o sea, dejado de sí mismo) pasa de los estados menos probables a los más probables, lo que se acompaña del crecimiento de la magnitud (103.3).

2. La entropía es máxima en un sistema que se encuentra en estado de equilibrio.

Remarquemos una vez más que las afirmaciones expresadas no tienen carácter absolutamente riguroso. Por ejemplo, la entropía de un sistema en estado de equilibrio, sufre fluctuaciones negativas insignificantes de corta duración. No obstante, dichas fluctuaciones son tan pequeñas, que podemos considerar, prácticamente, que la entropía es constante e igual al valor máximo.

La afirmación de que *la entropía de un sistema aislado sólo puede crecer* (o que al alcanzar el valor máximo queda constante) lleva el nombre de *ley de crecimiento de la entropía* o bien *segundo principio de termodinámica*. Con otras palabras podemos decir que la entropía de un sistema aislado no puede decrecer.

Así, pues, cuando en un sistema aislado transcurre una transformación irreversible, la entropía crece, es decir, se cumple la correlación

$$dS > 0. \tag{103.4}$$

Con el fin de aclarar cómo se conduce la entropía en un sistema no aislado, hay que establecer la ligazón entre el incremento de la entropía dS y la cantidad de calor comunicado al sistema $d'Q$. Como la entropía es una función de estado, ella deberá determinarse por los parámetros de estado del cuerpo (o del sistema). El gas ideal posee las más sencillas propiedades. Su estado de equilibrio se define por completo prefijando dos parámetros, por ejemplo, el volumen V y la temperatura T. Intentemos hallar la forma de la función $S = S(V, T)$ para un gas ideal monoatómico.

Consideremos un gas ideal monoatómico en equilibrio que se encuentra en un depósito de volumen V. Vamos a considerar que no hay campos de fuerza exteriores. El número de moléculas del gas es igual a N, su temperatura, a T.

El macroestado del gas se caracteriza por los valores de los parámetros V y T, el microestado se determina prefijando las coordenadas y las velocidades de todas las N moléculas. Las distribuciones de las moléculas por las coordenadas y las velocidades son independientes. Por esta razón, el peso estadístico Ω del macroestado puede ser presentado como el producto del factor Ω_{esp}, que determina la cantidad de diversas distribuciones de las moléculas en el espacio, y por el factor Ω_{vel}, que determina el número de diferentes distribuciones de las moléculas por las velocidades:

$$\Omega = \Omega_{esp} \cdot \Omega_{vel}. \tag{103.5}$$

Efectivamente, cada una de las Ω_{esp} distribuciones en el espacio puede realizarse en conjunto con cualquiera de las Ω_{vel} distribuciones por las velocidades. De aquí se deduce la fórmula (103.5).

Así, pues, en el caso que estudiamos, la expresión para la entropía tiene la forma

$$S = k \ln \Omega = k \ln \Omega_{esp} + k \ln \Omega_{vel}. \tag{103.6}$$

De esta fórmula sigue que la definición de la entropía de un gas ideal se reduce a hallar los números Ω_{esp} y Ω_{vel}. Después de aclarar cómo estos números dependen de los parámetros del gas V y T, hallaremos la entropía como función de dichos parámetros.

Para determinar el número Ω_{esp}, dividamos el volumen V, ocupado por el gas, en células cúbicas iguales. Elijamos el volumen de una célula ΔV de forma que el número de éstas

$$r = V/\Delta V \tag{103.7}$$

sea mucho menor que el número de moléculas N ($r \ll N$). Entonces, en cada célula, por término medio, habrá muchas moléculas. Más abajo veremos que la dimensión de las células (salvo la condición

1ra cel 2da cel ... r-ésima cel
1 2 . n_1 1 2 ... n_2 ... 1 2 ... n_r

Fig. 103.1

$r \ll N$) no influye en alto grado sobre la expresión para la entropía.

Examinemos un macroestado caracterizado por el hecho de que en la 1ª célula hay n_1 moléculas, en la 2ª, n_2 moléculas, ..., en la r-ésima célula, n_r moléculas ($\sum n_i = N$). Hallemos el número de procedimientos (o sea, el número de microestados) con los que se puede realizar semejante macroestado. Con este fin, fijemos en el interior de las células los «lugares» en los que vamos a «colocar» las moléculas al realizar su distribución por las células (en la fig. 103.1 estos lugares se han marcado con puntos).

Es posible disponer las moléculas por los lugares indicados en la fig. 103.1 con ayuda de $N!$ procedimientos ($N!$ es el número de reinstalaciones de N moléculas por N lugares). Sin embargo, las reinstalaciones con las que sólo varía el orden de disposición de las moléculas por n_1 lugares de la 1ª célula (semejantes reinstalaciones pueden ser $n_1!$), o bien la reinstalación de las moléculas por n_2 lugares de la 2ª célula (semejantes reinstalaciones pueden ser $n_2!$), etc., no conduce a un nuevo microestado. Recordemos que los microestados por separado sólo se distinguen por los números de las moléculas que penetran a diversas células. Fijemos los números n_1 de las moléculas que se encuentran en la 1ª célula. A cada una de las posibles distribuciones del resto de las moléculas por otras células corresponden $n_1!$ diferentes disposiciones de las moléculas en la 1ª célula. Por esto, dividiendo el número total de reinstalaciones $N!$ por $n_1!$, excluimos de la consideración aquellas reinstalaciones que sólo se diferencian por el procedimiento de disposición de las moléculas en la 1ª célula. Después, dividiendo $N!/n_1!$ por $n_2!$ excluimos de la consideración las reinstalaciones que sólo se dife-

rencian por el procedimiento de disposición de las moléculas en la 2ª célula. Si continuamos este proceso llegaremos a la expresión

$$\Omega_{esp} = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}, \qquad (103.8)$$

que nos proporciona el número de distribuciones de las moléculas por las células, que sólo se distinguen por los números de las moléculas que se hallan en distintas células (comp. con (102.2)). Este número es la parte «espacial» del peso estadístico.

Como por suposición no hay campos de fuerzas exteriores, en estado de equilibrio las moléculas se distribuirán por el volumen con densidad constante. Por consiguiente, los números n_1, n_2, . . ., n_r resultan ser, por término medio, de la misma magnitud e iguales a $n = N/r$ (recordemos que r es el número de células). De este modo, para un estado de equilibrio la parte «espacial» del peso estadístico es igual a

$$\Omega_{esp} = \frac{N!}{(n!)^r}.$$

Al tomar el logaritmo

$$\ln \Omega_{esp} = \ln N! - r \ln n!. \qquad (103.9)$$

De acuerdo con la fórmula de Stirling (véase el Apéndice II)

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \qquad (103.10)$$

Haciendo uso de esta fórmula, transformamos (103.9) del modo siguiente:

$$\ln \Omega_{esp} \approx N \ln N - N - r(n \ln n - n) = N \ln N - N \ln n =$$

$= N \ln (N/n)$(hemos tenido en cuenta que $rn = N$). La relación N/n es igual a $V/\Delta V$. Por lo tanto,

$$\ln \Omega_{esp} = N \ln (V/\Delta V) = N \ln V - N \ln \Delta V. \qquad (103.11)$$

Pasemos a hallar Ω_{vel}. Introduzcamos un espacio por cuyos ejes se trazan las componentes de las velocidades de las moléculas (espacio de velocidades). Dividamos este espacio en iguales células cúbicas de volumen $\Delta\Lambda$. Más adelante se aclarará que el valor de $\Delta\Lambda$, como el de ΔV, no tiene importancia, sólo es importante que el volumen $\Delta\Lambda$ sea lo suficientemente grande para que en él «quepan» muchas moléculas.

Con estado de equilibrio, la densidad ρ de los puntos que representan las velocidades de las moléculas, se determina por la función de distribución de Maxwell (véase (98.1), (98.14) y (98.24)):

$$\rho = N f(v_x, v_y, v_z) = NA^3 \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right) =$$
$$= N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Designemos la velocidad que corresponde a la i-ésima célula con $\mathbf{v}_i$ y obtengamos para la «densidad de las moléculas» en dicha célula el valor

$$\rho_i = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv_i^2}{2kT}\right).$$

Por fin, multiplicando la densidad ρ_i por el volumen de la célula $\Delta\Lambda$, obtenemos el número de moléculas n_i que entran en la célula i-ésima:

$$n_i = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv_i^2}{2kT}\right)\Delta\Lambda. \qquad (103.12)$$

Por analogía con (103.8) llegamos a la conclusión de que el número de procedimientos con los que las moléculas pueden ser distribuidas por las células con los números n_i prefijados, es igual a

$$\Omega_{\text{vel}} = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \,\ldots\, n_i! \ldots}. \qquad (103.13)$$

A diferencia de (103.8), ahora el número de células es infinitamente grande. No obstante, para las células suficientemente alejadas del eje de coordenadas, el número n_i, prácticamente, es cero. Tomando los logaritmos de la expresión (103.13), obtenemos

$$\ln\Omega_{\text{vel}} = \ln N! - \sum_i \ln n_i!$$

Haciendo uso de la fórmula (103.10), hallamos

$$\ln\Omega_{\text{vel}} \approx N\ln N - N - \sum_i (n_i \ln n_i - n_i) =$$

$$= N\ln N - \sum_i n_i \ln n_i \qquad (103.14)$$

$(\sum n_i = N)$.

De acuerdo con (103.12)

$$\ln n_i = \ln N + \ln\Delta\Lambda + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{m}{2\pi k}\right) - \frac{3}{2}\ln T - \frac{mv_i^2}{2kT}.$$

La sustitución de esta expresión en (103.14) nos conduce a la fórmula

$$\ln\Omega_{\text{vel}} = N\ln N - \left(\ln N + \ln\Delta\Lambda + \frac{3}{2}\ln\frac{m}{2\pi k} - \frac{3}{2}\ln T\right)\sum_i n_i +$$

$$+ \frac{1}{kT}\sum_i n_i \frac{mv_i^2}{2}. \qquad (103.15)$$

La expresión $\sum n_i \frac{mv_i^2}{2}$ es equivalente a $N\left\langle\frac{mv^2}{2}\right\rangle = N\frac{3}{2}kT$, la suma $\sum n_i$ es igual a N. Tomando esto en consideración reescribimos

(103.15) de la forma siguiente:

$$\ln \Omega_{vel} = N \ln N - N \ln N - N \ln \Delta\Lambda - \frac{3}{2} N \ln \frac{m}{2\pi k} +$$
$$+ \frac{3}{2} N \ln T + \frac{1}{kT} N \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} N \ln T - N \ln \Delta\Lambda +$$
$$+ \frac{3}{2} N \left[1 - \ln \frac{m}{2\pi k}\right] = \frac{3}{2} N \ln T - N \ln \Delta\Lambda + \frac{3}{2} N\alpha. \qquad (103.16)$$

Hemos designado aquí con α la expresión entre paréntesis angulares que no contiene los parámetros de estado del gas.

Haciendo N igual al número de Avogadro N_A en (103.11) y (103.16) y, a continuación, poniendo dichas expresiones en (103.6), llegaremos a la fórmula para la entropía de un mol de un gas ideal monoatómico:

$$S_m = kN_A \ln V - kN_A \ln \Delta V + \frac{3}{2} kN_A \ln T - kN_A \ln \Delta\Lambda + \frac{3}{2} kN_A \alpha.$$

El producto kN_A es igual a la constante de los gases R. Por lo tanto,

$$S_m = R \ln V + \frac{3}{2} R \ln T - R \ln (\Delta V \cdot \Delta\Lambda) + \frac{3}{2} R\alpha.$$

Introduciendo la designación

$$S_0 = -R \ln (\Delta V \cdot \Delta\Lambda) + \frac{3}{2} R\alpha \qquad (103.17)$$

y tomando en consideración que $^3/_2 R$ es la capacidad calorífica molar de un gas monoatómico con volumen constante C_V, llegamos a la fórmula definitiva:

$$S_m = R \ln V + C_V \ln T + S_0. \qquad (103.18)$$

Ésta determina la entropía molar de un gas ideal, monoatómico[1]) como función de los parámetros de estado V y T. Haciendo uso de la ecuación de estado, podemos pasar a la expresión para determinar la entropía con ayuda de otros parámetros, por ejemplo, con V y p.

En (103.17) vemos que la elección de las dimensiones de las células ΔV y $\Delta\Lambda$ sólo influye sobre el valor de la constante aditiva S_0 con la precisión hasta la que se determina la entropía con la fórmula (103.18).

Al comunicar al gas un calor $d'Q$ variarán o T (siendo constante V), o bien V (siendo constante T), o ambos parámetros T y V. En correspondencia, también variará la entropía. Para ligar dicha variación con $d'Q$, derivemos la expresión (103.18) y multipliquémos-

---

[1]) En el § 107 será mostrado que la fórmula (103.18) es válida para un gas ideal con moléculas multiatómicas.

la por T. Como resultado obtenemos

$$T\,dS_m = \frac{RT}{V_m}\,dV_m + C_V\,dT$$

(para remarcar que se trata de un mol de gas, hemos dado a V el índice «m»).

El sumando $C_V\,dT$ proporciona el incremento de la energía interna del gas dU_m. Suponiendo que el proceso de comunicación del calor $d'Q$ es reversible, podemos representar el sumando $(RT/V_m)\,dV_m$ en la forma $p\,dV_m = d'A$. De este modo llegamos a la correlación

$$T\,dS_m = p\,dV_m + dU_m.$$

A causa de la aditividad de S, V y U una correlación análoga tiene lugar para la masa del gas tomada al azar

$$T\,dS = p\,dV + dU = d'A + dU.$$

De acuerdo con el primer principio de termodinámica el segundo miembro de esta ecuación es $d'Q$. Así, que

$$T\,dS = d'Q.$$

De aquí

$$dS_{gim} = \frac{d'Q}{T} \text{ (transformación reversible)} \qquad (103.19)$$

(el índice «gim» significa «gas ideal monoatómico»).

La fórmula (103.19) ha sido obtenida considerando un gas ideal monoatómico. Sin embargo, es fácil difundirla a cualquier sistema termodinámico. Supongamos que tenemos un sistema aislado en estado de equilibrio, en cuya composición, además de un gas ideal monoatómico, entran otros cuerpos, el conjunto de los cuales llamaremos subsistema. Todas las partes del sistema tienen igual temperatura (en caso contrario el estado del sistema no será de equilibrio).

A causa de la aditividad, la entropía del sistema S_{sist} puede ser representada en la forma

$$S_{sist} = S_{subs} + S_{gim},$$

donde S_{subs} es la entropía del subsistema, S_{gim}, la entropía de un gas ideal monoatómico. Sea que la temperatura del gas ha sufrido una fluctuación dT infinitamente pequeña. Por esta causa, el gas recibirá del subsistema una cantidad de calor $d'Q_{gim}$. En tal caso, el subsistema recibirá un calor $d'Q_{subs} = -d'Q_{gim}$. A causa de la pequeñez de dT, podemos considerar que esta transformación es reversible. Por consiguiente, la entropía del gas obtendrá el incremento $dS_{gim} = d'Q_{gim}/T$.

Al transcurrir en un sistema aislado una transformación reversible, la entropía del sistema debe quedar constante. De aquí se desprende, que

$$dS_{sist} = dS_{subs} + dS_{gim} = 0.$$

Teniendo en cuenta el valor de dS_{gim}, obtenemos la siguiente expresión para la entropía del subsistema

$$dS_{\text{subs}} = -dS_{\text{gim}} = \frac{-d'Q_{\text{gim}}}{T} = \frac{d'Q_{\text{subs}}}{T}.$$

De este modo, para un conjunto de cuerpos arbitrarios también es justa la fórmula

$$dS = \frac{d'Q}{T} \text{ (transformación reversible).} \qquad (103.20)$$

Aquí $d'Q$ es la cantidad de calor que el sistema ha recibido durante la transformación reversible, T, la temperatura del sistema.

Cabe señalar, que en tanto que $d'Q$ no es una diferencial completa, la expresión (103.20) sí lo es (la entropía es función del estado).

Ahora, podemos explicar por qué en la fórmula (103.3) se toma como coeficiente de proporcionalidad la constante de Boltzmann k. Gracias a este coeficiente la proporcionalidad entre dS y $d'Q/T$ resulta ser igual a la unidad (véase (103.20)).

Un estado que se realiza con un número relativamente pequeño de procedimientos recibe el nombre de *ordenado* o *no casual*, mientras que el estado que se realiza con ayuda de muchos procedimientos diferentes, denomínase *desordenado* o *casual*. Es decir, la entropía es la medida cuantitativa del grado de desorden molecular del sistema. Esta circunstancia permite comprender el sentido de la correlación (103.20). Cuando comunicamos calor al sistema, esto conduce al aumento del movimiento térmico de las moléculas y, por lo tanto, al crecimiento del grado de desorden en el sistema. Mientras más alta sea la temperatura, es decir, mayor la energía interna del sistema, relativamente menor será la parte del desorden condicionado por la comunicación de la cantidad dada de calor $d'Q$.

Para que la igualdad (103.20) sea justa, tiene gran importancia la reversibilidad de la transformación, durante la que al sistema se le transmite el calor $d'Q$. Si dicha cantidad de calor $d'Q$ se comunica al sistema en el transcurso de una transformación irreversible, la entropía crece tanto como a consecuencia de la comunicación del calor, como también a consecuencia de la irreversibilidad de la transformación. Por esta razón, tiene lugar la desigualdad

$$dS > \frac{d'Q}{T} \text{ (transformación irreversible).} \qquad (103.21)$$

Con $d'Q = 0$ esta desigualdad se convierte en la correlación (103.4). En la fórmula (103.21) se entiende por T la temperatura del recinto del que el sistema recibe el calor $d'Q$. Durante una transformación irreversible, la temperatura del sistema puede no tener un valor determinado, ya que el estado de aquél no es de equilibrio.

Las fórmulas (103.20) y (103.21) pueden ser reunidas si escribimos que

$$dS \geqslant \frac{d'Q}{T}. \qquad (103.22)$$

El signo de igualdad se refiere a las transformaciones reversibles, el de desigualdad, a las irreversibles.

La correlación (103.22) es la base para las aplicaciones termodinámicas del concepto de entropía. Dichas aplicaciones serán tratadas en el siguiente capítulo.

Por regla, con el cero absoluto todo cuerpo[1]) se halla en el estado fundamental, con el que su peso estadístico es igual a uno ($\Omega = 1$). En tal caso, la fórmula (103.3) proporciona un valor de la entropía igual a cero. De aquí se desprende que *la entropía de todo cuerpo tiende a cero cuando la temperatura también tiende a cero*:

$$\lim_{T \to 0} S = 0. \qquad (103.23)$$

Esta afirmación es el contenido del llamado *teorema de Nernst*. A veces, la afirmación (103.23) recibe el nombre de *tercer principio de termodinámica*.

[1]) Esta regla tiene exclusiones que no vamos a considerar.

CAPÍTULO XII

TERMODINÁMICA

§ 104. Leyes fundamentales de termodinámica

Al principio, la termodinámica fue creada como la ciencia acerca de las transformaciones del calor en trabajo. Sin embargo, las leyes en las que se basa la termodinámica, tienen un carácter tan general, que en la actualidad los métodos termodinámicos se aplican con gran éxito para la investigación de múltiples transformaciones (procesos) físicas y químicas y para el estudio de las propiedades de la sustancia y las radiaciones. Como ya indicamos en el § 79, al estudiar las propiedades y los procesos de transformación de la sustancia, la termodinámica no entra en detalles del cuadro microscópico de los fenómenos. Ésta considera los fenómenos apoyándose en las leyes (principios) fundamentales determinadas de la experiencia. Por esta causa, las deducciones a las que llega la termodinámica, tienen el mismo grado de certeza que las leyes sobre las que se basa. En lo que se refiere a estas últimas, ellas son la generalización de una enorme cantidad de datos experimentales.

La base de termodinámica está constituida por sus dos principios. El primero de ellos establece las correlaciones conmutativas que tienen lugar con las transformaciones de la energía de un género a otro. El segundo principio determina las condiciones con las que son posibles dichas transformaciones, es decir, define las posibles direcciones de ellas.

El primer principio de termodinámica afirma que *la cantidad de calor comunicada a un sistema se consume para el incremento de la energía interna del sistema y para que el sistema realice trabajo sobre los cuerpos exteriores*:

$$Q = U_2 - U_1 + A \tag{104.1}$$

o bien, en forma diferencial:

$$d'Q = dU + d'A \tag{104.2}$$

(véanse (83.2) y (83.4)).

A veces, el primer principio de termodinámica se enuncia de la forma siguiente: *el móvil perpetuo de primera especie es imposible, es decir, no puede existir un motor en funcionamiento periódico que realice mayor cantidad de trabajo que la energía que recibe del exterior.*

Todo motor es un sistema que múltiples veces realiza cierto proceso circular (ciclo). Supongamos que durante el ciclo el medio de trabajo (por ejemplo, un gas), primeramente, se expande hasta el volumen V_2, después se comprime hasta el volumen inicial V_1

(fig. 104.1). Para que el trabajo durante el ciclo sea mayor que cero, la presión (y, por lo tanto, la temperatura) en el proceso de expansión debe ser mayor que durante la compresión. Con este fin, en el transcurso de la expansión hay que transmitir al medio de trabajo calor, mientras que durante la compresión hay que retirar el calor de él.

Después de realizar el ciclo, el medio de trabajo retorna al estado inicial. Por esta causa, la energía interna en el transcurso del ciclo es nula. La cantidad de calor comunicada al medio de trabajo por ciclo, es igual a $Q_1 - Q_2'$, donde Q_1 es el calor que recibe el medio de trabajo durante la expansión; Q_2', el calor que cede durante la compresión. El trabajo A realizado en el transcurso del ciclo es igual al área del ciclo (véase el § 84). Así, pues, la expresión (104.1), escrita para un ciclo, tiene la forma

$$A = Q_1 - Q_2'. \qquad (104.3)$$

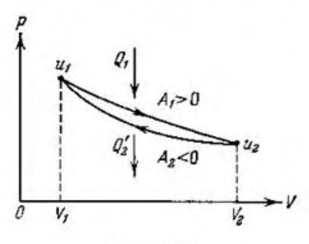


Fig. 104.1

Un motor en funcionamiento periódico, que realiza trabajo a cuenta del calor recibido del exterior recibe el nombre de *máquina térmica*. Como sigue de (104.3) no todo el calor recibido del exterior Q_1 se emplea para realizar trabajo útil. Para que el motor trabaje por ciclos, una parte del calor, igual a Q_2', deberá retornar al medio exterior, por lo que no puede ser utilizada como es debido (o sea, para realizar trabajo útil). Es evidente, que mientras con mayor plenitud transforma la máquina térmica el calor Q_1 que recibe del exterior en el trabajo útil A, mejor será la máquina. Por esta razón, se ha aceptado caracterizar la máquina térmica por *el rendimiento* η, que se determina como el cociente entre el trabajo A que se realiza durante el ciclo y el calor que recibe durante dicho ciclo Q_1:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \qquad (104.4)$$

Tomando en consideración la correlación (104.3), la expresión del rendimiento puede ser escrita así:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}. \qquad (104.5)$$

De la definición del rendimiento se desprende que éste no puede ser mayor que uno.

Al invertir el ciclo representado en la fig. 104.1 obtenemos el ciclo de una máquina frigorífica. Durante un ciclo, semejante máquina toma de un cuerpo a temperatura T_2 la cantidad de calor Q_2 y cede a un cuerpo a temperatura más alta T_1 la cantidad de calor Q_1'.

En la máquina, en el transcurso del ciclo, deberá realizarse el trabajo A'. La eficacia de la máquina frigorífica es caracterizada por el coeficiente de refrigeración que se determina como la razón entre el calor Q_2, tomado del cuerpo que se refrigera, y el trabajo A' que se consume para poner la máquina en funcionamiento:

$$\text{coeficiente de refrigeración} = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1' - Q_2}.$$

Como el primero, el segundo principio de termodinámica puede ser enunciado con ayuda de varios procedimientos. Una de las enunciaciones fue ofrecida en el § 103. Consiste en la afirmación de que *la entropía de un sistema aislado no puede decrecer*:

$$dS \geqslant 0. \qquad (104.6)$$

Clausius enunció el segundo principio de termodinámica del modo siguiente: *son imposibles tales transformaciones en las que el único resultado final fuese el paso del calor de un cuerpo poco caliente a otro cuerpo más caliente.* No debemos entender el segundo principio como que éste prohíbe el paso del calor de un cuerpo menos caliente a otro más caliente. Precisamente, en la máquina frigorífica se realiza semejante transición. Pero ésta no es el único resultado de la transformación, que se acompaña de variaciones en los cuerpos circundantes, relacionadas con el trabajo A' sobre el sistema.

Mostremos que la transformación imaginaria, que contradice al segundo principio en la enunciación de Clausius, ejecutada en un sistema aislado se acompaña de la disminución de la entropía. De esta manera, al mismo tiempo, será mostrada la equivalencia de las enunciaciones del segundo principio de Clausius y de la física estadística, de acuerdo con las que la entropía de un sistema aislado no puede decrecer.

Previamente hagamos la siguiente observación. Supongamos que cierto cuerpo intercambia calor con otro cuerpo que vamos a denominar *foco calorífico*. Sea infinitamente grande la capacidad calorífica del foco. Esto quiere decir que si éste recibe o cede una cantidad finita de calor, su temperatura no variará. La transformación que transcurre en el cuerpo, acompañada de intercambio de calor con el foco, sólo puede ser reversible cuando durante dicha transformación la temperatura del cuerpo sea igual a la del correspondiente foco calorífico. En efecto, si, por ejemplo, el cuerpo recibe calor de un foco a temperatura T_1, pero él tiene temperatura menor que T_1, al transcurrir esta misma transformación en sentido inverso, el cuerpo puede retornar al foco caliente, el calor recibido de él sólo en el caso si su temperatura es, en todo caso, no menor que T_1. Por consiguiente, durante el transcurso directo e inverso de la transformación la temperatura del cuerpo será diferente, en los dos casos el cuerpo pasa por diferentes secuencias de estado (caracterizadas por distintas

temperaturas) y la transformación que consideramos será irreversible.

Así, pues, la transformación acompañada de transferencia de calor sólo puede ser reversible cuando al recibir calor y cediéndolo de nuevo al foco caliente durante la inversión de la transformación, el cuerpo tiene una misma temperatura, igual a la del foco. Hablando en rigor, al recibir calor la temperatura del cuerpo debe ser en un valor infinitesimal menor que la del foco (en caso contrario el calor no pasará del foco al cuerpo), mientras que al ceder calor la temperatura del cuerpo debe ser en un valor infinitesimal mayor que la del foco.

Por lo tanto, la única transformación reversible que se acompaña del intercambio de calor con el foco calorífico, cuya temperatura queda invariable, es la transformación isotérmica, que transcurre a la temperatura del foco.

Examinemos un sistema aislado compuesto de dos cuerpos con igual capacidad calorífica C. Sea que el cuerpo B transmite al cuerpo A cierta cantidad de calor Q, a causa de lo cual la temperatura de A aumenta del valor T_{A0} a T_A, mientras que la temperatura de B disminuye del valor T_{B0} a T_B ($T_B < T_{B0} < T_{A0} < T_A$). Semejante transformación contradice al segundo principio en la enunciación de Clausius. Hallemos la variación de la entropía en este caso.

Durante el transcurso de la indicada transformación se produce el intercambio de calor entre los cuerpos a temperaturas desiguales. De acuerdo con lo dicho más arriba semejante transformación es irreversible. Pero la fórmula (103.20) sólo es aplicable a las trans formaciones reversibles. Con el fin de encontrar la variación de la entropía durante una transformación irreversible se obra del modo siguiente. Considérase cierta transformación reversible que conduce el sistema al mismo estado final que una transformación irreversible, calculando la variación de la entropía para esta transformación con la fórmula

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T} \qquad (104.7)$$

(véase (103.20)).

De acuerdo con lo dicho más arriba, estudiemos una transformación reversible en el transcurso de la cual el cuerpo B cede el calor Q a porciones $d'Q$ sucesivamente a una serie de focos caloríficos a temperaturas que tienen todos los valores desde T_{B0} hasta T_B, mientras que el cuerpo A recibe el calor Q a porciones $d'Q$ de una serie de focos a temperaturas desde T_{A0} hasta T_A. Como resultado, el sistema pasará de modo reversible del estado en el que los cuerpos tenían las temperaturas T_{A0} y T_{B0} al estado en el que las temperaturas de los cuerpos son iguales a T_A y T_B. Durante tal transformación

el incremento de la entropía será

$$\Delta S=\Delta S_A+\Delta S_B=\int_{T_{A0}}^{T_A}\frac{C\,dT}{T}+\int_{T_{B0}}^{T_B}\frac{C\,dT}{T}=$$

$$=C\ln\frac{T_A}{T_{A0}}+C\ln\frac{T_B}{T_{B0}}=C\ln\frac{T_AT_B}{T_{A0}T_{B0}}.$$

Tomando en consideración que $T_A=T_{A0}+\alpha$, $T_B=T_{B0}-\alpha$ ($\alpha=Q/C>0$), representemos ΔS en la forma

$$\Delta S=C\ln\frac{(T_{A0}+\alpha)\,(T_{B0}-\alpha)}{T_{A0}T_{B0}}=C\ln\left(1-\frac{\alpha\,(T_{A0}-T_{B0})}{T_{A0}T_{B0}}-\frac{\alpha^2}{T_{A0}T_{B0}}\right).$$

Como $T_{A0}>T_{B0}$, la expresión entre paréntesis es menor que la unidad y, por consiguiente, $\Delta S<0$. Así hemos mostrado que en el transcurso de la transformación imaginaria, que contradice al segundo principio en la enunciación de Clausius, la entropía decrece lo que está en contradicción con la ley de que la entropía no decrece.

A Kelvin pertenece otra enunciación del segundo principio de termodinámica. Se formula así: *son imposibles tales transformaciones cuyo único efecto fuese la extracción de cierto cuerpo una cantidad determinada de calor y la conversión íntegramente en trabajo de dicha cantidad de calor.*

A primera vista puede parecer que semejante enunciación contradice, por ejemplo, el proceso de expansión isotérmica de un gas ideal. Efectivamente, todo el calor que un gas ideal recibe de cierto cuerpo se transforma por completo en trabajo. No obstante, la recepción del calor y su conversión en trabajo, no es el único resultado de la transformación; además, como resultado de ésta se produce la variación del volumen del gas.

En la máquina térmica la conversión de calor en trabajo se acompaña, obligatoriamente, de una transformación adicional, es decir, de la transmisión de cierta cantidad de calor Q_2' al cuerpo más frío, a causa de lo cual la cantidad de calor Q_1, recibida del cuerpo más caliente, no puede ser convertida íntegramente en trabajo.

Es fácil cerciorarse de que esta afirmación, contenida en la enunciación de Kelvin, se desprende lógicamente de la afirmación existente en la enunciación de Clausius. En efecto, el trabajo puede ser convertido por completo en calor, por ejemplo, por medio del rozamiento. Por esta razón, convirtiendo el calor, extraído de cierto cuerpo con ayuda de una transformación prohibida por la enunciación de Kelvin, íntegramente en trabajo y, a continuación, convirtiendo mediante el rozamiento dicho trabajo en calor, que se comunica a otro cuerpo a temperatura más alta, habríamos realizado una transformación imposible de acuerdo con la enunciación de Clausius.

Haciendo uso de las transformaciones prohibidas por el segundo principio de termodinámica, sería posible crear un motor que rea-

lizaría trabajo a cuenta del calor obtenido de una fuente de energía, prácticamente, inagotable como el océano. Semejante motor sería equivalente a un móvil perpetuo. Por esta causa, a veces, el segundo principio de termodinámica se formula de la manera siguiente: *es imposible la creación de un móvil perpetuo de segunda especie, es decir, semejante motor de funcionamiento periódico que recibiría calor de un foco calorífico convirtiéndolo íntegramente en trabajo.*

§ 105. Ciclo de Carnot

De lo dicho en el parágrafo anterior sigue que para que trabaje un motor térmico es necesaria la presencia de dos focos caloríficos. De uno de ellos, a temperatura más alta T_1 y llamado *foco caliente*, el motor recibe en el transcurso del ciclo una cantidad de calor Q_1; al segundo, a temperatura más baja T_2 y llamado *foco frío*, el motor cede una cantidad de calor Q_2'.

Supongamos que la capacidad calorífica de los focos es infinitamente grande. Esto significa que cuando los focos reciben o ceden una cantidad finita de calor, éste no hace variar su temperatura. Aclaremos qué ciclo reversible puede realizar el medio de trabajo (agente de transformación) del motor en tales condiciones. Para mayor brevedad, el medio de trabajo del motor será llamado simplemente cuerpo.

Está claro, que el ciclo que consideramos puede constar tanto de transformaciones durante las cuales el cuerpo intercambia calor con los focos, como de transformaciones que no se acompañan de intercambio de calor con el medio ambiente, es decir, transformaciones adiabáticas. En el parágrafo anterior fue establecido que la única transformación reversible, acompañada del intercambio de calor con el foco térmico, cuya temperatura queda invariable, es la transformación isotérmica que transcurre a la temperatura del foco.

De este modo, llegamos a la conclusión de que el ciclo reversible realizado por un cuerpo que intercambia calor con los dos focos caloríficos de capacidad infinitamente grande, sólo puede constar de dos isotermas (a las temperaturas de los focos) y de dos adiabáticas. Por primera vez semejante ciclo fue considerado por el ingeniero francés Sadí Carnot y lleva el nombre de *ciclo de Carnot*. Cabe indicar, que por definición el ciclo de Carnot es reversible.

Durante la transformación adiabática $d'Q = 0$. Por esta causa, de acuerdo con la fórmula (103.20), durante dicha transformación $dS = 0$ y, por lo tanto, la entropía queda constante. Basándonos en esto, denominamos *isoentrópica* la transformación adiabática reversible. Haciendo uso de este término, es posible decir que el ciclo de Carnot consta de dos isotermas y de dos isoentrópicas. En el diagrama T, S dicho ciclo tiene el aspecto mostrado en la fig. 105.1. Señalemos que la forma del ciclo de Carnot en el diagrama T, S

no depende de las propiedades del cuerpo (o sistemas de cuerpos) para las que está representado.

En la fig. 105.2 se muestra cierta transformación que hace pasar al sistema del estado *1* al *2*. De acuerdo con (103.20), la cantidad elemental de calor $d'Q$ recibida por el sistema puede ser representada en forma de $T\,dS$. Por lo tanto, el área de la banda sombreada en la fig. 105.2 es igual a $d'Q$, mientras que el área de la figura limitada por la curva *1—2* nos proporciona la cantidad de calor que el sistema

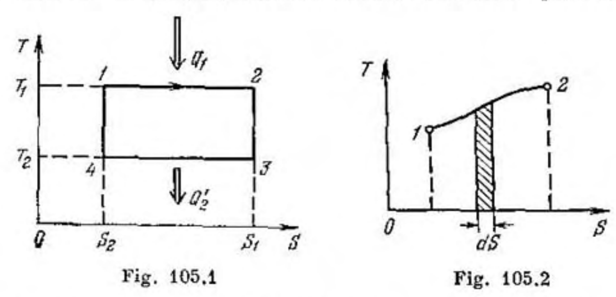


Fig. 105.1 Fig. 105.2

recibe en el transcurso de la transformación. De modo análogo, el área de la figura limitada por la curva que representa la transformación en el diagrama p, V nos ofrece el trabajo que realiza el sistema durante la transformación (véase la fig. 84.3).

En correspondencia con lo dicho, el área del ciclo en la fig. 105.1 nos da la cantidad de calor que recibe el sistema en el transcurso del ciclo (ella es igual a $Q_1 - Q_2'$). Por analogía, el área del ciclo en e diagrama p, V proporciona el trabajo realizado por el sistema durante el ciclo (véase la fig. 84.4).

La cantidad de calor recibida por el sistema durante una transformación reversible, tomada al azar, puede ser calculada por la fórmula

$$Q = \int_1^2 T\,dS \tag{105.1}$$

(comp. con (84.3)).

Hallemos el rendimiento del ciclo de Carnot. Después de acabarl el ciclo, el sistema retorna al estado inicial. Así, pues, la variación completa de la entropía durante el ciclo es cero. En el sector *1—2* (véase la fig. 105.1) el sistema recibe del foco calorífico a temperatura T_1 la cantidad de calor Q_1. En este sector el incremento de la entropía será igual a

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{d'Q}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_1^2 d'Q = \frac{Q_1}{T_1}.$$

En el sector *3—4* el sistema cede al foco calorífico a temperatura T_2, la cantidad de calor Q_2'. El calor Q_2', extraído del cuerpo, es equivalente al calor comunicado al cuerpo $-Q_2'$. Por esto, el incremento de la entropía en el sector *3—4* será

$$\Delta S_{34}=\int_3^4 \frac{d'Q}{T_2}=\frac{1}{T_2}\int_3^4 d'Q=\frac{-Q_2'}{T_2}.$$

En los sectores *2—3* y *4—1* la entropía es constante, de forma que el incremento total de la entropía durante el ciclo

$$\Delta S_{12}+\Delta S_{34}=\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}=0. \qquad (105.2)$$

De (105.2) se desprende que

$$\frac{Q_2'}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}. \qquad (105.3)$$

La expresión (104.5) para el rendimiento de una máquina térmica puede representarse en la forma

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2'}{Q_1}=1-\frac{Q_2'}{Q_1}. \qquad (105.4)$$

Sustituyendo en esta expresión la razón Q_2'/Q_1 de acuerdo con (105.3), se obtiene

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}. \qquad (105.5)$$

Al deducir la fórmula (105.5) no hicimos ningunas suposiciones acerca de las propiedades del medio de trabajo y la estructura de la máquina térmica. Por lo tanto, llegamos a la afirmación de que *el rendimiento de todas las máquinas reversibles que trabajan en idénticas condiciones (es decir, a una misma temperatura de los focos caliente y frío) es igual y sólo se determina por las temperaturas de los focos caliente y frío*. Esta afirmación lleva el nombre de *teorema de Carnot*.

Estudiemos una máquina irreversible que trabaja con los mismos focos caliente y frío que una máquina reversible que trabaja según el ciclo de Carnot. Sea que al final del ciclo la máquina retorne al estado inicial, que consideramos en equilibrio. Como la entropía es función del estado, su incremento durante el ciclo será igual a cero:

$$\oint dS=0.$$

Ya que las transformaciones, de las que consta el ciclo, son irreversibles, para cada transformación elemental tiene lugar la desigualdad $dS>\frac{d'Q}{T}$ (véase (103.21)). Por consiguiente, de la condición de la igualdad a cero del incremento total de la entropía du-

rante el ciclo, se desprende que

$$0=\oint dS>\oint \frac{d'Q}{T},$$

de donde

$$\oint \frac{d'Q}{T}<0.$$

Dividamos esta última integral en cuatro sumandos:

$$\oint \frac{d'Q}{T}=\int\limits_{T_1} \frac{d'Q}{T}+\int\limits_{\mathrm{Ad1}} \frac{d'Q}{T}+\int\limits_{T_2} \frac{d'Q}{T}+\int\limits_{\mathrm{Ad2}} \frac{d'Q}{T}<0.$$

El primer sumando corresponde al proceso con el que del foco a temperatura T_1 se recibe la cantidad de calor Q_1 (ésta no coincide obligatoriamente con la cantidad de calor Q_1 que una máquina térmica recibe durante el ciclo). El segundo sumando corresponde al primer sector adiabático del ciclo. El tercer sumando corresponde al proceso de transmisión al foco a temperatura T_2 la cantidad de calor Q_2' (ésta no coincide obligatoriamente con la cantidad de calor Q_2' que la máquina térmica cede durante el ciclo). Por fin, el cuarto sumando corresponde al segundo sector adiabático del ciclo. En los sectores adiabáticos $d'Q=0$, por esta razón las integrales correspondientes son iguales a cero. La integral, correspondiente al sector T_1, es igual a Q_1/T_1 (recordemos, que con una transformación irreversible en el denominador de la razón $d'Q/T$ se encuentra la temperatura del foco del que el cuerpo dado recibe el calor $d'Q$). La integral, correspondiente al sector T_2, es igual a $-Q_2'/T_2$. De este modo, llegamos a la desigualdad

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}<0. \tag{105.6}$$

De (105.6) obtenemos

$$\frac{Q_2'}{Q_1}>\frac{T_2}{T_1}$$

y, por consiguiente,

$$\eta=1-\frac{Q_2'}{Q_1}<1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}. \tag{105.7}$$

El resultado obtenido significa que el rendimiento de una máquina irreversible es siempre menor que el de una máquina reversible que trabaja en iguales condiciones.

La forma del ciclo de Carnot en el diagrama p, V depende de las propiedades de la sustancia que realiza el ciclo. Para un gas ideal el ciclo tiene el aspecto mostrado en la fig. 105.3. El rendimiento del ciclo de Carnot para un gas ideal puede ser calculado sin hallar el incremento de la entropía.

Durante una transformación isotérmica la energía interna de un gas ideal queda constante. Por esto, la cantidad de calor Q_1, recibido por el gas, es igual al trabajo A_{12} que realiza el gas al pasar del estado *1* al *2* (fig. 105.3). De acuerdo con (90.8), este trabajo será igual a

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (105.8)$$

donde m es la masa del gas ideal en la máquina. La cantidad de calor Q_2' que se cede al foco frío, es igual al trabajo A_{34}' consumido para comprimir el gas al hacerlo pasar del estado *3* al estado *4*. Este trabajo es igual a

$$Q_2' = A_{34}' = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \qquad (105.9)$$

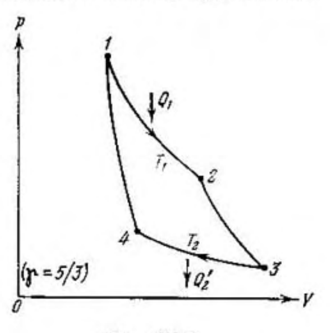


Fig. 105.3

Con el fin de que el ciclo sea cerrado, los estados *1* y *4* deben yacer en una misma adiabática. De aquí se desprende, que

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \qquad (105.10)$$

(véase la ecuación de la adiabática (88.4)). Como los estados *2* y *3* yacen en una misma adiabática, análogamente se cumple la condición

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \qquad (105.11)$$

Dividiendo (105.11) por (105.10), llegamos a la condición para que el ciclo sea cerrado:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \qquad (105.12)$$

Ahora, pongamos (105.8) y (105.9) en la expresión (104.5) para el rendimiento:

$$\eta = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Por fin, teniendo en cuenta la condición (105.12), llegamos a la expresión

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

que coincide con (105.5).

§ 106. Escala termodinámica de temperaturas

El teorema acerca de la independencia del rendimiento de las máquinas reversibles de las propiedades del medio de trabajo, que hemos demostrado en el parágrafo anterior, nos permite establecer una escala de temperaturas que no depende de la elección del cuerpo termométrico. De acuerdo con el mencionado teorema

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2'}{Q_1}=1-\frac{Q_2'}{Q_1}.$$

por lo tanto, también la razón Q_2'/Q_1 para el ciclo de Carnot sólo depende de las temperaturas de los focos caliente y frío. Designando las magnitudes de dichas temperaturas por ϑ_1 y ϑ_2 en una escala que por ahora no conocemos, podemos escribir que

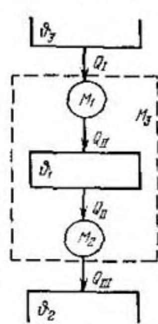


Fig. 106.1

$$\frac{Q_2'}{Q_1}=f(\vartheta_1,\ \vartheta_2), \qquad (106.1)$$

donde $f(\vartheta_1,\ \vartheta_2)$ es una función universal (es decir, igual para todos los ciclos de Carnot) de los focos caliente y frío. La correlación (106.1) da la posibilidad de determinar la temperatura de los cuerpos con ayuda de las cantidades de calor que reciben y ceden durante los ciclos de Carnot.

Demostremos que la función (106.1) posee la siguiente propiedad:

$$f(\vartheta_1,\ \vartheta_2)=\frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}, \qquad (106.2)$$

donde $\theta(\vartheta)$ es de nuevo una función universal de la temperatura. Estudiemos dos máquinas reversibles M_1 y M_2 (fig. 106.1), en las que el foco frío de una de ellas es, simultáneamente, el foco caliente de la otra. Supongamos que la segunda máquina extrae del foco a temperatura ϑ_1 la misma cantidad de calor que le cede la primera máquina.

Para la máquina M_1 $Q_1=Q_{\mathrm{I}}$, $Q_2'=Q_{\mathrm{II}}$. Por lo tanto, para esta máquina la correlación (106.1) tiene el aspecto

$$\frac{Q_{\mathrm{II}}}{Q_{\mathrm{I}}}=f(\vartheta_3,\ \vartheta_1). \qquad (106.3)$$

Para la máquina M_2 $Q_1=Q_{\mathrm{II}}$, $Q_2'=Q_{\mathrm{III}}$. Por esto, en correspondencia con (106.1)

$$\frac{Q_{\mathrm{III}}}{Q_{\mathrm{II}}}=f(\vartheta_1,\ \vartheta_2). \qquad (106.4)$$

Considerando las máquinas M_1 y M_2, así como el foco a temperatura ϑ_1, como una máquina reversible única que recibe el calor Q_{I} de un foco caliente a temperatura ϑ_3 y que cede el calor Q_{III} a un foco

frío a temperatura ϑ_2, podemos escribir:

$$\frac{Q_{III}}{Q_I} = f(\vartheta_3, \vartheta_2). \qquad (106.5)$$

Dividiendo (106.5) por (106.3), hallamos que

$$\frac{Q_{III}}{Q_{II}} = \frac{f(\vartheta_3, \vartheta_2)}{f(\vartheta_3, \vartheta_1)}.$$

La comparación de esta expresión con (106.4) nos lleva a la correlación

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{f(\vartheta_3, \vartheta_2)}{f(\vartheta_3, \vartheta_1)}. \qquad (106.6)$$

Esta igualdad liga las temperaturas ϑ_1 y ϑ_2 de dos cuerpos, con la particularidad de que en ella figura, además, la temperatura ϑ_3 de un tercer cuerpo. Poniéndonos de acuerdo de una vez para siempre acerca de la elección de dicho cuerpo, es decir, haciendo ϑ_3 invariable, reducimos la función $f(\vartheta_3, \vartheta)$, que se encuentra en el numerador y denominador de la fórmula (106.6), a la función de una variable ϑ. Designando esta función por $\theta(\vartheta)$, llegamos a la fórmula (106.2).

La función $\theta(\vartheta)$ sólo depende de la temperatura. Por esta razón, sus valores pueden ser utilizados para caracterizar la temperatura del correspondiente cuerpo, es decir, se puede suponer que la temperatura del cuerpo es igual a θ, donde $\theta = \theta(\vartheta)$. Entonces, la expresión (106.1) toma la siguiente forma:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}. \qquad (106.7)$$

La correlación (106.7) es la base de la llamada *escala termodinámica de temperaturas.* Su ventaja consiste en que ella no depende de la elección del cuerpo (del medio de trabajo en el ciclo de Carnot) que se utiliza para medir la temperatura.

En correspondencia con (106.7), para la comparación de las temperaturas de dos cuerpos, hay que realizar el ciclo de Carnot, empleando dichos cuerpos como foco caliente y foco frío. La razón entre la cantidad de calor cedido al cuerpo «foco frío» y la cantidad extraída del cuerpo «foco caliente», nos proporcionará la razón entre las temperaturas de los cuerpos que consideramos. Para la determinación unívoca del valor de θ tenemos que acordar qué unidad de temperatura vamos a elegir, es decir, el grado. Por grado absoluto se toma una centésima de la diferencia entre las temperaturas del agua en ebullición a la presión atmosférica y del hielo en fusión. De este modo, un grado de la escala termodinámica absoluta es igual a un grado de la escala del gas ideal.

Es fácil establecer que la escala termodinámica de temperaturas coincide con la escala del gas ideal. En efecto, de acuerdo con (105.3)

$$\frac{Q_2'}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}. \qquad (106.8)$$

Comparando (106.7) con (106.8) hallamos que

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Por consiguiente, θ es proporcional a T y, como el grado en las dos escalas es igual, $\theta = T$.

§ 107. Ejemplos de cálculo de la entropía

La entropía es función del estado. Por esta causa, ella debe depender de los parámetros que determinan el estado del sistema. Por ejemplo, puede ser presentada como función de p y T o bien como de V y T, etc. Supongamos que cierto cuerpo se calienta a presión constante p desde el cero absoluto hasta la temperatura T, con ello, el proceso de calentamiento transcurre de modo reversible. En tal caso, de acuerdo con (103.20) y (87.2) la entropía del cuerpo a la presión p y la temperatura T será determinada con la expresión

$$S(p,\ T)=\int_0^T \frac{C_p(T)\,dT}{T}, \qquad (107.1)$$

donde $C_p(T)$ es la capacidad calorífica del cuerpo a presión constante, que es función de la temperatura. Por analogía, la entropía como función del volumen V y de la temperatura T puede ser representada en la forma

$$S(V,\ T)=\int_0^T \frac{C_V(T)\,dT}{T}, \qquad (107.2)$$

donde C_V es la capacidad calorífica del cuerpo con volumen constante.

De las fórmulas (107.1) y (107.2) se deduce que las capacidades caloríficas C_p y C_V (así como también las capacidades caloríficas durante cualquiera otra transformación) se hacen nulas con el cero absoluto. En efecto, si la capacidad calorífica no tendiera a cero, la función subintegral para $T \to 0$ crecería infinitamente, por lo que la integral sería divergente (es decir, se reduciría al infinito).

1. *Entropía de un gas ideal.* En el § 103 hallamos la expresión para la entropía de un gas ideal monoatómico (es decir, de un gas para el cual $C_V = {}^3/_2R$). Ahora, haciendo uso de la correlación (103.20), obtendremos la expresión de la entropía para un gas ideal

con número arbitrario de moléculas. Ya que la entropía es aditiva, es suficiente hallar su valor para un mol de gas S_m. La entropía de una cantidad de gas tomada al azar será $S = (m/M)\, S_m$.

Caracterizaremos el estado de la sustancia con los parámetros V y T, pero la transformación que transcurre no será considerada isócora. De acuerdo con el teorema de Nernst y la fórmula (103.20)

$$S_m(V, T) = \int_0^{(V, T)} \frac{d'Q}{T}, \qquad (107.3)$$

donde con el símbolo (V, T) se designa el estado del gas (consideramos V de un mol). La integración es realizada por una transformación reversible arbitraria que hace pasar el cuerpo del estado a cero absoluto al estado, caracterizado por el volumen V y la temperatura T.

Tomemos el volumen V_0 y la temperatura T_0 con los que sabemos de antemano que la sustancia es un gas ideal y dividamos en dos la integral en la fórmula (107.3):

$$S_m(V, T) = \int_0^{(V_0, T_0)} \frac{d'Q}{T} + \int_{(V_0, T_0)}^{(V, T)} \frac{d'Q}{T}. \qquad (107.4)$$

La primera integral es cierto número que vamos a designar con $S(V_0, T_0)$. La segunda, es una función de V y T. Con el fin de hallar esa función presentemos $d'Q$ en la forma $d'Q = C_V\, dT + p\, dV$ (en el intervalo de integración la sustancia se comporta como un gas ideal). Después de dividir $d'Q$ por T y sustituyendo, de acuerdo con la ecuación de estado, p/T por R/V, tendremos:

$$\int_{(V_0, T_0)}^{(V, T)} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{C_V dT}{T} + \int_{V_0}^{V} \frac{R\, dV}{V} = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}.$$

De este modo, la fórmula (107.4) toma el aspecto

$$S_m(V, T) = S(V_0, T_0) + C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}. \qquad (107.5)$$

Transformemos esta fórmula del modo siguiente[1]):

$$S_m = C_V \ln T + R \ln V + S_0, \qquad (107.6)$$

donde S_0 es una constante igual a $S(V_0, T_0) - \ln T_0 - \ln V_0$.

Cabe señalar que en las correlaciones con que se tropieza en la práctica, entran, por regla, o las derivadas de la entropía por los

[1]) No debemos asombrarnos de que bajo el signo del logaritmo se halle una magnitud numérica. En las expresiones que contienen $\ln f$ siempre habrá un sumando que contenga $\ln f_0$ (f_0 es una constante) con tal signo que $\ln f$ y $\ln f_0$ pueden ser reunidas en un sumando del tipo $\ln (f/f_0)$.

parámetros de estado, o bien la variación de la entropía. En estos casos, la determinación del valor de la constante aditiva en la expresión para la entropía resulta ser innecesaria.

La fórmula (107.6) nos proporciona la expresión de la entropía de un mol de gas ideal en las variables V y T. Con ayuda de la ecuación de estado se puede pasar a las expresiones de la entropía en otras variables. Poniendo en (107.6) $V = RT/p$, obtenemos la fórmula

$$S_m = C_V \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_0.$$

Teniendo en cuenta que para un gas ideal $C_V + R$ es igual a C_p, podemos escribir:

$$S_m = C_p \ln T - R \ln p + S_0', \qquad (107.7)$$

donde $S_0' = S_0 + R \ln R$.

Por fin, sustituyendo en (107.6) T por pV/R, llegamos a la fórmula

$$S_m = C_V \ln p + C_p \ln V + S_0'', \qquad (107.8)$$

donde $S_0'' = S_0 - C_V \ln R$.

2. *Entropía del agua.* Las variaciones de la capacidad calorífica del agua en el intervalo desde 0 hasta 100 °C no sobrepasa el 1%. Por esta razón, en el intervalo indicado de temperaturas el calor específico del agua puede considerarse que es constante e igual a $c = 4{,}2$ kJ/(kg·K). En correspondencia, designando con s (273) la entropía específica del agua líquida a 0 °C, mientras que con s (T), la entropía específica del agua a la temperatura T ($273 < T < 373$), es posible escribir que

$$s(T) - s(273) = \int_{273}^{T} \frac{c\,dT}{T} = c \ln \frac{T}{273},$$

de donde

$$s(T) = c \ln T + \{s(273) - c \ln 273\} = c \ln T + \text{const.} \qquad (107.9)$$

3. *Variación de la entropía durante la fusión.* Si la presión no varía, la fusión transcurre a temperatura constante. Correspondientemente, el incremento de la entropía específica es igual a

$$\Delta s = \int_{\text{sól}}^{\text{líq}} \frac{d'Q}{T_{\text{fus}}} = \frac{1}{T_{\text{fus}}} \int_{\text{sól}}^{\text{líq}} d'Q = \frac{q_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}}, \qquad (107.10)$$

donde q_{fus} es el calor específico de fusión. Al solidificarse la sustancia la entropía específica disminuye en esa misma magnitud.

La fórmula para el incremento de la entropía específica durante la evaporación se diferencia de (107.10) sólo porque en lugar del calor y la temperatura de fusión, en ella entran el calor de evaporación y la temperatura de ebullición.

§ 108. Ciertas aplicaciones de la entropía

Tomemos en calidad de parámetros independientes, que caracterizan el estado de cierta sustancia, el volumen V y la temperatura T. Entonces la energía interna de la sustancia será función de estos parámetros: $U = U(V, T)$. En tal caso, la expresión del primer principio de termodinámica tiene la forma[1])

$$d'Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p\,dV. \qquad (108.1)$$

En termodinámica se ha aceptado equipar las funciones derivadas parciales respecto de los parámetros de estado con un índice que indica cuál de los parámetros será constante durante la derivación. Esto es preciso porque, por ejemplo, se puede considerar la derivada parcial U por T con la condición de que $p = \text{const}$. Esta derivada se designa con el símbolo $(\partial U/\partial T)_p$ y, hablando en general, tiene otro valor que $(\partial U/\partial T)_V$.

Dividiendo la expresión (108.1) por T, obtendremos el incremento de la entropía:

$$dS = \left\{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right\} dT + \left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\right\} dV. \qquad (108.2)$$

Examinando la entropía como una función de los parámetros V y T, es posible representar el incremento de la entropía en la forma

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV.$$

La comparación con (108.2) nos da

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]. \qquad (108.3)$$

Las derivadas parciales mixtas de cierta función $f(x, y)$ satisfacen la condición

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

De acuerdo con esto

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T.$$

---

[1]) La diferencial completa de $f(x, y)$ de las variables x e y se determina con la expresión

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Esta expresión proporciona el incremento de la función $f(x, y)$ en el caso cuando las variables x e y reciben los incrementos dx y dy (véase la fórmula (22.8)).

Poniendo en esta igualdad la expresión (108.3) llegamos a la correlación

$$\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right\}=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]\right\}.$$

Después de la derivación, hallamos

$$\frac{1}{T}\,\frac{\partial^2 U}{\partial V\,\partial T}=-\frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]+\frac{1}{T}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial T\,\partial V}+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right].$$

Tomando en consideración que $\frac{\partial^2 U}{\partial V\,\partial T}=\frac{\partial^2 U}{\partial T\,\partial V}$, llegamos a la fórmula

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p. \tag{108.4}$$

Esta fórmula caracteriza la independencia de la energía interna del volumen. Apliquémosla para hallar la energía interna de un gas ideal y de un gas de Van der Waals.

Para un gas ideal $p=RT/V$. Por lo tanto, $(\partial p/\partial T)_V=R/V$. La sustitución de este valor en (108.4) nos da

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\frac{R}{V}-p=0.$$

El resultado obtenido quiere decir que la energía interior de un gas ideal no depende del volumen. En el § 87 llegamos a la misma conclusión, partiendo de la suposición de que entre las moléculas no había interacción.

De la ecuación de estado de un gas de Van der Waals (véase (91.2)) se desprende que

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}. \tag{108.5}$$

De aquí

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{V-b}.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (108.4), obtenemos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\frac{RT}{V-b}-p=\frac{a}{V^2}$$

(véase (108.5)). Integrando por V, hallamos que

$$U=-\frac{a}{V}+f(T).$$

El tipo de la función $f(T)$ puede ser establecido haciendo uso de que con $V\to\infty$ la expresión para la energía interna de un gas de Van der Waals se puede convertir en la expresión para la energía interna de un gas ideal $U=C_VT$. Como resultado, llegamos a la expresión $U=C_VT-a/V$, que fue obtenida en el § 91, partiendo de otros razonamientos (véase la fórmula (91.6)).

§ 109. Potenciales termodinámicos

En termodinámica todos los cálculos se basan en la aplicación de las funciones de estado denominadas *potenciales termodinámicos*. A cada conjunto de parámetros independientes corresponde su potencial termodinámico. Las variaciones de los potenciales, que se producen durante cualquier transformación, determinan o el trabajo que realiza el sistema, o bien el calor que recibe éste.

Al estudiar los potenciales termodinámicos haremos uso de la correlación (103.22), representándola en la forma

$$T\,dS \geqslant d'Q. \qquad (109.1)$$

El signo de igualdad se refiere a las transformaciones reversibles, el de desigualdad, a las irreversibles.

Los potenciales termodinámicos son funciones de estado. Por esta causa, el incremento de cualquiera de los potenciales es igual a la diferencia total de la función con la que se expresa. La diferencial total de la función $f(x, y)$ de las variables x e y se define con la expresión

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy.$$

Por esto, si durante las transformaciones obtenemos para el incremento de cierta función f una expresión del tipo

$$df = X(\xi, \eta)\,d\xi + Y(\xi, \eta)\,d\eta, \qquad (109.2)$$

podemos afirmar que dicha magnitud es función de los parámetros ξ y η, con la singularidad de que $X(\xi, \eta)$ e $Y(\xi, \eta)$ son derivadas parciales de la función $f(\xi, \eta)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\eta = X(\xi, \eta), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_\xi = Y(\xi, \eta). \qquad (109.3)$$

Energía interna. Uno de los potenciales termodinámicos es bien conocido por nosotros. Se trata de la energía interna del sistema. La expresión del primer principio para una transformación reversible puede representarse en la forma

$$dU = T\,dS - p\,dV. \qquad (109.4)$$

La comparación con (109.2) muestra que en calidad de las llamadas variables naturales para el potencial U, actúan las variables S y V. De (109.3) se deduce que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p. \qquad (109.5)$$

De la correlación $d'Q = dU + d'A$ sigue que cuando un cuerpo no intercambia calor con el medio ambiente, el trabajo que realiza

es igual a

$$d'A = -dU$$

o en forma integral:

$$A = U_1 - U_2 \text{ (no hay intercambio de calor).} \qquad (109.6)$$

Así, pues, al no haber intercambio de calor con el medio ambiente, el trabajo es igual al decrecimiento de la energía interna del cuerpo.

Con volumen constante

$$d'Q = dU. \qquad (109.7)$$

Por lo tanto, la capacidad calorífica a volumen constante, es igual a

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V. \qquad (109.8)$$

Energía libre. De acuerdo con (109.4) el trabajo que realiza un cuerpo durante una transformación isotérmica reversible, puede ser presentado en la forma

$$d'A = -dU + T\,dS = -d\,(U - TS). \qquad (109.9)$$

La función de estado

$$F = U - TS \qquad (109.10)$$

recibe el nombre de *energía libre* del cuerpo.

En correspondencia con las fórmulas (109.9) y (109.10) con una transformación isotérmica reversible, el trabajo es igual al decrecimiento de la energía libre del cuerpo:

$$d'A = -dF \qquad (109.11)$$

o bien

$$A = F_1 - F_2 \text{ } (T = \text{const, reversible}). \qquad (109.12)$$

La comparación con la fórmula (109.6) muestra que durante las transformaciones isotérmicas, la energía libre desempeña el mismo papel que la energía interior en las transformaciones adiabáticas.

Señalemos, que la fórmula (109.6) es válida tanto para las transformaciones reversibles, como para las irreversibles. En lo que se refiere a la fórmula (109.12), ésta sólo es justa para las transformaciones reversibles. Durante las transformaciones irreversibles $d'Q < T\,dS$ (véase (109.1)). Poniendo esta desigualdad en la correlación $d'A = d'Q - dU$, es fácil obtener que con las transformaciones isotérmicas irreversibles

$$A < F_1 - F_2 \text{ } (T = \text{const, irreversible}). \qquad (109.13)$$

Así, pues, el decrecimiento de la energía libre determina el límite superior de la cantidad de trabajo que puede realizar el sistema durante la transformación isotérmica.

Tomemos la diferencial de la función (109.10). Tomando en consideración (109.4), obtenemos

$$dF = T\,dS - p\,dV - T\,dS - S\,dT = -S\,dT - p\,dV. \quad (109.14)$$

De la comparación con (109.2) llegamos a la conclusión de que las variables naturales para la energía libre son T y V. De acuerdo con (109.3)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p. \quad (109.15)$$

Sustituyamos en (109.1) $d'Q$ por $dU + p\,dV$ y dividamos la correlación obtenida por dt (t es el tiempo). Como resultado obtenemos, que

$$T\frac{dS}{dt} \geqslant \frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt}. \quad (109.16)$$

Si la temperatura y el volumen quedan constantes, la correlación (109.16) puede tomar la forma

$$\frac{d(U-TS)}{dt} = \frac{dF}{dt} \leqslant 0 \ (T = \text{const},\ V = \text{const}). \quad (109.17)$$

De esta fórmula se desprende que una transformación irreversible, que transcurre a temperatura y volumen constantes, es acompañada de la disminución de la energía libre del cuerpo. Al alcanzar el equilibrio, F deja de variar con el tiempo. Así, pues, a T y V invariables, es de equilibrio aquel estado, para el que la energía libre es la mínima.

Entalpía. Si la transformación transcurre a presión constante, la cantidad de calor que recibe el cuerpo puede ser representada del modo siguiente:

$$d'Q = dU + p\,dV = d\,(U + pV). \quad (109.18)$$

La función de estado

$$H = U + pV \quad (109.19)$$

recibe el nombre de *entalpía* o *función térmica* (calor total o contenido calorífico de un sistema).

De (109.18) y (109.19) se deduce que la cantidad de calor, recibido por el cuerpo durante una transformación isobárica, es igual a

$$d'Q = dH \quad (109.20)$$

o en forma integral

$$Q = H_2 - H_1. \quad (109.21)$$

Por lo tanto, cuando la presión es constante, la cantidad de calor recibido por el cuerpo es igual al incremento de la entalpía.

La derivación de la expresión (109.19), tomando en consideración (109.4), proporciona

$$dH = T\,dS - p\,dV + p\,dV + V\,dp = T\,dS + V\,dp. \quad (109.22)$$

De aquí concluimos que la entalpía es un potencial termodinámico en las variables S y p. Sus derivadas parciales son iguales a

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V. \tag{109.23}$$

En correspondencia con (109.20), la capacidad calorífica a presión constante

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p. \tag{109.24}$$

Comparando las fórmulas (109.20) y (109.24) con las fórmulas (109.7) y (109.8), llegamos a la conclusión de que a presión constante la entalpía tiene propiedades análogas a las de la energía interna a volumen constante.

Potencial termodinámico de Gibbs. Así se denomina una función de estado que se determina del modo siguiente:

$$G = H - TS = U + pV - TS. \tag{109.25}$$

Su diferencial total es igual a (véase (109.22))

$$dG = T\,dS + V\,dp - T\,dS - S\,dT = V\,dp - S\,dT. \tag{109.26}$$

Por consiguiente, las variables naturales para la función G son p y T. Las derivadas parciales de esta función

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S. \tag{109.27}$$

Tabla 109.1

Denominación y designación del potencial termodinámico	Propiedades
Energía interna $U = U(S, V)$	$U_1 - U_2 = A$ con la transformación adiabática, $U_2 - U_1 = Q$ con $V = \text{const}$
Energía libre $F = F(T, V)$	$F_1 - F_2 = A$ con la transformación isotérmica reversible $F = \text{mín}$ para el estado de equilibrio a $T = \text{const}$ y $V = \text{const}$
Entalpía $H = H(S, p)$	$H_2 - H_1 = Q$ a $p = \text{const}$
Potencial termodinámico de Gibbs $G = G(T, p)$	$G = \text{mín}$ para un estado de equilibrio a $T = \text{const}$, y $p = \text{const}$

Si la temperatura y la presión son constantes, la correlación (109.16) puede ser escrita en la forma:

$$\frac{d(U+pV-TS)}{dt}=\frac{dG}{dt}\leqslant 0 \quad (T=\text{const},\ p=\text{const}). \qquad (109.28)$$

De aquí se deduce que una transformación que transcurre a temperatura y presión constantes, se acompaña del potencial termodinámico de Gibbs. Al alcanzar el equilibrio G deja de variar con el tiempo. De esta manera, manteniendo constantes T y p, es de equilibrio aquel estado para el que dicho potencial es el mínimo (comp. con (109.17)).

En la tabla 109.1 se dan las principales propiedades de los potenciales termodinámicos.

CAPÍTULO XIII

ESTADO CRISTALINO

§ 110. Rasgos distintivos del estado cristalino

La mayoría aplastante de los cuerpos sólidos, con que se tropieza en la naturaleza, tienen estructura cristalina. Por ejemplo, casi todos los minerales y todos los metales en estado sólido son cristales.

El rasgo característico del estado cristalino, que lo distingue de los estados líquido y gaseoso, es la *anisotropía*, es decir, la dependencia de una serie de propiedades físicas (mecánicas, térmicas, eléctricas, ópticas) de la dirección.

Se llaman *isótropos* aquellos cuerpos cuyas propiedades son iguales por todas las direcciones. Además de los gases, son isótropos todos los líquidos, salvo ciertas exclusiones, así como los sólidos amorfos. Estos últimos son líquidos sobreenfriados (véase el § 125).

La causa de la anisotropía de los cristales es la disposición regular de las partículas (átomos y moléculas) de las que está formado el cuerpo. La disposición regular de las partículas se manifiesta en el tallado exterior regular de los cristales. Los cristales están limitados por caras planas que se cruzan bajo ciertos ángulos, determinados para la especie dada de cristales. La fragmentación de los cristales transcurre con mayor facilidad por determinados planos que reciben el nombre de planos crucero.

La regularidad de la forma geométrica y la anisotropía de los cristales no se manifiestan a causa de que los cuerpos cristalinos con los que tropezamos son, por regla, *policristales*, es decir, en forma de conglomerados de pequeños cristales, orientados de modo irregular, que entre sí se han adherido. En los policristales la anisotropía sólo se observa en los límites de un cristal aislado, mientras que en el cuerpo en su total no se observa la anisotropía a consecuencia de la orientación irregular de los cristales. Creando condiciones especiales de cristalización de un fundido o solución pueden ser creados grandes cristales, llamados *monocristales* de toda sustancia. Los monocristales de ciertos minerales se encuentran en la naturaleza en estado natural.

La regularidad de disposición de los átomos del cristal consiste en que éstos (o las moléculas) se sitúan en los nudos de una red espacial geométricamente regular. Todo el cristal puede ser obtenido mediante la múltiple repetición en tres diferentes direcciones de un mismo elemento estructural que recibe el nombre de *célula cristalina elemental* (fig. 110.1, *a*). Las longitudes de las aristas a, b y c de la red cristalina denomínanse *períodos de identidad* del cristal.

La célula cristalina es un paralelepípedo construido sobre tres vectores **a**, **b**, **c**, cuyos módulos son iguales a los períodos de identidad. Además de las aristas *a*, *b*, *c*, el paralelepípedo se caracteriza también por los ángulos α, β y γ entre las aristas (fig. 110.1, *b*). Las magnitudes *a*, *b*, *c* y α, β, γ determinan unívocamente la célula elemental y se llaman parámetros de ésta.

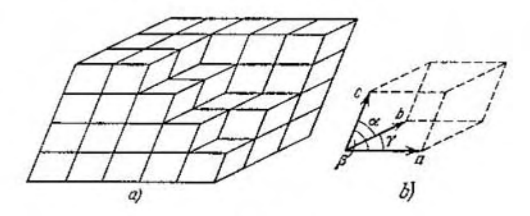


Fig. 110.1

La célula elemental puede ser elegida con distintos procedimientos. Esto se muestra en la fig. 110.2, en el ejemplo de una estructura plana. El revestimiento de una pared mediante baldosines triangulares oscuros y claros, puede ser realizado por la múltiple repetición en dos direcciones de diversas células (véanse, por ejemplo, las células *1*, *2* y *3*; con flechas se indican las direcciones por las que las células se repiten). Las células *1* y *2* se distinguen por contener la cantidad mínima de elementos estructurales (un baldosín claro y uno oscuro). La célula cristalina que contiene la menor cantidad de átomos, que caracterizan la composición química de la sustancia cristalina (por ejemplo, un átomo de oxígeno y dos de hidrógeno para el cristal de hielo), recibe el nombre de *célula primitiva*. No obstante, en lugar de la primitiva se elige la célula elemental con mayor número de átomos pero que posee la misma simetría que el cristal entero. Así, la estructura plana mostrada en la fig. 110.2, al girar a 120° alrededor de cualquier eje perpendicular a ella y que pasa por los vértices de los baldosines, coincide consigo misma. Esta

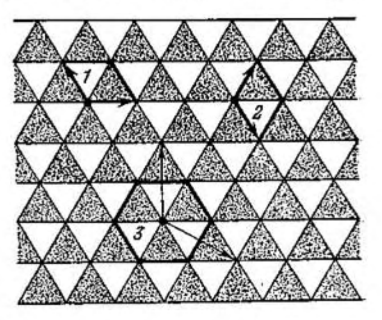


Fig. 110.2

misma propiedad es también propia de la célula *3*. Las células *1* y *2* tienen menor grado de simetría: coinciden consigo mismas sólo al girar a 360°.

§ 111. Clasificación de los cristales

La red cristalina puede tener diversos tipos de simetría. Entendemos por simetría de una red cristalina, la propiedad de ésta de coincidir consigo misma durante ciertos desplazamientos espaciales.

Ante todo, toda red tiene simetría de traslación, es decir, coincide consigo misma durante los desplazamientos (traslaciones) a la magnitud del período de identidad[1]). Entre otros tipos de simetría señalemos la simetría respecto de los giros alrededor de ciertos ejes así como en lo que atañe a la reflexión especular con relación a ciertos planos.

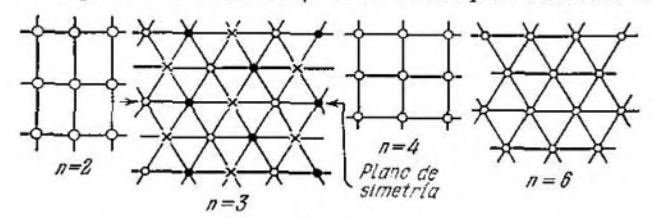


Fig. 111.1

Si la red coincide consigo misma al girar a un ángulo $2\pi/n$ alrededor de cierto eje (por consiguiente, al dar una vuelta completa alrededor del eje la red coincide consigo misma n veces), este eje denomínase *eje de simetría* de n-ésimo orden. Es posible mostrar que, además del eje trivial de primer orden, son sólo posibles ejes de simetría de 2°, 3°, 4° y 6° órdenes. En la fig. 111.1 se muestran esquemáticamente ejemplos de estructuras que poseen semejantes ejes de simetría (con círculos blancos, negros y con crucecitas se designan los átomos de diversas especies).

Reciben el nombre de *planos de simetría* aquellos, en los que con la reflexión especular la red coincide consigo misma. Ejemplos de planos de simetría se muestran en la fig. 111.1.

Diversos tipos de simetría denomínanse *elementos de simetría* de una red cristalina. Además de los ejes y planos de simetría, son posibles otros elementos de simetría que aquí no vamos a considerar.

Por regla, la red cristalina posee simultáneamente varios tipos de simetría. Sin embargo, no toda combinación de los elementos de

---

[1]) Al considerar la simetría de la red hay que abstraerse de las dimensiones finitas del cristal, suponiendo que la red es infinita.

simetría resulta ser posible. Como mostró el eminente científico ruso, E. S. Fiódorov, son posibles 230 combinaciones de los elementos de simetría, llamados *grupos espaciales*. Por los rasgos de simetría estos grupos se dividen en 32 *clases*. Por fin, según la forma de la célula elemental todos los cristales se dividen en siete *sistemas cristalográficos*, cada uno de los cuales contiene varias clases de simetría.

En orden de simetría creciente, los sistemas cristalográficos se disponen del modo siguiente.

1. *Sistema triclínico* (anórdico). Para él es característico que $a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. La célula elemental tiene la forma de un paralelepípedo oblicuángulo.

2. *Sistema monoclínico*. Dos ángulos son rectos, el tercero (que, por regla, es el ángulo β) se distingue del recto. Por lo tanto, $a \neq b \neq c$; $\alpha = \gamma = 90°$; $\beta \neq 90°$. La célula elemental tiene la forma de un prisma recto, cuya base es un paralelogramo (es decir, la forma de un paralelepípedo recto).

3. *Sistema rómbico*. Todos los ángulos son rectos, todas las aristas, diferentes: $a \neq \neq b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. La célula elemental tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo.

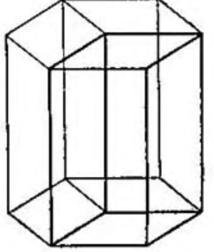


Fig. 111.2

4. *Sistema tetragonal*. Todos los ángulos son rectos, dos aristas, iguales: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. La célula elemental tiene la forma de un prisma recto de base cuadrada.

5. *Sistema romboédrico* (o bien *trigonal*). Todas las aristas son iguales, los ángulos también son iguales y distintos del ángulo recto: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$. La célula elemental tiene la forma de un cubo, deformado por su diagonal por la compresión o la tracción.

6. *Sistema hexagonal*. Las aristas y los ángulos entre ellas satisfacen las condiciones: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = 90°$; $\gamma = 120°$. Si ponemos juntas las células elementales de la forma que se muestra en la fig. 111.2, se obtiene un prisma hexagonal regular.

7. *Sistema cúbico*. Todas las aristas son iguales, todos los ángulos, rectos: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. La célula elemental tiene la forma de un cubo.

§ 112. Tipos físicos de las redes cristalinas

En dependencia de la naturaleza de las partículas situadas en los nudos de la red cristalina y del carácter de las fuerzas de interacción entre las partículas, se distinguen cuatro tipos de redes crista-

linas y, correspondientemente, cuatro tipos de cristales: iónicos, atómicos u homoepolares, metálicos y moleculares.

1. *Cristales iónicos.* En los nudos de la red cristalina se disponen iones de diferentes signos. Las fuerzas de interacción entre ellos son, fundamentalmente, electrostáticas (coulombianas). El enlace condicionado por las fuerzas electrostáticas de atracción entre los iones cargados de diferente signo, recibe el nombre de *heteropolar* (o bien *iónico*).

El ejemplo típico de una red iónica puede ser de la sal gema (NaCl) representada en la fig. 112.1. Dicha red pertenece al sistema cúbico. Con circulitos blancos se representan los iones de sodio de carga positiva, con los negros, los iones negativos de cloro. Como vemos en la figura, los vecinos más próximos del ion del signo dado serán los iones de signo opuesto. En estado gaseoso, NaCl consta de moléculas en las que se unen a pares los iones de sodio y cloro. La agrupación del ion de Na y el de Cl, que forma la molécula, pierde en el cristal su existencia por separado. El cristal iónico no consta de moléculas, sino que de iones. En su totalidad, el cristal puede ser considerado como una gigantesca molécula.

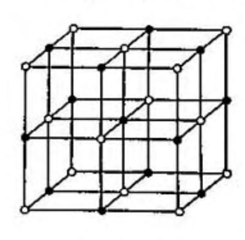


Fig. 112.1

2. *Cristales atómicos.* En los nudos de la red cristalina están situados átomos neutros. El enlace que reúne los átomos neutros en el cristal (así como en la molécula), recibe el nombre de *homoepolar* (o *covalente*). Con el enlace homoepolar las fuerzas de interacción también tienen carácter eléctrico (pero no coulombiano). La naturaleza de estas fuerzas sólo puede ser explicada basándose en la mecánica cuántica.

El enlace homoepolar se efectúa por pares electrónicos. Esto quiere decir que en el aseguramiento del enlace entre dos átomos toma parte un electrón de cada átomo. Por esta causa, el enlace homoepolar tiene carácter dirigido. Durante este enlace, cada ion actúa sobre todos los iones que están suficientemente cerca de él. Con el enlace homoepolar el influjo va dirigido hacia aquel átomo con el que el átomo dado tiene el par electrónico conjunto. El enlace homoepolar sólo puede ser realizado con los electrones de valencia, es decir, con aquellos que están ligados con el átomo en menor grado. Como cada electrón sólo puede asegurar el enlace con un átomo, el número de enlaces, en los que es posible que tome parte el átomo dado (número de vecinos con los que él puede tener enlace), es igual a su valencia.

El diamante y el grafito son ejemplos típicos de cristales atómicos. Por su naturaleza química estas dos sustancias son idénticas

(su estructura está formada por átomos de carbono), pero se diferencian por su estructura cristalina. En la fig. 112.2, *a* se muestra la del diamante, en la fig. 112.2, *b*, la del grafito. En este ejemplo podemos apreciar con claridad la influencia de la estructura cristalina sobre las propiedades de la sustancia.

Los típicos semiconductores, es decir, germanio (Ge) y silicio (Si) también tienen una red como la del diamante (red tipo diamante). Para esta red es característico que cada átomo esté rodeado

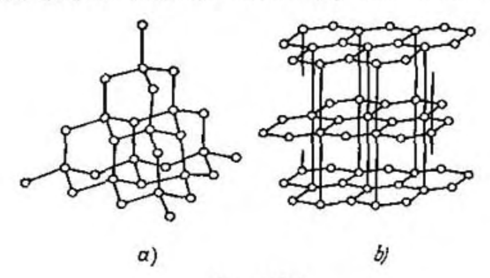


Fig. 112.2

de cuatro vecinos equidistantes de él, situados en los vértices de un tetraedro regular. Cada uno de los cuatro electrones de valencia entra en uno de los pares electrónicos, que liga el átomo dado con uno de sus vecinos.

3. *Cristales metálicos.* En todos los nudos de la red cristalina se encuentran los iones positivos del metal. Como las moléculas de un gas, entre ellos se mueven en desorden los electrones, que se separaron de los átomos al formarse los iones. Dichos electrones juegan el papel de «cemento» que retiene a los iones positivos juntos; en caso contrario la red se destruiría por efecto de las fuerzas de repulsión entre los iones. Al mismo tiempo, los electrones son retenidos por los iones en los márgenes de la red cristalina y no la pueden abandonar.

La mayoría de los metales tienen redes de uno de los tres siguientes tipos: cúbica centrada por el volumen (fig. 112.3, *a*), cúbica de caras centradas (fig. 112.3, *b*) y la llamada hexagonal compacta (fig. 112.3, *c*). Esta última es una red hexagonal con la razón c/a igual a $\sqrt{8/3}$. Las redes cúbica de cara centrada y hexagonal compacta corresponden al empaquetamiento más compacto de bolas iguales.

4. *Cristales moleculares.* En los nudos de la red cristalina están situadas las moléculas orientadas de modo determinado. En el cristal, las fuerzas de enlace entre las moléculas tienen la misma

naturaleza que las de atracción entre las moléculas que conducen a las divergencias de los gases de las ideales. Por esta causa, dichas fuerzas reciben el nombre de *fuerzas de Van der Waals*. Las redes mole-

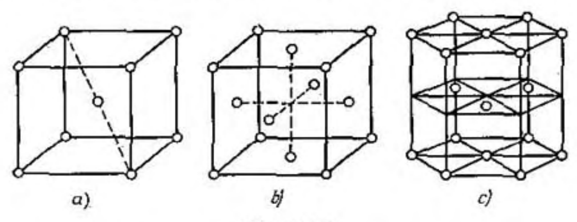


Fig. 112.3

culares forman, por ejemplo, las siguientes sustancias: H_2, N_2, O_2, CO_2, H_2O. Es decir, el hielo corriente, así como el hielo seco (anhídrido carbónico sólido) son cristales moleculares.

§ 113. Defectos en los cristales

Las desviaciones locales con respecto a la estructura cristalina regular reciben el nombre de defectos de los cristales. Semejante desviación puede consistir en la falta de un átomo en el nudo de la red (hueco o laguna), en la sustitución de un átomo de la sustancia dada (su átomo) por un átomo extraño (átomo de la impureza), en la penetración de un átomo excesivo (suyo o extraño) en el espacio intersticial. Semejantes defectos denomínanse *puntuales* y provocan la alteración de la regularidad de la red que se propaga a una distancia de un orden de varios períodos.

Además de los puntuales existen defectos concentrados cerca de ciertas líneas. Se denominan *defectos lineales* o *dislocaciones*. Los defectos de semejante tipo alteran la secuencia correcta de los planos cristalinos. Los más sencillos tipos de dislocaciones son llamados *límite* o *simple* y *en hélice*.

La dislocación límite está condicionada por un semiplano cristalino excesivo introducido entre dos capas vecinas de átomos (fig. 113.1). El extremo de dicho semiplano forma la dislocación del tipo dado. La línea de dislocación es una recta perpendicular al plano de la figura, marcada con el signo $\perp$.

La dislocación en hélice puede ser representada como el corte del cristal por un semiplano y el posterior desplazamiento de las partes de la red dispuestas por los dos lados del corte una hacia otra en la magnitud de un período (fig. 113.2). El borde interior del corte forma la dislocación en hélice (véase la línea de trazos en la figura).

El cristal con semejante dislocación, de hecho consta de un plano cristalino que está curvado por una superficie helicoidal (tal superficie recibe el nombre de helicoide). La línea de dislocación coincide con el eje de la hélice. Durante cada circulación alrededor de esta línea el plano cristalino se desplaza a un período.

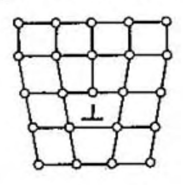


Fig. 113.1

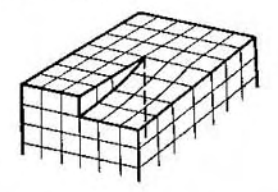


Fig. 113.2

Hemos examinado dos tipos más sencillos (límite) de dislocaciones. En ambos casos las líneas de dislocación son rectas. En caso general, dichas líneas pueden ser curvas.

Los defectos influyen en alto grado sobre las propiedades físicas de los cristales, incluida su resistencia mecánica. En particular, las dislocaciones son la causa de que la deformación plástica[1]) de

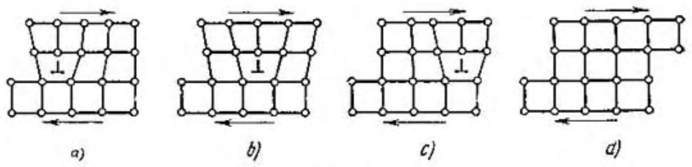


Fig. 113.3

los cristales reales transcurre al ejercer esfuerzos varias órdenes menores que las calculadas para los cristales perfectos.

En los monocristales de los metales se produce con facilidad la cizalladura a lo largo de las capas atómicas. No debemos imaginarnos este proceso como si todos los átomos de la capa se desplazan simultáneamente como un todo. En realidad, los átomos pasan a las nuevas posiciones sucesivamente por pequeños grupos. Semejante desplazamiento sucesivo de los átomos puede ser representado como el movimiento de las dislocaciones. Para el desplazamiento de las dislocaciones son suficientes mucho menores esfuerzos que durante el movimiento simultáneo de toda la capa atómica. En la fig. 113.3

[1]) Se llama plástica aquella deformación que, después de desaparecer el esfuerzo que la provocó, se conserva.

se muestran las sucesivas etapas del proceso que transcurre en un cristal bajo la acción de las fuerzas que provocan la cizalladura. Primeramente, a causa de la acción de los esfuerzos creados en el cristal, la dislocación existente se desplazará a lo largo del cristal. Este desplazamiento va acompañado del siguiente movimiento de los átomos de la capa que yace sobre la dislocación, respecto de los átomos de la capa que se encuentra debajo de la dislocación.

El desplazamiento de las dislocaciones se ve obstaculizado por la presencia de otros defectos en el cristal, por ejemplo, al haber átomos de una impureza. También se frenan las dislocaciones al cruzarse entre sí. Si en el cristal, la cantidad de dislocaciones y otros defectos es pequeña, las primeras, prácticamente, se desplazan libremente. Como resultado, la resistencia a la cizalladura será pequeña. El aumento de la densidad de las dislocaciones y el crecimiento de la concentración de impurezas, conduce a un fuerte frenado de las dislocaciones, al cese de su movimiento, por lo que la resistencia del material aumenta. Por ejemplo, la elevación de la resistencia del hierro se logra diluyendo en él átomos de carbono (semejante solución denomínase acero).

La deformación plástica se acompaña de la destrucción de la red cristalina y de la formación de una gran cantidad de defectos que obstaculizan el desplazamiento de las dislocaciones. De este modo se explica el endurecimiento de los materiales durante su maquinado en frío.

La dislocación en hélice surge con frecuencia en el proceso de crecimiento de los cristales de una solución o fundido. La captura de un átomo por una superficie cristalina plana o lisa, desde el punto de vista energético es menos ventajosa y, por lo tanto, menos probable, que la unión de un átomo en el escalón existente en la superficie del cristal con dislocación en hélice. Por esto, los cristales prefieren crecer teniendo en su interior una dislocación en hélice. Los nuevos átomos se unen al borde del escalón, a causa de lo cual el crecimiento del cristal transcurre por una espiral.

§ 114. Capacidad calorífica de los cristales

La disposición de las partículas en los nudos de la red cristalina corresponde al mínimo de su energía potencial mutua. Durante el desplazamiento de las partículas de la posición de equilibrio en cualquier dirección surge una fuerza que tiende a retornar la partícula a su posición inicial, por lo que aparecen vibraciones de la partícula. La vibración a lo largo de una dirección arbitraria podemos representarla como la superposición de las vibraciones a lo largo de tres direcciones perpendiculares entre sí. Por esta razón, a cada partícula en el cristal se le debe atribuir tres grados vibratorios de libertad.

En el § 97 fue aclarado que para cada grado vibratorio de libertad corresponde, por término medio, una energía igual a dos unidades de kT, una en forma de energía cinética y otra, en forma de energía potencial. Por lo tanto, para cada partícula, es decir, el átomo en la red atómica, el ion en la iónica o metálica[1]), corresponde, en término medio, una energía igual a $3\,kT$. La energía de un mol de la sustancia en estado cristalino puede ser hallada si multiplicamos la energía media de una partícula por el número de partículas situadas en los nudos de la red cristalina. Este último número coincide con el de Avogadro N_A sólo para las sustancias químicas simples. En el caso de una sustancia con NaCl, el número de partículas será igual a $2\,N_A$, ya que un mol de NaCl contiene N_A átomos de Na y N_A de Cl.

Si nos limitamos al examen de las sustancias químicas simples, que forman los cristales atómicos o moleculares, podemos escribir la siguiente expresión para la energía de un mol de sustancia en estado cristalino

$$U_m = N_A 3kT = 3\,RT.$$

Fig. 114.1

El incremento de la energía interna, correspondiente a la elevación de la temperatura en un kelvin, de acuerdo con (109.8), es igual a la capacidad calorífica con volumen constante. Así que

$$C_V = 3\,R. \qquad (114.1)$$

Como al calentarlos el volumen de los sólidos poco varía, su capacidad calorífica a presión constante se diferenciará de forma insignificante de la capacidad calorífica con volumen constante, de modo que podemos hacer $C_p \approx C_V$ y, simplemente, hablar de la capacidad calorífica de un sólido.

Así, pues, según (114.1) la capacidad calorífica de los cuerpos químicos simples en estado cristalino es igual a $3\,R$. Esta afirmación es el contenido *de la ley de Dulong—Petit* establecida por vía experimental. Con suficientemente buena aproximación esta ley se cumple para muchas sustancias a temperatura ambiente. Pero, por ejemplo, el diamante a temperatura ambiente posee una capacidad calorífica en un total igual a $0{,}7\,R$.

Es más, a pesar de (114.1) la capacidad calorífica de los cristales depende de la temperatura, con la particularidad de que la depen-

[1]) En lo que se refiere a los cristales moleculares, el problema es más complicado. Además de las vibraciones de traslación, las moléculas también realizan vibraciones torsionales. Del mismo modo, hay vibraciones de los átomos en el interior de la molécula.

dencia tiene el carácter mostrado en la fig. 114.1. En el entorno del cero absoluto la capacidad calorífica de todos los cuerpos es proporcional a T^3 y sólo a una temperatura suficientemente alta, característica para cada sustancia, comienza a cumplirse la igualdad (114.1). En la mayoría de los cuerpos esto se consigue al alcanzar la temperatura ambiente. Para el diamante la capacidad calorífica $3R$ sólo se consigue a una temperatura de un orden de 1000 °C.

La rigurosa teoría de la capacidad calorífica de los cuerpos, creada por Einstein y Debye, toma primeramente en consideración la cuantización de la energía del movimiento vibratorio (véase el § 97). Segundo, la teoría tiene en cuenta que las vibraciones de las partículas en la red cristalina no son independientes. Esta teoría[1]) concuerda correctamente con los datos experimentales. En particular, a altas temperaturas conduce a la expresión (114.1).

[1]) Será expuesta en el tercer tomo.

CAPÍTULO XIV

ESTADO LÍQUIDO

§ 115. Estructura de los líquidos

El estado líquido es un estado intermedio entre los gases y los cristales y, por consiguiente, tiene semejanzas tanto de aquéllos como de éstos. En particular, lo mismo que para los cuerpos cristalinos, para los líquidos es característico determinado volumen, aunque como un gas, el líquido toma la forma del recinto donde se encuentra. Además, en lo que atañe al estado cristalino es característica la disposición regular de las partículas (átomos y moléculas). De acuerdo con investigaciones radioscópicas, resulta que en lo que se refiere a la disposición de las partículas en un líquido, éstos también ocupan una posición intermedia. En la disposición de las partículas de un líquido se observa el llamado *orden de corto alcance*. Esto significa, que en relación con cualquier partícula, la disposición de las vecinas más próximas es regular (ordenada). Sin embargo, a medida que nos alejamos de la partícula dada, la disposición de otras partículas con respecto a ella va perdiendo la regularidad y, con bastante rapidez, ésta desaparece por completo en la disposición de las partículas. En los cristales se observa el *orden de largo alcance*; la disposición regular de las partículas respecto de cualquiera de ellas se observa en los límites de un considerable volumen.

La existencia del orden de corto alcance en los líquidos es la causa de que la estructura de éstos sea denominada *casicristalina*.

Por la carencia del orden de largo alcance, salvo raras exclusiones, en los líquidos no observamos la anisotropía, característica de los cristales con disposición regular de las partículas. En los líquidos con moléculas alargadas podemos ver la orientación igual de las moléculas en los márgenes de un considerable volumen, lo que condiciona la anisotropía de las propiedades ópticas y de algunas otras. Semejantes líquidos han recibido el nombre de *cristales líquidos.* En éstos sólo es regular la orientación de las moléculas, mientras que en la disposición mutua de éstas no se observa el orden de largo alcance, lo mismo que en los líquidos corrientes.

La posición intermedia de los líquidos está condicionada por el hecho de que por sus propiedades, el estado líquido resulta ser en particular complicado. Por esta razón, su teoría está mucho menos desarrollada que la de los estados cristalino o gaseoso. Hasta la fecha no hay una teoría de los líquidos acabada y ampliamente reconocida. Considerables méritos en la elaboración de una serie de problemas de la teoría del estado líquido corresponden al eminente científico soviético Ya. I. Frénkel.

Según la teoría de Frénkel, el movimiento térmico en los líquidos tiene el siguiente carácter. En el transcurso de cierto intervalo de tiempo, cada molécula oscila junto a determinada posición de equilibrio. De vez en cuando, la molécula cambia el sitio de equilibrio, desplazándose a salto a una nueva posición, distanciada de la anterior a una longitud del orden de las dimensiones de las propias moléculas. De este modo, las moléculas sólo se desplazan con lentitud por el interior del líquido, encontrándose cierto tiempo en el entorno de determinados lugares. Según la metafórica expresión de Frénkel, las moléculas «peregrinan» por todo el volumen del líquido, haciendo vida nómada, con la que los viajes de corto plazo se cambian por prolongados plazos de vida sedentaria. La duración de estas paradas es muy diferente y se siguen mutuamente de manera desordenada, pero la duración media de las oscilaciones junto a una misma posición de equilibrio es una magnitud constante para el líquido y disminuye bruscamente al subir la temperatura. Por esta causa, al elevar la temperatura crece con fuerza la movilidad de las moléculas, lo que a su vez provoca la disminución de la viscosidad del líquido.

Hay sólidos que en muchos sentidos son más próximos a los líquidos que a los cristales. En estos cuerpos, llamados *amorfos*, no se observa la anisotropía. Como en los líquidos, en la disposición de sus partículas sólo vemos el orden de corto alcance. La transición de un sólido amorfo al estado líquido durante el calentamiento se produce de modo constante, mientras que la conversión de un cristal en líquido se realiza por salto (esto será tratado con más detalle en el § 125). Todo esto nos permite considerar los sólidos amorfos como líquidos sobreenfriados, cuyas partículas tienen limitada movilidad a causa de la creciente viscosidad.

Un ejemplo clásico de un sólido amorfo es el vidrio. A estos cuerpos también pertenecen las resinas, el betún, etc.

§ 116. Tensión superficial

En los líquidos, las moléculas se encuentran tan cerca unas de otras que las fuerzas de atracción entre ellas alcanzan considerable magnitud. Pero como la interacción decrece rápidamente con la distancia, a partir de cierta distancia las fuerzas de atracción pueden ser despreciadas. Como ya sabemos (véase el § 91), esta distancia r recibe el nombre de *radio de acción molecular*, mientras que la esfera de radio r denomínase *esfera de acción molecular*. El radio de acción molecular tiene una magnitud del orden de varios diámetros eficaces de la molécula.

Cada una de las moléculas experimenta la atracción ejercida por todas las moléculas vecinas que se hallan en los límites de la esfera de acción molecular, cuyo centro coincide con la molécula dada. Para una molécula que se encuentra a una distancia mayor que r

de la superficie del líquido, la resultante de todas aquellas fuerzas será, por término medio, igual a cero (fig. 116.1). Si la molécula se encuentra a una distancia menor que r de la superficie, el problema es otro. Como la densidad del vapor (o del gas con el que el líquido limita) es mucho menor que la del líquido, la parte de la esfera de acción molecular que sobresale del líquido estará menos rellena de moléculas que el resto de la esfera. Por esta causa, sobre cada molécula que se halla en una capa superficial de grosor r, actuará una fuerza dirigida hacia el interior del líquido. La magnitud de esta fuerza crece en dirección desde el límite interior al exterior de dicha capa.

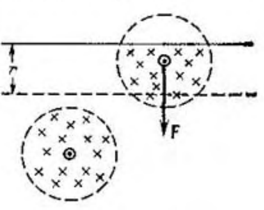


Fig. 116.1

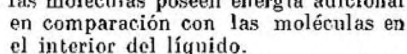
La transición de la molécula desde la profundidad del líquido a la capa superficial está relacionada con la necesidad de realizar trabajo contra las fuerzas ejercidas sobre la capa superficial. Este trabajo es realizado por la molécula a cuenta de su reserva de energía cinética y está dirigida al aumento de la energía potencial de la molécula, del mismo modo que el trabajo que realiza un cuerpo al volar hacia arriba contra las fuerzas de la gravedad terrestre va al aumento de la energía potencial del cuerpo. Durante la transición inversa de la molécula hacia el interior del líquido, la energía potencial que poseía la molécula en la capa superficial, se convierte en energía cinética de la molécula.

Así, pues, en la capa superficial las moléculas tienen energía potencial adicional. En su total, la capa superficial posee energía complementaria que es parte componente de la energía interna del líquido.

Ya que la posición de equilibrio corresponde al mínimo de energía potencial, el líquido dejado de sí mismo, tomará la forma con la mínima superficie, o sea, la esférica. Por regla, en la vida cotidiana no observamos los líquidos «dejados de sí mismos», sino líquidos que experimentan la acción de las fuerzas de la gravedad terrestre. En tal caso, el líquido toma la forma correspondiente al mínimo de energía sumaria, es decir, de la energía de las fuerzas de la gravedad y la energía superficial.

Con el aumento de las dimensiones del cuerpo, el volumen crece como el cubo de las dimensiones lineales, mientras que el área, sólo como el cuadrado. Por esto, la energía en el campo de la gravedad, proporcional al volumen de cuerpo, varía con las dimensiones con mayor rapidez que la energía superficial. En pequeñas gotas del líquido desempeña prevalente papel la energía superficial, por lo que tales gotas tienen forma próxima a la esférica. Las gotas grandes

se achatan bajo la acción de las fuerzas de la gravedad, a pesar de que en semejante caso, la energía superficial crece. Grandes masas de líquido toman la forma del depósito en que se encuentran, adquiriendo la superficie libre posición horizontal.

La presencia de la energía superficial hace que el líquido tienda a reducir su superficie. El líquido se comporta como si estuviera contenido en una película elástica estirada, que tiende a comprimirse. Hay que tener en cuenta que, en realidad, no existe ninguna película que limite el líquido por el exterior. La cuestión radica sólo en que en la capa superficial las moléculas poseen energía adicional

en comparación con las moléculas en el interior del líquido.

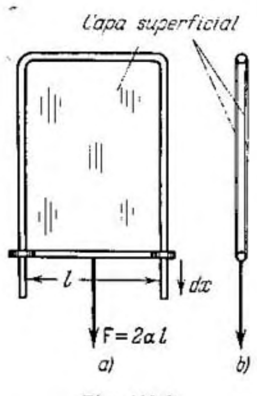


Fig. 116.2

Destaquemos mentalmente cierta parte de la superficie de un líquido, limitada por un contorno cerrado. La tendencia de este sector a reducirse conduce a que sobre los sectores que con él limitan, éste actúa con fuerzas distribuidas por todo el contorno (según la tercera ley de Newton los sectores exteriores de la capa superficial actúan sobre la parte de la superficie que examinamos con fuerzas de igual magnitud, pero de sentido opuesto). Dichas fuerzas denomínanse *fuerzas de tensión superficial* y están dirigidas por la tangente a la superficie del líquido, de forma perpendicular al sector del contorno sobre el que actúan.

Designemos por α la fuerza de tensión superficial que corresponde a la unidad de longitud del contorno. Esta magnitud recibe el nombre de *coeficiente de tensión superficial*. En el SI se mide en newtones por metro y en el sistema CGS, en dinas por centímetro.

Supongamos que hay un cuadro rectangular con una barrita móvil, que está cubierto de una película de líquido (fig. 116.2). Esta película es un pequeño volumen plano del líquido, limitado por los dos lados por una capa superficial (véase la fig. 116.2, *b* en la que se muestra el corte del cuadro). A causa de la tendencia a la reducción que experimenta la capa superficial, la película ejercerá sobre la barrita una fuerza igual a $2\alpha l$. Para que la barrita esté en equilibrio, a ella hay que aplicar una fuerza exterior F, equivalente a la fuerza de tensión de la película, es decir, a $2\alpha l$. Supongamos que la barrita se ha desplazado con exclusiva lentitud en el sentido de acción de la fuerza F a una pequeña magnitud dx. Este proceso se acompaña del trabajo que el líquido efectúa sobre la barrita

$d'A = -2\alpha l\, dx = -\alpha\, dS$, donde dS es el incremento del área de la capa superficial. Con semejante aumento de la superficie, una cantidad adicional de moléculas pasa de la profundidad del líquido a la capa superficial, perdiendo con ello su velocidad. Por esta razón, si la transformación transcurriera adiabáticamente, el líquido se enfriaría ligeramente. No obstante, hemos supuesto que la transformación se produce con gran lentitud (reversiblemente), por lo que la temperatura de la película queda invariable a cuenta de la afluencia de calor del exterior. Así, pues, la transformación transcurre de forma isotérmica.

En el § 109 establecimos que el trabajo que se realiza durante una transformación isotérmica reversible es igual al decrecimiento de la energía libre (véase (109.11)). Por lo tanto, podemos escribir que

$$d'A = -\alpha\, dS = -dF.$$

El resultado obtenido quiere decir que durante el aumento isotérmico del área de la capa superficial en dS, la energía libre del líquido crece en $dF = \alpha\, dS$. De aquí se desprende que el coeficiente de tensión superficial α es la energía libre adicional que posee la unidad del área de la capa superficial. De acuerdo con esto, α puede ser expresada no sólo en newtones por metro (o en dinas por centímetro), sino que también en julios por metro cuadrado (o en ergios por centímetro cuadrado).

Las impurezas se reflejan fuertemente en la magnitud de la tensión superficial. Por ejemplo, la disolución de jabón en el agua reduce casi una vez y media su coeficiente de tensión superficial. Y a la inversa, la disolución de NaCl en el agua conduce al aumento de α.

Con el aumento de la temperatura la diferencia entre las densidades del líquido y su vapor saturado disminuye (véase el § 123). Por este motivo, disminuye también el coeficiente de tensión superficial. A la temperatura crítica[1]) α se reduce a cero.

§ 117. Presión bajo la superficie curvada de un líquido

Consideremos la superficie de un líquido que se apoya en cierto contorno plano (fig. 117.1, *a*). Si la superficie del líquido no es plana, su tendencia a reducirse conducirá al surgimiento de una presión adicional a la que experimenta un líquido con superficie plana. Cuando la superficie es convexa la presión adicional es positiva (fig. 117.1, *b*), al ser la superficie cóncava, negativa (fig. 117.1, *c*). En este último caso, tendiendo a reducirse, la capa superficial estira el líquido.

Es evidente que la magnitud de la presión adicional debe crecer al aumentar el coeficiente de tensión superficial α y la curvatura de la superficie. Calculemos la presión adicional para la superficie

[1]) La determinación de la temperatura crítica se ofrece en el § 123.

esférica del líquido. Con este fin, cortemos mentalmente en dos hemisferios una gota esférica de líquido con un plano diametral (fig. 117.2). A causa de la tensión superficial, los dos hemisferios se atraen mutuamente con una fuerza

$$F = l\alpha = 2\pi R\alpha.$$

Esta fuerza aprieta entre sí los dos hemisferios por una superficie $S = \pi R^2$ y, por consiguiente, condiciona la presión adicional

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\alpha}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R}. \qquad (117.1)$$

La curvatura de la superficie esférica es igual por doquier y se determina por el radio de la esfera R. Es evidente, que mientras

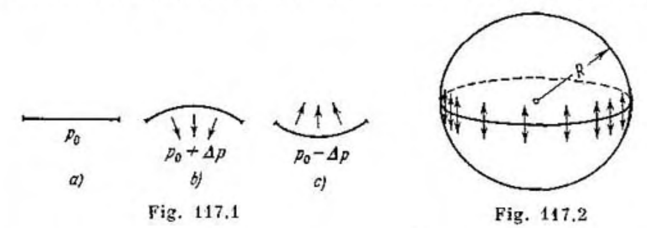


Fig. 117.1

Fig. 117.2

menor es R mayor será la curvatura de la superficie esférica. La curvatura de una superficie tomada al azar suele ser caracterizada mediante la llamada curvatura media, que puede ser distinta para diversos puntos de la superficie.

La curvatura media se determina con ayuda de la curvatura de las secciones normales. Denomínase sección normal de una superficie en cierto punto la línea de intersección de esta superficie por la normal a la superficie en el punto dado. En lo que atañe a una esfera, cualquier sección normal es una circunferencia de radio R (R es el radio de la esfera). La magnitud $H = 1/R$ determina la curvatura de una esfera. En el caso general, diversas secciones normales, trazadas por un mismo punto, tienen diferente curvatura. En geometría se demuestra que la semisuma de los radios inversos de curvatura

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (117.2)$$

para cualquier par de secciones normales, perpendiculares entre sí, tiene el mismo valor. Esta magnitud es la curvatura media de la superficie en el punto dado.

Los radios R_1 y R_2 en la fórmula (117.2) son magnitudes algebraicas. Si el centro de curvatura de la sección normal yace bajo dicha

superficie, el correspondiente radio de curvatura es positivo; si el centro de curvatura yace sobre la superficie, el radio de curvatura es negativo (fig. 117.3). Así, pues, una superficie que no sea plana puede tener curvatura media igual a cero. Para esto es preciso que los radios de curvatura R_1 y R_2 sean iguales en magnitud y de signos opuestos.

Para una esfera $R_1 = R_2 = R$, de forma que en correspondencia con (117.2) $H = 1/R$. Sustituyendo en (117.1) $1/R$ por H, obtenemos:

$$\Delta p = 2H\alpha. \qquad (117.3)$$

Laplace demostró que la fórmula (117.3) es justa para superficies de toda forma, si por H entendemos la curvatura media de la superficie en aquel punto bajo el que se determina la presión adicional. Poniendo en (117.3) la expresión (117.2) para la curvatura media, llegamos a la fórmula para la presión adicional debajo de una superficie arbitraria:

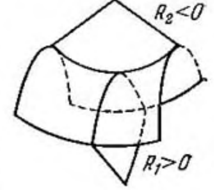


Fig. 117.3

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (117.4)$$

Ésta recibe el nombre de *fórmula de Laplace*.

La presión adicional (117.4) origina la variación del nivel del líquido en tubos finos (capilares), a causa de lo cual, en ciertas ocasiones se denomina *presión capilar*.

§ 118. Fenómenos que se producen en el límite entre un líquido y un sólido

Todo lo dicho en el § 116 acerca de las condiciones particulares en que se encuentran las moléculas de la capa superficial también se refiere por completo a los sólidos. Por lo tanto, lo mismo que los líquidos éstos tienen tensión superficial.

Al estudiar los fenómenos que se producen en el límite entre diversos cuerpos, hay que tener en cuenta que la energía superficial de un líquido o un sólido, no sólo depende de las propiedades del líquido o del sólido, sino que también de las propiedades de la sustancia con que ellos limitan. Hablando en rigor, hay que considerar la energía superficial sumaria α_{12} de dos sustancias que limitan entre sí (fig. 118.1). Sólo cuando una de las sustancias es gaseosa, no reacciona químicamente con la otra y se diluye en ella en reducido grado, podemos simplemente hablar sobre la energía superficial (o sobre el coeficiente de tensión superficial) del segundo cuerpo sólido o líquido.

Si al mismo tiempo limitan entre sí tres sustancias: sólida, líquida y gaseosa (fig. 118.2) todo este sistema toma una configuración co-

rrespondiente al mínimo de la energía sumaria (superficial, en el campo de fuerzas, etc.). En particular, el contorno por el que limitan las tres sustancias se dispone en la superficie del sólido de modo que sea igual a cero la suma de las proyecciones de todas las fuerzas de la tensión superficial aplicadas a cada elemento del contorno sobre la dirección por la que dicho elemento puede desplazarse (es decir, sobre la dirección tangente a la superficie del sólido). De la

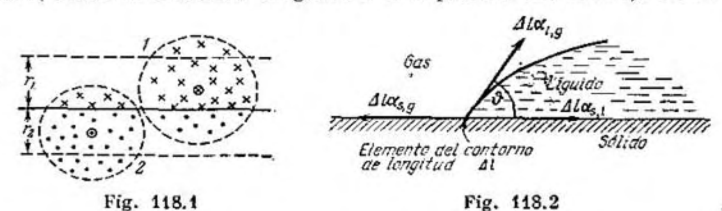


Fig. 118.1 Fig. 118.2

fig. 118.2 se deduce que la condición de equilibrio del elemento del contorno de longitud Δl se escribirá de la forma siguiente:

$$\Delta l \alpha_{s,g} = \Delta l \alpha_{s,l} + \Delta l \alpha_{l,g} \cos \vartheta, \qquad (118.1)$$

donde $\alpha_{s,g}$, $\alpha_{s,l}$, y $\alpha_{l,g}$ son los coeficientes de la tensión superficial en los límites: sólido—gas, sólido—líquido y líquido—gas.

El ángulo ϑ, que se cuenta en el interior del líquido entre las tangentes a la superficie del sólido y la superficie del líquido, recibe el nombre de *ángulo de contacto* o *de capilaridad*. De acuerdo con (118.1)

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha_{s,g} - \alpha_{s,l}}{\alpha_{l,g}}. \qquad (118.2)$$

El ángulo de contacto puede ser determinado con la expresión (118.2) sólo a condición de que

$$\frac{|\alpha_{s,g} - \alpha_{s,l}|}{\alpha_{l,g}} \leqslant 1. \qquad (118.3)$$

Si esta condición no se cumple, es decir, $|\alpha_{s,g} - \alpha_{s,l}| > \alpha_{l,g}$ con ningún valor de ϑ puede establecerse el equilibrio. Esto sucede en dos casos.

1) $\alpha_{s,g} > \alpha_{s,l} + \alpha_{l,g}$. Por muy pequeño que sea el ángulo ϑ, la fuerza $\alpha_{s,g}$ vence a las otras dos (fig. 118.3, *a*). En este caso, el líquido se extiende ilimitadamente por la superficie del sólido y se dice que el líquido *moja perfectamente*. La sustitución de la superficie sólido—gas por dos superficies sólido—líquido y líquido—gas, desde el punto de vista energético resulta ser ventajosa. Cuando el líquido moja perfectamente, el ángulo de contacto es igual a cero.

2) $\alpha_{s,l} > \alpha_{s,g} + \alpha_{l,g}$. Por muy próximo que el ángulo ϑ sea a π, la fuerza $\alpha_{s,l}$ vence a las otras dos (fig. 118.3, *b*). En semejante caso, la superficie por la que el líquido limita con el sólido se concentra en un punto, el líquido se separa de la superficie sólida, decimos que el líquido *no moja en absoluto*. La sustitución de la superficie sólido—líquido por dos superficies, sólido—gas y líquido—gas

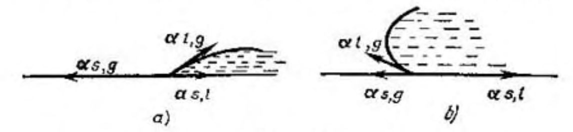


Fig. 118.3

es ventajosa desde el punto de vista energético. Cuando el líquido no moja en absoluto, el ángulo de contacto es igual a π.

Al observar la condición (118.3) el ángulo de contacto puede ser agudo u obtuso en dependencia de la correlación entre $\alpha_{s,g}$ y $\alpha_{s,l}$. Si $\alpha_{s,g}$ es mayor que $\alpha_{s,l}$, el $\cos\vartheta > 0$ y el ángulo ϑ, agudo (fig. 118.4, *a*). Aquí el líquido puede mojar parcialmente. Si $\alpha_{s,g}$

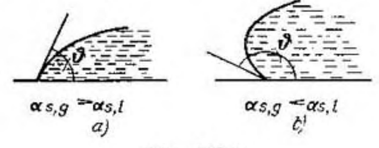


Fig. 118.4

es menor que $\alpha_{s,l}$, $\cos\vartheta < 0$ y el ángulo ϑ, es obtuso (fig. 118.4, *b*). En tal caso el líquido no moja parcialmente.

El hecho de que el líquido no moje conduce a curiosos fenómenos. Es conocido que una aguja o una cuchilla de afeitar cubiertas de grasa pueden mantenerse en la superficie del agua. La explicación de este fenómeno, al parecer asombroso, puede ser ofrecida partiendo de razonamientos energéticos. Una superficie de acero cubierta de grasa no se moja por el agua; la superficie de contacto acero—agua posee mucho mayor energía que la superficie acero—aire o bien aire—agua. La sumersión completa de la aguja en el agua se acompaña por el aumento de la energía superficial del valor $S\alpha_{s,g}$ (acero—aire) al valor $S\alpha_{s,l}$ (acero—agua), donde S es el área de la aguja. La variación de la energía superficial durante la sumersión se describe por la curva E_{sup} representada en la fig. 118.5. La letra h designa la altura de la aguja sobre el fondo del recipiente; h_0, la altura de la superficie del líquido sobre el nivel del fondo. La de-

pendencia entre la energía potencial de la aguja en el campo de la gravedad terrestre E_{grav} y h tiene la forma de una recta que pasa por el origen de coordenadas. La energía total E_t, igual a la suma de E_{sup} y E_{grav}, tiene su mínimo con $h = h_0$, lo que da a la aguja la posibilidad de flotar en la superficie del agua. Si hacemos presión sobre la aguja y la obligamos a que se sumerja a tal profundidad que la energía total pase por el máximo y comience a disminuir, la aguja se sumergirá más adelante por sí sola y se hundirá.

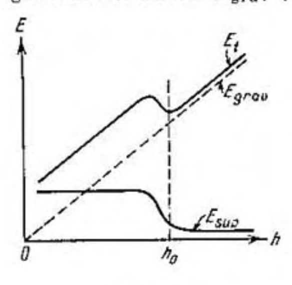


Fig. 118.5

De modo análogo se «lleva el agua en un tamiz». Si el agua no moja el tamiz (lo que se puede conseguir cubriendo de parafina los hilos que forman el tamiz) y la capa de agua en éste no es muy gruesa, un pequeño desplazamiento del nivel del líquido hacia abajo (fig. 118.6) será acompañado del aumento de la energía superficial,

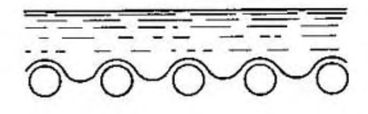


Fig. 118.6

que en magnitud superará la disminución de la energía en el campo de las fuerzas de la gravedad. Por esta razón, el tamiz detendrá el agua sin que ésta se derrame.

§ 119. Fenómenos capilares

La presencia del ángulo de contacto conduce a que junto a las paredes del recipiente se observa la curvatura de la superficie del líquido. En un fino tubo (capilar[1])) o bien en una estrecha holgura entre dos paredes, toda la superficie resulta curvada. Si el líquido moja las paredes, la superficie será cóncava, si no las moja, convexa (fig. 119.1). Las superficies líquidas curvas de esta especie reciben el nombre de *meniscos*.

Si uno de los extremos de un capilar se sumerge en un líquido que se encuentra en un ancho recipiente, bajo la superficie curvada

[1]) Del latín *capillus*, cabello. Capilar, «tubo delgado como un cabello».

del capilar, la presión diferirá en la magnitud Δp, determinada según la fórmula (117.4), de la presión bajo la superficie en el recipiente ancho. Como resultado, cuando el capilar se moja, el nivel del líquido en él será más alto que en el recipiente; cuando no se moja, más bajo.

La variación de la altura del nivel del líquido en tubos u holguras estrechos, denomínase *capilaridad*. En amplio sentido, entendemos por fenómenos de capilaridad todos aquellos que están condicionados por la existencia de la tensión superficial. En particular, la presión provocada por la tensión superficial (117.4) es llamada, como ya indicamos, presión capilar.

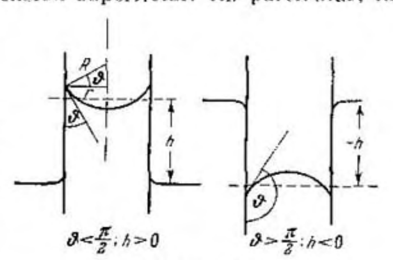


Fig. 119.1

Entre el líquido en el capilar y en el ancho recipiente se establece semejante diferencia de niveles h, con la que la presión hidrostática ρgh equilibre la presión capilar Δp:

$$\rho gh = 2\alpha/R. \qquad (119.1)$$

En esta fórmula α es la tensión superficial en el límite líquido—gas, R, el radio de curvatura del menisco. Este radio puede ser expresado por intermedio del ángulo de contacto ϑ y el radio del capilar r. En efecto, en la fig. 119.1 vemos que $R = r/\cos\vartheta$. Poniendo este valor en la fórmula (119.1) y resolviendo la ecuación obtenida respecto de h, llegamos a la fórmula

$$h = 2\alpha \cos\vartheta/\rho gr. \qquad (119.2)$$

En correspondencia con el fenómeno de que el líquido que moja asciende por el capilar, mientras que el que no moja, desciende, la fórmula (119.2) nos da en el caso de $\vartheta < \pi/2$ ($\cos\vartheta > 0$) h positivas y con $\vartheta > \pi/2$ ($\cos\vartheta < 0$), h negativas.

Al deducir la expresión (119.2) supusimos que la forma del menisco era esférica. La fórmula para h también puede ser obtenida partiendo de razonamientos energéticos, con la particularidad de que no surge la necesidad de hacer suposiciones especiales sobre la forma del menisco. La posición de equilibrio del menisco corresponde al mínimo de energía E del sistema líquido—capilar. Esta energía se compone de la energía superficial en los límites líquido—pared, líquido—gas y pared—gas, así como de la energía potencial del líquido en el campo de la gravedad terrestre.

Hallemos el incremento de la energía dE que corresponde al incremento de la altura de elevación dh del líquido en el capilar. Al aumentar la altura en dh la superficie de contacto del líquido con

la pared del capilar aumenta en $2\pi r\,dh$, por lo que la energía recibe un incremento igual a $2\pi r\alpha_{s,l}\,dh$. Simultáneamente, disminuye la superficie de contacto de la pared con el gas, lo que se acompaña de un incremento de la energía igual a $-2\pi r\alpha_{s.g}\,dh$. La energía potencial en el campo de la gravedad terrestre recibe un incremento igual a la fuerza de la gravedad que actúa sobre el volumen sombreado del líquido (fig. 119.2), multiplicado por h, es decir, igual a $g\rho\pi r^2 h\,dh$. La variación del nivel del líquido en el recipiente ancho puede ser despreciada. Así, pues,

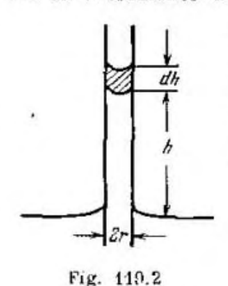


Fig. 119.2

$$dE = 2\pi r\,(\alpha_{s.l} - \alpha_{s.g})\,dh + g\rho\pi r^2 h\,dh.$$

De aquí sigue que

$$\frac{dE}{dh} = 2\pi r\,(\alpha_{s,l} - \alpha_{s,g}) + g\rho\pi r^2 h.$$

Igualando esta derivada a cero, obtenemos la condición de equilibrio, de la que se desprende, que

$$h = \frac{2\,(\alpha_{s,g} - \alpha_{s,l})}{\rho g r}. \qquad (119.3)$$

De acuerdo con la fórmula (118.2) $\alpha_{s.g} - \alpha_{s.l} = \alpha_{l\,g} \cos\vartheta$. Realizando en (119.3) semejante sustitución y designando $\alpha_{l.g}$ simplemente por α, llegamos a la fórmula (119.2).

CAPÍTULO XV

EQUILIBRIOS Y TRANSICIONES DE FASE

§ 120. Introducción

En termodinámica se denomina fase el conjunto de las partes homogéneas y de iguales propiedades de un sistema. Vamos a explicar este concepto en los siguientes ejemplos. En un recipiente cerrado hay agua y sobre ella, una mezcla de aire y vapores de agua. Aquí se trata de un sistema que consta de dos fases: una de ellas está formada por el agua, la segunda, por la mezcla de aire y vapores de agua. Si añadimos al agua unos pedacitos de hielo, éstos formarán la tercera fase. También son diferentes fases diversas modificaciones cristalinas de cierta sustancia. Por ejemplo, el diamante y el grafito son distintas fases sólidas del carbono.

A determinadas condiciones, diferentes fases de una misma sustancia, al hacer entre sí contacto, pueden hallarse en equilibrio. El equilibrio de dos fases sólo puede existir en un determinado intervalo de temperaturas, con la particularidad de que a cada valor de la temperatura T corresponde una presión p determinada en absoluto, con la que el equilibrio es posible. De este modo, en el diagrama (p, T) el estado de equilibrio de dos fases estará representado por la línea

$$p = f(T). \qquad (120.1)$$

Tres fases de una misma sustancia (sólida, líquida y gaseosa o bien líquida y dos sólidas) sólo pueden estar en equilibrio con valores únicos de la temperatura y la presión, que en el diagrama (p, T) corresponde al punto llamado *triple*. Este punto yace en la intersección de las curvas de equilibrio de las fases, tomadas a pares.

De acuerdo con la práctica, en termodinámica se demuestra que el equilibrio de más de tres fases de una misma sustancia es imposible.

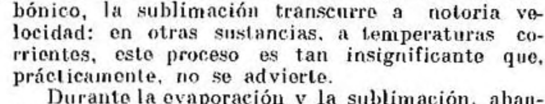
La transición de una fase a otra se acompaña, por regla, por la absorción o desprendimiento de calor, llamado calor latente de transición o, simplemente, calor de transición. Semejantes transiciones reciben el nombre de fase de primer orden. Hay transiciones de una modificación cristalina a otra que no están ligadas con la absorción o desprendimiento de calor. Éstas se denominan transiciones de fase de segundo orden[1]). En este manual nos vamos a limitar al examen de las transiciones de fase de primer orden.

[1]) Las transiciones de fase de segundo orden no se limitan en las transiciones de fase entre diversas modificaciones cristalinas. A ellas pertenecen la transición al estado de superconducción realizado sin la presencia del campo magnético, así como la transición entre dos fases líquidas de helio, llamadas helio-I y helio-II.

§ 121. Evaporación y condensación

En los líquidos y sólidos, a cualquier temperatura, hay cierta cantidad de moléculas con energía suficiente para vencer la atracción de otras moléculas, abandonar la superficie del líquido o del sólido y pasar a la fase gaseosa. La transición de un líquido al estado gaseoso denomínase *evaporación*, mientras que la transición de un sólido al estado gaseoso, *sublimación*.

En mayor o menor grado, todos los cuerpos sólidos sin exclusión sufren sublimación. En ciertas sustancias, tales como el ácido carbónico, la sublimación transcurre a notoria velocidad: en otras sustancias, a temperaturas corrientes, este proceso es tan insignificante que, prácticamente, no se advierte.



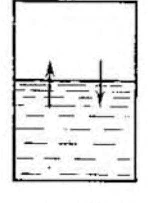


Fig. 121.1

Durante la evaporación y la sublimación, abandonan el cuerpo las moléculas más rápidas, a causa de lo cual disminuye la energía media de las moléculas restantes y el cuerpo se enfría. Para mantener invariable la temperatura del cuerpo que se evapora (o sublima) hay que comunicar a éste constantemente calor. El calor q que hay que comunicar a la unidad de masa de la sustancia para convertirla en vapor que se halle a la misma temperatura que la que tenía la sustancia antes de la evaporación, recibe el nombre de *calor específico de vaporización* (o sublimación).

Durante la condensación, el calor consumido en el transcurso de la evaporación, se recupera al producirse el proceso inverso: el líquido o sólido que se forma en el proceso de condensación se calienta.

Examinemos el proceso de establecimiento del equilibrio entre un líquido y su vapor. Tomemos un recipiente hermético lleno parcialmente de agua (fig. 121.1) y supongamos que del espacio sobre el líquido fue extraída por completo, previamente, la sustancia. A causa de la evaporación, el espacio sobre el líquido empezará a llenarse de moléculas. Las moléculas que han pasado a la fase gaseosa, moviéndose caóticamente, chocan contra la superficie del líquido y, con ello, parte de estos choques se verá acompañado de la transición de las moléculas a la fase líquida. La cantidad de moléculas que por la unidad de tiempo pasan a la fase líquida debe ser, por lo visto, proporcional a la cantidad de moléculas que chocan contra la superficie, que a su vez es proporcional a $n\langle v\rangle$ (véase (95.6)), es decir, crece con la presión p. Por consiguiente, junto con la evaporación transcurre el proceso inverso de transición de las moléculas de la fase gaseosa a la líquida, con la particularidad de que su intensidad crece a medida que aumenta la densidad de las moléculas en el espa-

cio sobre el líquido. Al alcanzar cierta presión, determinada enteramente (para la temperatura dada), la cantidad de moléculas que abandonan el líquido y que retornan a él, se igualará. A partir de este momento la densidad del vapor deja de variar. Entre el líquido y el vapor se establece un equilibrio móvil que existirá hasta que no cambie el volumen o la temperatura del sistema. El vapor que se halla en equilibrio con su líquido denomínase *saturado*. Recibe el nombre de *presión* (o *tensión*) *del vapor saturado*, aquella con la que se observa el equilibrio.

La cantidad de moléculas que abandonan el líquido por unidad de tiempo crece en alto grado con la temperatura. El número de moléculas que chocan con la superficie del líquido depende en menor grado de la temperatura (por $\langle v \rangle$ como $\sqrt{T}$). Por esta razón, al crecer la temperatura, el equilibrio entre fases se altera y durante cierto tiempo el flujo de moléculas en la dirección líquido → vapor superará el flujo en la dirección vapor → líquido. Este fenómeno continuará hasta que el aumento de la presión conduzca de nuevo al establecimiento del equilibrio móvil. Así, pues, la presión con la que se establece el equilibrio móvil entre el líquido y el vapor, es decir, la presión de los vapores saturados, depende de la temperatura. La forma de esta dependencia se muestra en la fig. 121.2. El sentido de las designaciones $T_{crít}$ y $p_{crít}$ será aclarado en el § 123; Tr es el punto triple (§ 127).

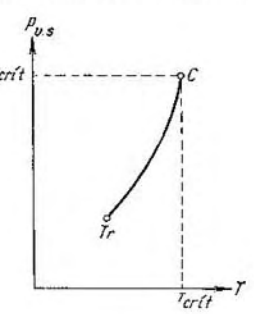


Fig. 121.2

Al aumentar el volumen del recipiente, la presión del vapor disminuirá y el equilibrio se verá alterado. Por este motivo, se convertirá en vapor una cantidad adicional de líquido tal, que la presión sea de nuevo igual a $p_{v.s}$. De modo análogo, la disminución del volumen llevará a la conversión de cierta cantidad de vapor en líquido.

Todo lo dicho acerca del equilibrio entre un líquido y un gas será válido también para el sistema sólido — gas. A cada temperatura corresponde un valor determinado de la presión, con la que se establece el equilibrio móvil entre el sólido y el gas. En lo que se refiere a tales cuerpos como los metales sólidos, a temperaturas corrientes, dicha presión es tan pequeña que, incluso con los instrumentos más sensibles, no puede ser detectada.

§ 122. Equilibrio del líquido y el vapor saturado

Examinemos el proceso de compresión de una sustancia a temperatura constante. Se supone que el estado inicial de la sustancia era gaseoso. Al principio, a medida que disminuye el volumen, la presión del gas crecerá (fig. 122.1). Al alcanzar el volumen V_g, la presión dejará de variar, mientras que la sustancia dejará de ser homogénea: parte del gas se condensará en líquido. Se produce la partición de la sustancia en dos fases: líquida y gaseosa. Con la posterior disminución del volumen, creciente parte de la sustancia pasa a la fase líquida, con esto la transición se ejecuta a presión constante $p_{v.s}$ (presión del vapor saturado). Después de finalizado el proceso de condensación de la sustancia (lo que se produce al alcanzar el volumen V_l), la posterior disminución del volumen comienza a acompañarse del rápido crecimiento de la presión.

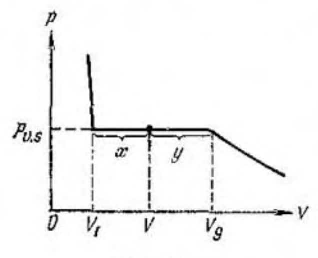


Fig. 122.1

En la fig. 122.1 V_g es el volumen que ocupa la sustancia en estado gaseoso a la presión $p_{v.s}$, V_l, el volumen de la sustancia en estado líquido a esa misma presión. Con cualquier otro valor del volumen V, parte de la sustancia de masa m_l se encontrará en estado líquido, mientras que la parte de masa m_v, en estado vaporoso. Hallemos la relación m_l/m_v.

Denominemos volumen específico V' el volumen de la unidad de masa de la sustancia. Entonces, si dicha masa es igual a m, los volúmenes específicos del vapor saturado y del líquido a la presión $p_{v.s}$, serán iguales a

$$V'_v = \frac{V_g}{m}, \quad V'_l = \frac{V_l}{m}. \tag{122.1}$$

En el estado con el que la masa de la fase líquida es igual a m_l y la del vapor a m_v, a la parte líquida le corresponderá un volumen $V'_l m_l$, a la parte correspondiente al vapor saturado, el volumen $V'_v m_v$. La suma de estos dos volúmenes debe ser igual al volumen V

$$V = V'_l m_l + V'_v m_v.$$

Poniendo aquí las expresiones (122.1) para los volúmenes específicos y sustituyendo la masa m por la suma $m_l + m_v$, hallamos

$$V = V_l \frac{m_l}{m_l + m_v} + V_g \frac{m_v}{m_l + m_v}.$$

De aquí

$$\frac{m_1}{m_v}=\frac{V_g-V}{V-V_1}=\frac{y}{x} \qquad (122.2)$$

(véase la fig. 122.1). De aquí se deduce que la razón entre la masa del líquido y el vapor saturado, en estado bifásico, es igual al cociente entre los segmentos en los que el punto que representa el estado divide el sector horizontal de la isoterma.

Cabe señalar, que a temperaturas lejanas de la crítica (de las que hablaremos en el próximo parágrafo), la diferencia entre los volúmenes del líquido y el vapor suele ser mucho mayor que la mostrada en la fig. 122.1. Por ejemplo, el volumen específico del vapor saturado de agua a 100 °C supera 1600 veces el volumen específico del agua en estado líquido a esa misma temperatura.

Así, pues, en el diagrama (p, V) los estados de equilibrio entre el líquido y su vapor saturado, corresponden al sector horizontal de la isoterma. Semejante resultado es general para todos los estados bifásicos; en la isoterma representada con las variables p y V, al sistema bifásico corresponde el sector horizontal. Los extremos de este sector corresponden a los volúmenes V_1 y V_2 que la sustancia ocupa en las fases primera y segunda. Estas fases pueden ser líquido y vapor o bien líquido y cristales (véase la fig. 125.2) o bien, por último, dos modificaciones cristalinas de una misma sustancia. En todos estos casos, es válida una correlación análoga a (122.2):

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{V_2-V}{V-V_1}$$

(m_1 y m_2 son las masas de la sustancia en las fases primera y segunda).

§ 123. Estado crítico

En la fig. 123.1 se ofrecen las isotermas para varios valores de la temperatura. Como vemos en la figura, con la elevación de la temperatura el sector horizontal de la isoterma se reduce, concentrándose en un punto a la temperatura T_{crit}, llamada *crítica*. Del mismo modo disminuye la diferencia entre los volúmenes específicos y, por consiguiente, entre las densidades del líquido y el vapor saturado. A la temperatura crítica dicha diferencia desaparece por completo. Simultáneamente se elimina toda diferencia entre el líquido y el vapor. La marcha de la temperatura del líquido y del vapor saturado se muestra en la fig. 123.2.

Denomínase *punto crítico C* el límite a que se aproximan los sectores horizontales de las isotermas, al tender la temperatura al valor crítico T_{crit}. El estado que representa el punto C recibe el nombre de *estado crítico* de la sustancia. El volumen V_{crit}, la presión p_{crit} y la

temperatura $T_{crít}$, que corresponden al estado crítico, son llamadas *magnitudes críticas.* Para la isoterma crítica C es el punto de inflexión. La tangente a la isoterma en el punto C es paralela al eje V.

En la fig. 123.1 vemos que la presión del vapor saturado crece con la temperatura, alcanzando el valor $p_{crít}$ con la crítica. A temperaturas mayores que la crítica, la noción de vapor saturado pierde

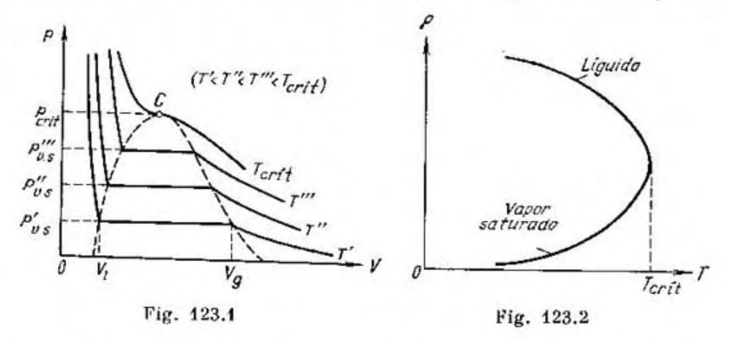


Fig. 123.1

Fig. 123.2

su sentido. Por esta razón, la curva de la dependencia entre la presión del vapor saturado y la temperatura termina en el punto crítico (véase la fig. 121.2).

Si trazamos una línea por los puntos extremos de los sectores horizontales de las isotermas (fig. 123.1) se obtiene una curva campaniforme que limita la región de los estados de dos fases de la sustancia. A temperaturas mayores que la crítica, cualquiera que sea la presión, la sustancia siempre es homogénea. A tales temperaturas la sustancia jamás puede ser licuada por compresión.

D. I. Mendeléiev fue el primero quien en 1860 introdujo la noción de temperatura crítica. El eminente sabio ruso la denominó temperatura absoluta de ebullición de un líquido y la consideraba como la temperatura a la que desaparecen las fuerzas de cohesión entre las moléculas y el líquido, independientemente de la presión y el volumen que ocupa, se transforma en vapor.

La curva campaniforme y el sector de la isoterma crítica, que yace a la izquierda del punto C, divide el diagrama (p, V) en tres regiones (fig. 123.3). Mediante sombreado oblicuo está marcada la región de estados líquidos homogéneos de la sustancia. Debajo de la curva campaniforme está dispuesta la región de estados de dos fases y, por fin, la zona que se halla a la derecha de la curva campaniforme y de la rama superior de la isoterma crítica, es la región de los estados gaseosos homogéneos de la sustancia. En esta última, se puede destacar en particular la parte que yace debajo de la rama derecha

de la isoterma crítica, denominándola región del vapor. En esta región, todo estado se distingue del resto de los estados gaseosos por el hecho de que la sustancia que, primeramente, se encontraba en dicho estado, durante la compresión isotérmica sufre la transformación de licuación. La sustancia que se encuentra en uno cualquiera

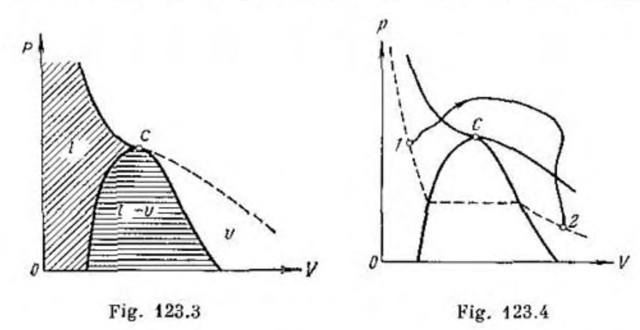


Fig. 123.3

Fig. 123.4

de los estados, a temperaturas mayores que la crítica, no puede ser licuada cualquiera que sea la compresión. La división de los estados gaseosos en gas y vapor no es corriente.

Eligiendo el proceso de transición de forma que no cruce la región de dos fases (fig. 123.4), podemos realizar la transición del estado líquido al gaseoso (o a la inversa) sin dividir la sustancia en dos fases. En tal caso, durante la transición la sustancia será todo el tiempo homogénea.

§ 124. Vapor sobresaturado y líquido recalentado

En el § 91 fue ofrecida la ecuación de Van der Waals para la descripción del estado de los gases con grandes densidades. En la fig. 124.1 están representadas las isotermas de Van der Waals para varias temperaturas, es decir, las curvas que se describen con la ecuación (91.2). Para dichas isotermas es característico que a temperaturas que no sobrepasan el valor $T_{crít}$, las curvas tienen un rizo en S en cuya región el valor prefijado de la presión corresponde a valores distintos del volumen. Las isotermas reales (véase la fig. 123.1) no tienen semejante rizo y, en su lugar, en ellas se observa un sector rectilíneo horizontal. En la fig. 124.2 están sobrepuestas, una sobre otra, una isoterma real y una isoterma de Van der Waals. Resulta que la ecuación de Van der Waals describe bastante bien la marcha de la isoterma con volúmenes mayores que V_g. Con volúmenes menores que V_1, la marcha de la isoterma real sigue también, aproxima-

damente, a la ecuación de Van der Waals. Así, pues, dicha ecuación abarca no sólo el estado gaseoso de la sustancia, sino que asimismo, el líquido.

De la comparación de la isoterma de Van der Waals con la real se desprende que éstas coinciden, más o menos, en los sectores que corresponden a los estados de una fase de la sustancia, pero se comportan de modo completamente diferente en la región de división de las fases. En lugar del rizo en S, que vemos en la isoterma de Van der Waals, la isoterma real tiene en esta región un sector rectilíneo horizontal que se dispone de forma que las áreas F_1 y F_2 (fig. 124.2), abarcadas por el rizo, sean iguales.

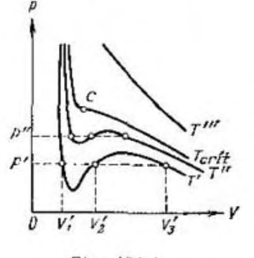


Fig. 124.1

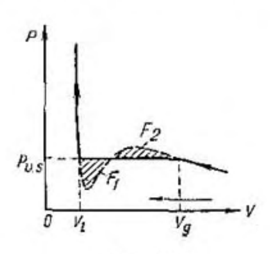


Fig. 124.2

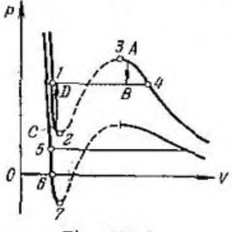


Fig. 124.3

La división en dos fases se explica por la inestabilidad de los estados homogéneos que corresponden al rizo *1—2—3—4* (fig. 124.3). La inestabilidad de los estados en el sector *2—3* es evidente si tenemos en cuenta que en dicho sector la derivada dp/dV es positiva. Por lo tanto, una sustancia capaz de pasar sucesivamente por los estados *2—3* tendría propiedades enteramente contranaturales: el aumento del volumen del gas sería acompañado del aumento de la presión, en lugar de su disminución.

En los sectores *1—2* y *3—4* dp/dV es negativa, de forma que, al parecer, éstos podrían ser realizados. En realidad, con las condiciones dadas los estados, correspondientes a estos sectores, pueden realizarse. Bien es verdad, que no son muy estables: por ejemplo, con el estado A es suficiente que penetre una partícula de polvo en el vapor para que toda la sustancia se divida en dos fases y pase al estado B (véase la transición $A \rightarrow B$ indicada con una flecha en la fig. 124.3). Semejantes estados inestables no del todo, reciben el nombre de *metaestables*. En los estados *1—2* la sustancia denomínase

líquido recalentado, la sustancia en los estados *3—4* es llamada *vapor sobresaturado*.

A temperaturas suficientemente bajas, la parte inferior del rizo de la isoterma de Van der Waals cruza el eje V y pasa a la región de las presiones negativas (véase la isoterma inferior en la fig. 124.3). Es evidente que una sustancia a presión negativa no se halla en estado de compresión, sino que en extensión. A determinadas condiciones, semejantes estados pueden ser realizados. Así, pues, el sector *5—6* en la isoterma inferior corresponde al líquido recalentado, mientras que el sector *6—7*, al *«estirado»*.

Examinemos las condiciones con las que pueden realizarse los estados metaestables. Empecemos por el vapor sobresaturado. Si el vapor no contiene en absoluto inclusiones ajenas, no puede comenzar su condensación en líquido. Para la formación de gotas es preciso que una gran cantidad de moléculas se aproxime simultáneamente a una distancia del mismo orden que la existente entre las moléculas del líquido, lo que es inverosímil. Para el surgimiento de la condensación tienen que haber los llamados *centros de condensación* que capturan las moléculas que a ellos se acercan y las hacen pasar a la fase condensada. Los centros de condensación pueden ser partículas de polvo, gotitas de líquido y, sobre todo, partículas cargadas (iones).

De forma que si el vapor se purifica minuciosamente de las inclusiones ajenas y de los iones, éste puede hallarse a una presión que sobrepase la de los vapores saturados $p_{v.s}$ a la temperatura dada. Semejante estado será metaestable: es suficiente que surja un centro de condensación para que se altere el estado del vapor sobresaturado y la sustancia pase al estado de dos fases.

En la práctica, la obtención del vapor sobresaturado puede realizarse ejerciendo sobre el vapor no sobresaturado una brusca expansión. La rápida expansión transcurre sin intercambio de calor con el medio ambiente y se acompaña del enfriamiento del vapor. El punto que representa el estado del vapor se desplaza, con esto, por una adiabática. Como fue mostrado en el § 88, la adiabática es más abrupta que la isoterma, por lo que el vapor puede pasar del estado estable *1*, correspondiente a la temperatura T_1 (fig. 124.4), al metaestable *2*, correspondiente a una temperatura más baja T_2. Semejante proceso se utiliza en la *cámara de Wilson*, aparato que sirve para observar las trazas de las partículas cargadas (por ejemplo, de las partículas alfa). El aire que contiene la cámara de Wilson, saturado de vapores de agua o de alcohol, sufre brusca expansión. Como resultado, el aire se enfría y los vapores pasan al estado de sobresaturación. La partícula que penetra en la cámara provoca por su recorrido la ionización de las moléculas. El vapor sobresaturado se condensa en los iones surgidos en forma de diminutas gotas, creando así una traza que se ve muy bien.

Consideremos las condiciones de obtención de un líquido reca-

lentado. Lo mismo que el proceso de condensación, la vaporización intensiva (o sea, la ebullición) puede transcurrir sobre inclusiones ajenas, por ejemplo, sobre granitos de arena o burbujas de un gas diluido en el líquido. Si el líquido se purifica minuciosamente de las inclusiones sólidas y los gases diluidos en él, mediante su calentamiento el líquido puede pasar a un estado a presión menor que $p_{v.s}$ a la temperatura dada, sin que el líquido hierva. Semejante estado corresponde al líquido recalentado.

La transición de líquido del estado corriente al recalentado se muestra en la fig. 124.5 (véase la transición *1—2* indicada con una

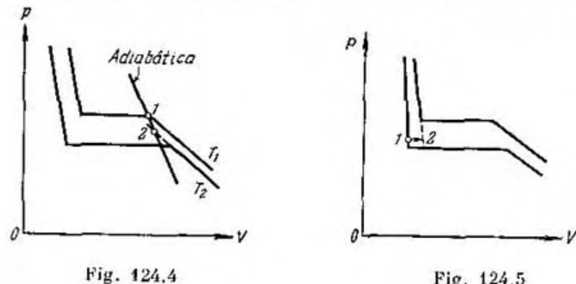


Fig. 124.4

Fig. 124.5

flecha). El estado de un líquido recalentado es metaestable. Es suficiente echar un granito de arena en un líquido recalentado para que el líquido ebulla y pase a un estado de dos fases estable (véase la transición *C—D* en la fig. 124.3).

Un líquido «estirado», por ejemplo, el mercurio, puede ser obtenido del siguiente modo. Si en el mercurio sumergimos un largo tubo de vidrio con un extremo soldado y después de darle la vuelta con el extremo soldado hacia arriba, lo sacamos con precaución al exterior, podemos conseguir una columna de mercurio que superará considerablemente 760 mm. Por lo tanto, el mercurio se mantiene en el tubo no por la fuerza de la presión atmosférica, sino que por la cohesión existente entre sus moléculas. El mercurio en el tubo se hallará en estado «estirado», es decir, a presión negativa.

§ 125. Fusión y cristalización

La transición de un cuerpo cristalino al estado líquido transcurre a una temperatura determinada para cada sustancia y requiere el consumo de cierta cantidad de calor, denominada *calor de fusión*.

Si a una sustancia, que inicialmente se encontraba en estado cristalino, se le comunica cada segundo una misma cantidad de calor, la variación de la temperatura del cuerpo con el tiempo será

como la que se muestra en la fig. 125.1. Al principio, la temperatura del cuerpo crece de manera permanente. Cuando es alcanzada la temperatura de fusión T_{fus} (punto *1* en la fig. 125.1), la temperatura deja de variar, a pesar de que se continúa transmitiendo calor al cuerpo. Simultáneamente, comienza el proceso de fusión del sólido durante la cual nuevas porciones de la sustancia se convierten en líquido. Una vez terminado el proceso de fusión y toda la sustancia pasa al estado líquido (punto *2* en la fig. 125.1), de nuevo comienza a elevarse la temperatura.

La curva de calentamiento de un cuerpo amorfo tiene otro aspecto (véase la línea de trazos en la fig. 125.1). Al transmitir el calor

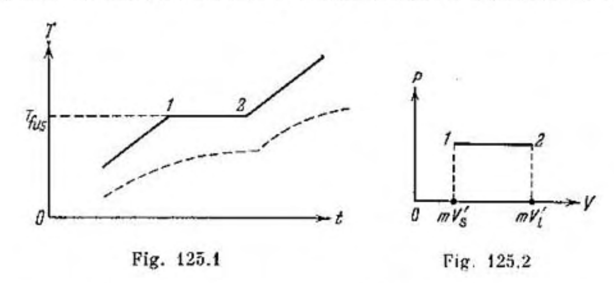


Fig. 125.1 Fig. 125.2

de manera uniforme, la temperatura del cuerpo amorfo crece continuamente. Para estos cuerpos no hay una determinada temperatura de transición al estado líquido. Esta transición transcurre ininterrumpidamente y no por salto. Sólo puede ser indicado el intervalo de temperatura en cuyos márgenes se produce el ablandamiento del cuerpo. Esto se explica porque el líquido y los cuerpos amorfos sólo se distinguen por el grado de movilidad de las moléculas. Como ya dijimos, los cuerpos amorfos son líquidos fuertemente sobreenfriados.

La temperatura de fusión depende de la presión. Así, pues, la transición del estado cristalino al líquido transcurre a condiciones determinadas, que se caracterizan por los valores de la presión y la temperatura. Al conjunto de estos valores corresponde la curva en el diagrama (p, T) que suele llamarse *curva de fusión*. Esta curva es muy abrupta. Por ejemplo, para variar en 1 K la temperatura de fusión del hielo, hay que variar la presión en 132 at.

Los puntos de la curva de fusión determinan las condiciones con las que las fases cristalina y líquida pueden hallarse entre sí en equilibrio. Semejante equilibrio es posible con cualquier correlación entre las masas del líquido y los cristales, es decir, con valores del volumen del sistema contenidos en los límites desde mV'_s hasta mV'_l, donde m es la masa del sistema y V'_s y V'_l, los volúmenes espe-

cíficos de las fases sólida y líquida. Por esta causa, a cada punto de la curva de fusión corresponde en el diagrama (p, V) un segmento de la recta horizontal (fig. 125.2). Como el cuerpo en los estados descritos por los puntos de este segmento tiene una misma temperatura, la recta *1—2* en la fig. 125.2 es el sector de una isoterma correspondiente al estado de dos fases de la sustancia (comp. con los sectores horizontales de la isoterma en la fig. 123.1).

El proceso inverso a la fusión, es decir, la cristalización transcurre del modo siguiente. Durante el enfriamiento de un líquido hasta la temperatura con la que las fases sólida y líquida pueden hallarse en equilibrio a la presión dada (o sea, hasta aquella temperatura con la que transcurre la fusión), comienza el crecimiento simultáneo de cristalitos alrededor de los llamados *centros de cristalización*. Al crecer más y más, llega un momento cuando los cristales por separado se unen entre sí formando un sólido policristalino.

Las partículas sólidas suspendidas en el líquido pueden servir de centros de cristalización. Un líquido minuciosamente purificado de semejantes partículas puede ser enfriado a una temperatura inferior a la de cristalización sin que en él comience la formación de cristales. Este estado de un líquido sobreenfriado es metaestable. Por regla, es suficiente que caiga en semejante líquido una partícula de polvo para que éste se divida en líquido y cristales, que se encuentran a temperatura de equilibrio. Sin embargo, en algunos casos, con grandes sobreenfriamientos, la movilidad de las moléculas del líquido resulta ser tan insignificante, que el estado metaestable puede conservarse largo tiempo. En semejantes casos, el líquido posee muy pequeña fluidez y, de por sí, es un cuerpo sólido amorfo.

El proceso de cristalización se acompaña por el desprendimiento de la misma cantidad de calor que fue absorbido durante la fusión.

§ 126. Ecuación de Clapeyron—Clausius

En los parágrafos anteriores fue aclarado que dos cualesquiera fases de la sustancia sólo pueden encontrarse en equilibrio a determinada presión, cuyo valor depende de la temperatura. Haciendo uso de la noción de entropía podemos obtener la forma general de esta dependencia. Con este fin, consideremos el ciclo de Carnot para un sistema formado por dos fases en equilibrio de la sustancia dada

Para un sistema de dos fases el ciclo de Carnot tiene en el diagrama (p, V) el aspecto ofrecido en la fig 126.1 (se supone que las temperaturas del foco caliente y del foco frío se diferencian en una pequeña magnitud ΔT). Con las cifras *1—2* están marcados los puntos extremos del sector horizontal de una isoterma a la temperatura T. Los estados *1* y *2* son de una fase. Todos los puntos intermedios del segmento *1—2* representan estados de dos fases que se distinguen

entre sí por la distribución de la masa de la sustancia entre las fases primera y segunda.

La transformación isotérmica $A \to B$ se acompaña de la transición de fase de cierta masa m de la sustancia. Con esto, el volumen de la sustancia recibe un incremento igual a $m(V_2' - V_1')$, donde V_1' y V_2' son los volúmenes específicos de las fases primera y segunda. Para que dicha transición pueda realizarse, hay que transmitir a la sustancia una cantidad Q_1 de calor igual a mq_{12}, donde q_{12} es el calor específico absorbido al pasar del estado 1 al 2 a la temperatura T. El calor Q_1 es el que recibe el sistema del foco caliente en el transcurso del ciclo. Durante la transformación isotérmica $C \to D$ el calor se cede al foco frío. La cantidad de calor cedido $Q_2' = m'q_{12}'$, donde q_{12}' es el calor de la transición $1-2$ a la temperatura $T - \Delta T$, mientras que m' es la masa de la sustancia que sufre transición de fase durante la transformación $C \to D$. Esta magnitud se diferencia de m, ya que cierta masa de la sustancia sufre transiciones de fase durante las transformaciones adiabáticas.

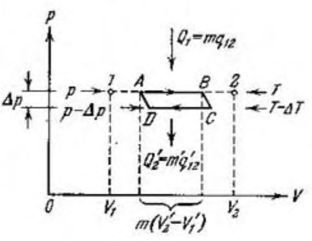


Fig. 126.1

En el sector adiabático $A-B$ la entropía del sistema recibe el incremento ΔS_1 igual a Q_1/T. En el sector isotérmico $C-D$ el incremento de la entropía es igual a $\Delta S_2 = -Q_2'/(T - \Delta T)$. En el transcurso de las transformaciones $B - C$ y $D - A$ la entropía no cambia. Durante el ciclo, el incremento de la entropía es nulo. Por lo tanto,

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q_1}{T} - \frac{Q_2'}{T - \Delta T} = 0.$$

De aquí

$$(Q_1 - Q_2')\,T = Q_1'\,\Delta T. \qquad (126.1)$$

De acuerdo con (104.3) $Q_1 - Q_2'$ es igual al trabajo realizado durante el ciclo. Calculando el área del ciclo, es posible hallar el trabajo. De modo aproximado, el área del ciclo puede considerarse igual a $m(V_2' - V_1')\,\Delta p$ (véase la fig. 126.1). Así llegamos a la correlación

$$Q_1 - Q_2' \approx m(V_2' - V_1')\,\Delta p. \qquad (126.2)$$

En el límite, cuando Δp tiende a cero (para lo que es necesario que ΔT también tienda a cero), la correlación (126.2) se convierte en una rigurosa igualdad.

Pongamos en lugar de $Q_1 - Q_2'$ en (126.1) la expresión (126.2). Además, sustituyamos Q_1 por mq_{12}. Como resultado, tendremos

$$m(V_2' - V_1')\,T\,\Delta p \approx mq_{12}\,\Delta T.$$

De aquí

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \approx \frac{q_{12}}{T(V_2'-V_1')}.$$

Por fin, realizando el paso al límite $\Delta T \to 0$, llegamos a la rigurosa igualdad

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2'-V_1')}. \qquad (126.3)$$

La correlación obtenida recibe el nombre de *ecuación de Clapeyron—Clausius*. Esta ecuación enlaza la derivada de la presión de equilibrio respecto de la temperatura y la diferencia de los volúmenes específicos de las fases que se hallan en equilibrio.

De acuerdo con (126.3) el signo de la derivada dp/dT depende de qué variación del volumen —aumento o disminución— está acompañada la transición de fase que transcurre con absorción de calor. Durante la evaporación de un líquido o sólido el volumen siempre aumenta, por lo que para la curva de evaporación, así como para la de sublimación, dp/dT sólo puede ser positiva: la elevación de la temperatura conduce al aumento de la presión de equilibrio.

Por regla, durante la fusión el volumen aumenta, o sea, $dp/dT > 0$: el aumento de la presión conduce a la elevación de la temperatura de fusión. No obstante, para ciertas sustancias, entre las que se halla el agua, el volumen de la fase líquida es menor que el de la sólida ($V_2' < V_1'$)[1]. En tal caso, $dp/dT < 0$, el aumento de la presión es acompañado de la disminución de la temperatura de fusión. Ejerciendo sobre el hielo fuerte compresión, sin elevar la temperatura a más de 0 °C, es posible provocar la fusión.

La temperatura de transición de una modificación cristalina a otra, subirá o bajará con el crecimiento de la presión, en dependencia de cuál de las fases sólidas tiene mayor volumen específico.

§ 127. Punto triple. Diagrama de estado

Tomemos una sustancia líquida y vapor saturado, que con la primera está en equilibrio y, sin variar el volumen, extrajemos de ella calor. Esta transformación será acompañada de la disminución de la temperatura de la sustancia y del correspondiente decrecimiento de la presión. Por esta causa, el punto que representa el estado de la sustancia en el diagrama (p, T) se desplaza hacia abajo por la curva de evaporación (fig. 127.1). Esto continuará hasta que

[1] Como sabemos, al congelarse el agua aumenta su volumen Por esto, el hielo tiene menor densidad que el agua.

no se alcance la temperatura de cristalización de la sustancia, correspondiente al valor de la presión. Designemos dicha temperatura por T_{tr}. Durante todo el tiempo en el que transcurre la cristalización, la temperatura y la presión quedan invariables. El calor que en tal caso se extrae es el que se desprende en el proceso de cristalización.

La temperatura T_{tr}, así como la presión de equilibrio p_{tr} que a ella corresponde, son los únicos valores de dichos parámetros con los que pueden estar en equilibrio las tres fases de la sustancia: sólida, líquida y gaseosa. El correspondiente punto en el diagrama (p, T)

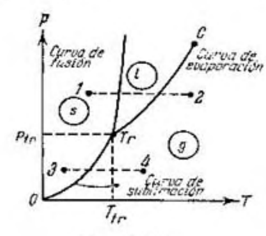


Fig. 127.1

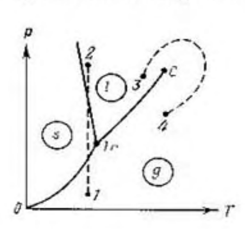


Fig. 127.2

denomínase *punto triple*. Así, pues, el punto triple determina las condiciones con las que pueden hallarse en equilibrio simultáneamente las tres fases de la sustancia.

Al finalizar el proceso de cristalización, las fases sólida y gaseosa se encontrarán en equilibrio. Si continuamos extrayendo calor de la sustancia, la temperatura de nuevo comenzará a disminuir. Del correspondiente modo decrecerá la presión de los vapores que están en equilibrio con la fase cristalina. El punto que caracteriza el estado de la sustancia se desplazará por la curva de sublimación.

La temperatura del punto triple es la temperatura con la que la sustancia se funde al hallarse a la presión p_{tr}. A otras presiones la temperatura de fusión será otra. La ligazón entre la presión y la temperatura de fusión estará representada por la curva de fusión que comienza en el punto triple. De este modo, el punto triple yace en la intersección de tres curvas que determinan las condiciones de equilibrio de dos fases: sólida y líquida, líquida y gaseosa y, por último, sólida y gaseosa.

En función de la correlación entre los volúmenes específicos de las fases sólida y líquida, la curva de fusión marcha como en la fig. 127.1 $(dp/dT > 0)$ o bien como en la fig. 127.2 $(dp/dT < 0)$.

Las curvas de fusión, evaporación y sublimación dividen el plano de coordenadas en tres regiones. A la izquierda de las curvas de

sublimación y fusión se encuentra la región de la fase sólida, entre las curvas de fusión y evaporación yace la región de los estados líquidos y, por fin, a la derecha de las curvas de evaporación y sublimación se extiende el dominio de los estados gaseosos de la sustancia. Cualquier punto en una de estas regiones representa el correspondiente estado de una fase de la sustancia (siempre tenemos en cuenta sólo los estados de equilibrio, o sea, aquellos en los que la sustancia, a condiciones invariables exteriores, puede encontrarse cuan se quiera largo tiempo). Todo punto que yace en una de las curvas que limitan las regiones representa el estado de equilibrio de dos fases correspondientes de la sustancia. El punto triple representa el estado de equilibrio de las tres fases, de forma que en el diagrama cada punto muestra un determinado estado de equilibrio de la sustancia. Por esta razón, es llamado *diagrama de estado*.

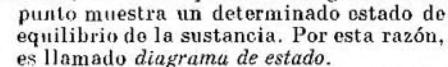


Fig. 127.3

El diagrama de estado de una sustancia con varias modificaciones cristalinas tiene un carácter más complicado. En la fig. 127.3 está representado un diagrama para el caso cuando es igual a dos el número de diversas modificaciones cristalinas. Aquí hay dos puntos triples. En el punto Tr se encuentran en equilibrio el líquido, el gas y la primera modificación cristalina, en el punto Tr' en equilibrio están el líquido y las dos modificaciones cristalinas.

Para cada sustancia concreta, el diagrama de estado se construye sobre la base de datos experimentales. Conociendo el diagrama de estado es posible predecir en qué estado se hallará la sustancia a diferentes condiciones (con distintos valores de p y T), así como qué transformaciones sufrirá la sustancia durante diversos procesos.

Aclaremos lo dicho en los siguientes ejemplos. Si se toma una sustancia en el estado que corresponde al punto *1* en la fig. 127.1 y efectuamos su calentamiento isobárico, la sustancia pasará la secuencia de estados representada con la recta de trazos *1*—*2*: cristales, líquido, gas. Si esta misma sustancia se toma en el estado que muestra el punto *3* y, asimismo, calentarla de forma isobárica, la secuencia de estados (recta de trazos *3*—*4*) será otra: los cristales se convierten en gas directamente, sin pasar por la fase líquida.

Del diagrama de estado se deduce que la fase líquida puede existir en estado de equilibrio sólo a presiones no menores que la del punto triple (eso mismo se refiere a la fase sólida *II* en la fig. 127.3). A presiones menores que p_{tr} sólo se observa líquido sobreenfriado.

Para la mayoría de las sustancia ordinarias el punto triple yace mucho más abajo que la presión atmosférica, por lo que la transición de la fase sólida a la gaseosa se realiza para estas sustancias por la fase líquida intermedia. Así, por ejemplo, el punto triple del agua corresponde a una presión de 4,58 mm Hg y una temperatura de 0,0075 °C. Para el ácido carbónico el punto triple es igual a 5,11 atm (la temperatura del punto triple es de —56,6 °C). Por esta razón, a la presión atmosférica el ácido carbónico sólo puede existir en los estados sólido y gaseoso. El ácido carbónico sólido (hielo seco) se convierte en gas directamente. A la presión atmosférica la temperatura de sublimación del ácido carbónico es igual a —78 °C.

Si el volumen específico de los cristales supera el de la fase líquida, durante algunas transformaciones la conducta de la sustancia puede ser muy original. Tomemos, por ejemplo, una semejante sustancia en el estado que representa el punto *1* en la fig. 127.2 y comprimámosla de forma isotérmica. En el transcurso de tal compresión la presión crece y la transformación será mostrada en el diagrama con una recta vertical (véase la recta a trazos *1—2*). Durante la transformación la sustancia pasa la siguiente secuencia de estados: gas—cristales—estado líquido. Es evidente que semejante secuencia sólo se observa a temperaturas menores que la del punto triple.

En conclusión, cabe señalar una singularidad más del diagrama de estado. La curva de evaporación termina en el punto crítico *C*. Por esta causa, es posible la transición de la región de estados líquidos a la de estados gaseosos, realizada sin pasar por el punto crítico, sin cruzar la curva de evaporación (véase la transición *3—4* representada a trazos en la fig. 127.2). En la fig. 123.4 se muestra el aspecto de semejante transición en el diagrama (p, V). En este caso, la transición del estado líquido al gaseoso (y a la inversa) transcurre ininterrumpidamente, por una secuencia de estados de una fase. Indiquemos que al punto con la coordenada T, tomada en la curva de evaporación, en la fig. 123.4 le corresponde todo el sector horizontal de la respectiva isoterma.

La transición permanente entre los estados líquido y gaseoso es posible porque la diferencia entre ellos tiene más carácter cuantitativo que cualitativo; en particular, estos dos estados carecen de anisotropía. La transición constante del estado cristalino al líquido o gaseoso es imposible, ya que como sabemos, el rasgo característico del estado cristalino es anisotropía. La transición de un estado que tiene anisotropía a otro que no la tiene, puede realizarse sólo por salto, ya que parcialmente no se puede tener anisotropía: ésta o existe o no, la tercera posibilidad está excluida. Por este motivo, las curvas de sublimación y de fusión no pueden interrumpirse del modo que lo hace la curva de evaporación en el punto crítico. La curva de sublimación va al punto $p = 0$ y $T = 0$, la curva de fusión va al infinito.

Del mismo modo es imposible la transición constante de una modificación cristalina a otra. Diversas modificaciones cristalinas de la sustancia se distinguen por elementos de simetría propios sólo de ella. Como cierto elemento de simetría sólo puede existir o no existir, la transición de una fase sólida a otra es únicamente posible por salto. Por esto, la curva de equilibrio de dos fases sólidas, como la de evaporación, se dirige al infinito.

CAPÍTULO XVI

CINÉTICA FÍSICA

§ 128. Fenómenos de transporte

La física estadística trata los estados de equilibrio y las transformaciones reversibles (es decir, aquellas transformaciones con las que el sistema pasa por una secuencia de estados de equilibrio). La ciencia que estudia las transformaciones (procesos) que surgen al haber alteraciones del equilibrio recibe el nombre de *cinética física.*

Cuando el equilibrio se altera, el sistema tiende a retornar al estado de equilibrio. Semejante transformación se acompaña del crecimiento de la entropía y, por consiguiente, es irreversible. Esto quiere decir, que la cinética física estudia transformaciones que son irreversibles.

La violación del equilibrio se va acompañada del surgimiento de flujos de moléculas o de calor, o bien de cargas eléctricas, etc. Por esta razón, los procesos correspondientes denomínanse *fenómenos de transporte*. De lo dicho más arriba se desprende que los fenómenos de transporte son transformaciones irreversibles.

Vamos a estudiar tres fenómenos de transporte: difusión, conductividad térmica y rozamiento interno o bien viscosidad, con la particularidad de que nos vamos a limitar al caso cuando las desviaciones del equilibrio no son grandes. Para empezar, escribiremos las ecuaciones empíricas de dichos procesos, aplicables a cualesquiera medios (sólidos, líquidos y gaseosos). En los siguientes parágrafos se dará la deducción cinético-molecular de las indicadas ecuaciones para los gases.

Al estudiar los fenómenos de transporte tendremos que calcular la cantidad de diversas magnitudes (número de partículas, de masas, de energías, de la cantidad de movimiento) que se transporta por cierta superficie imaginaria. La cantidad de cierta magnitud que pasa por unidad de tiempo por una superficie, recibe el nombre de *flujo* de dicha magnitud. Indiquemos como ejemplo: el flujo de un líquido por la sección transversal de un tubo, el flujo de luz que pasa por el cristal de una ventana o por la ampolla de vidrio de una bombilla eléctrica, etc. Se puede considerar el flujo que pasa por una superficie de cualquier forma; en particular, la superficie puede ser cerrada.

El flujo es una magnitud algebraica escalar. El signo del flujo se determina eligiendo el sentido positivo, por ejemplo, la dirección del eje a lo largo del cual se propaga el flujo. Por regla, el sentido positivo se toma al azar. Cuando las superficies son cerradas se ha

aceptado considerar positivo un flujo que sale por la superficie al exterior, negativo, el que entra al interior.

En este capítulo consideraremos flujos que pasan por superficies planas perpendiculares al eje z. Si las partículas, la energía o la cantidad de movimiento van a ser transportadas por la superficie en dirección al eje z, consideraremos que el flujo es positivo, en el caso contrario, negativo.

La desigualdad de los valores de cierta magnitud f en el espacio, es la causa de cada fenómeno de transporte. Durante el transporte de partículas (difusión) dicha magnitud es la concentración de las partículas, el transporte de éstas transcurre en la dirección del decrecimiento de su concentración. El flujo de calor surge al haber temperaturas desiguales en distintos puntos del medio, con la particularidad de que el calor fluye en la dirección de decrecimiento de la temperatura, etc.

Para simplificar, vamos a considerar que la magnitud f, cuya falta de homogeneidad condiciona la transformación dada (concentración, temperatura, etc.), sólo es función de una sola coordenada z. Entonces, la variación de esta magnitud en el espacio será caracterizada por la derivada df/dz, que, por regla, es llamada gradiente de la magnitud f. Esta denominación no es del todo correcta: hablando en rigor, la derivada de la función escalar $f = f(z)$ por z proporciona la proyección del gradiente de la función sobre el eje z (véase (21.2)). Sin embargo, siguiendo las tradiciones, llamaremos gradiente a las magnitudes de la forma df/dz que entran en las ecuaciones de transporte.

Difusión. Recibe el nombre de difusión la nivelación espontánea de las concentraciones en las mezclas de varias sustancias diferentes (en el caso más sencillo, de dos), condicionada por el movimiento térmico de las moléculas. Este proceso se observa en los medios sólidos, líquidos y gaseosos. En el presente manual nos vamos sólo a limitar a los medios gaseosos.

Supongamos que la unidad de volumen de una mezcla gaseosa de dos componentes contiene n_1 moléculas de un gas y n_2 moléculas de otro. El número total de moléculas por unidad de volumen $n = n_1 + n_2$. La razón

$$c_i = \frac{n_i}{n}$$

se llama *concentración relativa* de las moléculas del i-ésimo género.

Vamos a suponer que por la dirección del eje z se crean gradientes de concentración dc_1/dz y dc_2/dz, con esto $dc_1/dz = -dc_2/dz$ (fig. 128.1). Entonces

$$\frac{d}{dz}(c_1 + c_2) = \frac{1}{n}\,\frac{d}{dz}(n_1 + n_2) = 0.$$

de modo que n y, por la tanto, p son constantes ($p = nkT$). Por esta causa no surgen flujos gasodinámicos. Pero como resultado del movimiento térmico de las moléculas se producirá el proceso de nivelación de la concentración, acompañado del transporte da la masa de cada una de las componentes en la dirección del decrecimiento de su concentración. Como se dijo más arriba, semejante proceso lleva el nombre de difusión.

De forma experimental ha sido establecido que el flujo de moléculas de i-ésimo género que pasa por la superficie S perpendicular al eje z se determina con la expresión

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S, \quad (128.1)$$

donde D es un coeficiente de proporcionalidad, denominado *coeficiente de difusión*.

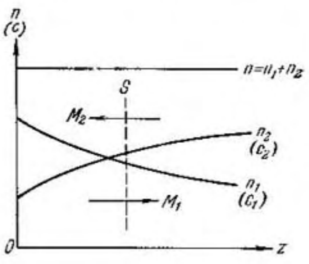


Fig. 128.1

En correspondencia con (128.1), cuando $dn_i/dz > 0$ el flujo N_i será negativo; esto significa que las moléculas se transportan en dirección opuesta a la del eje z (fig. 128.2, a). Al ser $dn_i/dz < 0$ el flujo será positivo, es decir, las moléculas se transportan por la dirección del eje z (fig. 128.2, b). De este modo, el signo menos en la

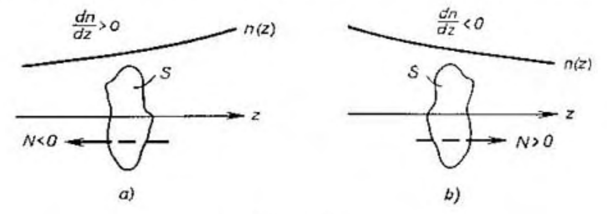


Fig. 128.2

fórmula (128.1) está motivado por el hecho de que el flujo de moléculas está dirigido en el sentido del decrecimiento de la concentración.

La dimensión del flujo de moléculas N es igual a 1/T, la del n_i, a $1/L^3$, la del área S a L^1, dz tiene dimensión L. Por consiguiente, el coeficiente de difusión D tiene la dimensión L^2/T.

Al multiplicar los dos miembros de la igualdad (128.1) por la masa de la molécula del i-ésimo género m_i, obtenemos la expresión

para el flujo de la masa de la i-ésima componente:

$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S. \qquad (128.2)$$

Aquí $\rho_i = n_i m_i$ es la *densidad parcial* de la i-ésima componente; también la denominan *concentración absoluta*.

Las fórmulas (128.1) y (128.2) son las ecuaciones empíricas de la difusión. También suelen llamarse *ley de Fick*.

Conductividad térmica. La experiencia muestra que si en cierto medio (sólido, líquido o gaseoso) se crea un gradiente de temperatura a lo largo del eje z, surgirá un flujo de calor, cuya magnitud será determinada por la fórmula

$$q = -\varkappa \frac{dT}{dz} S. \qquad (128.3)$$

Aquí q es el flujo de calor que pasa por la superficie S perpendicular al eje z, dT/dz, el gradiente de temperatura (con mayor precisión la proyección del gradiente de temperatura sobre el eje z), $\varkappa$ un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades del medio, denominado *coeficiente de conductividad térmica*. La unidad de q es J/s, es decir, W (vatio). Por lo tanto, $\varkappa$ se mide en vatios por metro-kelvin (W/(m·K)). El signo menos en la fórmula (128.3) quiere decir que el calor se transporta en el sentido de la disminución de la temperatura. Por esta causa, los signos de q y de dT/dz son opuestos.

La (128.3) es la ecuación empírica de la conductividad térmica. También se denomina *ley de Fourier*.

Rozamiento interno. De acuerdo con la fórmula (75.4), la fuerza de rozamiento entre dos capas de líquido o de gas, es igual a

$$F = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S, \qquad (128.4)$$

donde η es el *coeficiente de viscosidad*; du/dz, una magnitud que muestra con qué rapidez varía la velocidad del líquido o el gas en el sentido z, perpendicular a la dirección de movimiento de las capas (gradiente de u); S, magnitud de la superficie por la que F actúa. La ecuación (128.4) es la ecuación empírica de la viscosidad.

En correspondencia con la segunda ley de Newton, la interacción de dos capas con la fuerza F debe ser considerada como un proceso durante el cual de una capa a otra, por la unidad de tiempo, se transporta una cantidad de movimiento que por su valor es igual a F. Entonces, la ecuación (128.4) puede tener la forma

$$K = -\eta \frac{du}{dz} S, \qquad (128.5)$$

donde K es la cantidad de movimiento transmitida por segundo de una capa a otra por la superficie S, es decir, el flujo de cantidad de movimiento que pasa por S.

El flujo de cantidad de movimiento K se mide en kg·m/s². Así, pues, la unidad del coeficiente de viscosidad η es kg/(m·s) (kilogramo por metro-segundo)[1].

En la fórmula (128.5) el signo menos está condicionado por el hecho de que la cantidad de movimiento «fluye» en el sentido de la disminución de la velocidad u. Por esto, son opuestos los signos del flujo de la cantidad de movimiento K y de la derivada du/dz.

Recordemos que la fórmula (128.4) determina el mismo módulo de dos fuerzas que ejercen entre sí las capas, dirigidas en sentidos opuestos. Por esta causa, en (128.4) delante del segundo miembro no se puede poner el signo negativo. Además, hay que tomar el módulo de la expresión du/dz (con cualquier signo de la derivada du/dz, el módulo de la fuerza debe ser positivo).

§ 129. Longitud media del recorrido libre

Como las moléculas de gas se encuentran en movimiento térmico, ellas chocan entre sí constantemente. En lo que se refiere a las moléculas, el término «choque» no se debe entender literalmente e imaginarse este proceso de modo semejante al choque de esferas duras. Por choque de las moléculas hay que entender el proceso de interacción entre ellas, como resultado de la cual las moléculas varían el sentido de su movimiento.

En la fig. 129.1 se muestra una curva que representa la energía potencial mutua de dos moléculas como función de la distancia r entre sus centros. Examinemos con ayuda de dicha curva el proceso de aproximación (choque) de las moléculas. Mentalmente ubiquemos el centro de una de las moléculas en el origen de coordenadas mientras que suponemos que el centro de la segunda se desplaza por el eje z. Sea que la segunda molécula se mueve en dirección de la primera desde el infinito, teniendo una reserva inicial de energía cinética $\varepsilon_c = \varepsilon_1$. Al acercarse a la primera molécula, la segunda, bajo la acción de la fuerza de atracción, se moverá a creciente velo-

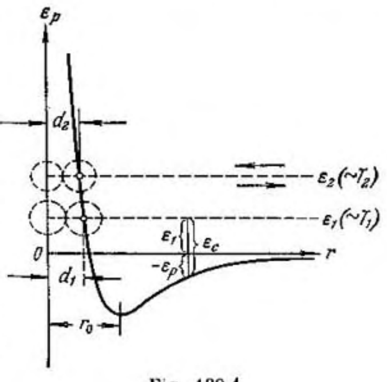


Fig. 129.1

[1]) La unidad de medida η puede ser representada con Pa·s (pascal-segundo).

cidad, por lo que también aumentará la energía cinética de la molécula ε_c. Sin embargo, la energía total del sistema, igual a $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p$, quedará invariable (el sistema de dos partículas es cerrado) e igual a ε_1, ya que al mismo tiempo disminuye la energía potencial ε_p. Al pasar la molécula el punto con la coordenada r_0, las fuerzas de atracción cambian por las de repulsión, por lo que la molécula, con rapidez, comienza a perder velocidad (en la región de repulsión la curva ε_p es muy abrupta). En el momento cuando la energía potencial ε_p se hace igual a la energía total del sistema ε_1, la velocidad de la molécula se reduce a cero. En este instante tiene lugar la mayor aproximación de las moléculas. Después de la parada de la molécula, todos los fenómenos transcurren con la sucesividad inversa: primero la molécula se mueve con creciente velocidad por efecto de la fuerza de repulsión; después de pasar la distancia r_0, la molécula entrará en la zona de acción de la fuerza de atracción, que desacelerará su movimiento y, por fin, se alejará al infinito, teniendo la reserva inicial de energía cinética ε_1.

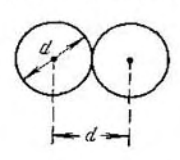


Fig. 129.2

La distancia mínima a la que al chocar se acercan los centros de dos moléculas, denomínase *diámetro eficaz* de la molécula d (fig. 129.2). La magnitud

$$\sigma = \pi d^2 \tag{129.1}$$

se llama *sección eficaz* de la molécula.

En la fig. 129.1 vemos que cuando la molécula inicia su movimiento desde el infinito, teniendo mayor reserva de energía, la distancia mínima a la que se acercan los centros de las moléculas, resulta menor (comp. d_1 y d_2 en la figura). Así, pues, el diámetro eficaz de las moléculas depende de su energía y, por consiguiente, también de la temperatura. Al aumentar la temperatura disminuye el diámetro eficaz de las moléculas.

Por término medio, por segundo la molécula pasa un recorrido igual a la velocidad media $\langle v \rangle$. Si una molécula sufre por segundo un promedio de ν choques, la longitud media del recorrido libre

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\nu}. \tag{129.2}$$

Para calcular el número medio de choques ν, supongamos primero que todas las moléculas, salvo la dada, están quietas en sus lugares. Observemos el movimiento de la molécula que hemos elegido. Después de chocar contra una de las moléculas inmóviles, la nuestra volará de modo rectilíneo hasta chocar con otra de las moléculas inmóviles (fig. 129.3). Este choque se producirá si el centro de la molécula inmóvil se encuentra en la recta, a lo largo de la cual vuela la molécula, a una distancia menor que el diámetro eficaz d de ésta.

Como resultado del choque, la molécula variará el sentido de su movimiento, después se moverá cierto tiempo de manera rectilínea, hasta que en su recorrido no tropiece con una molécula cuyo centro se encuentre en los límites del cilindro de radio d, mostrado en la fig. 129.3.

Por segundo la molécula pasa un recorrido igual a $\langle v\rangle$. El número de choques con las moléculas inmóviles que se producen durante este tiempo, es igual al número de moléculas cuyos centros se encuentran

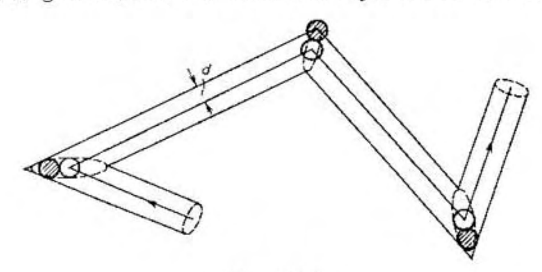


Fig. 129.3

en el interior del cilindro quebrado de longitud $\langle v\rangle$ y radio d. Más adelante será mostrado que la longitud media del recorrido libre es mucho mayor que el diámetro eficaz d de la molécula. Por esto, el volumen del cilindro puede considerarse igual a $\pi d^2\langle v\rangle$. Multiplicando este volumen por el número de moléculas en la unidad de volumen n, se obtiene el número medio de choques por segundo de la molécula en movimiento con las inmóviles

$$\nu' = \pi d^2 \langle v\rangle n. \qquad (129.3)$$

En realidad, todas las moléculas están en movimiento, por lo que el número de choques se determina por la velocidad media de movimiento de las moléculas, unas respecto de otras, y no por la velocidad media $\langle v\rangle$ de las moléculas en relación con las paredes del recipiente. La velocidad relativa de dos moléculas tomadas al azar

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Elevando al cuadrado esta correlación, hallamos

$$v_{rel}^2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$$

(hemos hecho uso de que $\mathbf{v}^2 = v^2$). El valor medio de la suma de varias magnitudes es igual a la suma de los valores medios de las magnitudes que se suman. Por esto,

$$\langle v_{rel}^2\rangle = \langle v_2^2\rangle + \langle v_1^2\rangle - 2\langle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\rangle.$$

Son independientes estadísticamente aquellos acontecimientos que consisten en que la primera molécula tiene la velocidad $\mathbf{v}_1$ y la segunda, $\mathbf{v}_2$. Por esta causa, $\langle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1\rangle \langle \mathbf{v}_2\rangle$. Para un gas en equilibrio, cada uno de los factores es nulo. De forma que

$$\langle v_{\text{rel}}^2\rangle = \langle v_2^2\rangle + \langle v_1^2\rangle = 2\langle v^2\rangle$$

(el valor medio del cuadrado de la velocidad de todas las moléculas es el mismo e igual a $\langle v^2\rangle$). El resultado obtenido quiere decir que $v_{\text{rel.c.m}} = \sqrt{2}v_{\text{c.m}}$. Las velocidades cuadráticas medias son proporcionales a las medias aritméticas. Así, pues,

$$\langle v_{\text{rel}}\rangle = \sqrt{2}\langle v\rangle.$$

Sustituyendo en la fórmula (129.3) $\langle v\rangle$ por $\langle v_{\text{rel}}\rangle$, obtenemos la siguiente expresión para el número medio de choques por segundo

$$\nu = \sqrt{2}\,\pi d^2 \langle v\rangle n. \qquad (129.4)$$

Poniendo este valor de ν en (129.2), hallamos la siguiente fórmula para la longitud media del recorrido libre:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}. \qquad (129.5)$$

Sustituyendo de acuerdo con (129.1) πd^2 por σ, a la fórmula se le puede dar el siguiente aspecto

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n}. \qquad (129.6)$$

A temperatura constante n es proporcional a p. De forma que la longitud media del recorrido libre es razón inversa de la presión:

$$\lambda \sim \frac{1}{p}. \qquad (129.7)$$

Ya fue indicado más arriba que el diámetro eficaz de las moléculas decrece con la temperatura. De acuerdo con esto, al elevar la temperatura aumenta la longitud del recorrido libre.

Apreciemos la magnitud de la longitud del recorrido libre y el número medio de choques por segundo. En el § 80 establecimos que las moléculas tienen dimensiones del orden de varios angström. Con esto, el diámetro eficaz de la molécula es igual a 2 Å, es decir, $2\cdot 10^{-10}$ m. A condiciones normales (o sea, 0 °C y $p = 1$ atm) un mol de gas ocupa un volumen de $22{,}4\cdot 10^{-3}$ m³. El número de moléculas por unidad de volumen, a estas condiciones, es igual a $6\times 10^{23} : 22{,}4\cdot 10^{-3} \approx 3\cdot 10^{25}$ m^{-3}. Poniendo estas cifras en la fórmula (129.5), obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-20}\cdot 3\cdot 10^{25}} \approx 2\cdot 10^{-7}\ \text{m} = 2\cdot 10^{-5}\ \text{cm}.$$

A una presión de 10^{-3} mm Hg (lo que corresponde, aproximadamente, a 10^{-6} atm), λ será de un orden de 10 cm. Si el recipiente tiene dimensiones de un orden de varios centímetros, a semejante presión las moléculas se moverán de pared a pared sin chocar, prácticamente, entre sí. A una presión de 10^{-6} mm Hg, λ alcanza una magnitud del orden de decenas de metros.

Al deducir la fórmula (129.3) supusimos que λ era mucho mayor que d. Ahora ya podemos cerciorarnos de la justeza de dicha suposición. En efecto, de la apreciación realizada, se desprende que a condiciones normales la razón entre λ y d constituye unos $2\cdot10^{-5}$: $: 2\cdot10^{-10} = 10^5$.

El número de choques por segundo puede ser obtenido dividiendo la velocidad media $\langle v\rangle$ de las moléculas por λ. En el § 98 obtuvimos para el oxígeno un valor de $\langle v\rangle$ de un orden de 500 m/s. Al dividir esta magnitud por $\lambda = 2\cdot10^{-7}$ m, para el número de choques por segundo hallamos un valor igual a $2{,}5\cdot10^{9}$ s^{-1}. De este modo, a condiciones normales, el número de choques constituye varios miles de millones por segundo. Al disminuir la presión el número de choques decrece, variándose de forma proporcional a p (véase (129.7)).

§ 130. Difusión en los gases

Intentemos hallar las ecuaciones de difusión partiendo de nociones cinético-moleculares. Para simplificar el problema, vamos a considerar que las moléculas de las dos componentes poco se diferencian por su masa ($m_1 \approx m_2 \approx m$) y tienen secciones eficaces prácticamente iguales ($\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$). En tal caso, a las moléculas de las dos componentes se les puede atribuir igual velocidad media de movimiento térmico $\langle v\rangle$ y calcular la longitud media del recorrido libre con la fórmula

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n},$$

donde $n = n_1 + n_2$.

Es fácil comprender que el proceso de difusión en los gases transcurrirá con tanta mayor intensidad, cuanto más rápido sea el movimiento de las moléculas (mientras mayor sea $\langle v\rangle$), así como mientras sean más raros los choques entre ellas (es decir, mientras mayor sea la longitud del recorrido libre λ). Por consiguiente, es de esperar que el coeficiente de difusión D debe ser proporcional al producto $\langle v\rangle\,\lambda$. Esto concuerda con la dimensión de D, igual a L^2/T, lo que ya fue indicado en el § 128.

Comencemos los cálculos. Supongamos que la variación de la concentración de la primera componente a lo largo del eje z se describe con la fórmula $n_1 = n_1(z)$. Designemos con N_1' el número de moléculas de la primera componente que vuelan por segundo por

el área S en la dirección del eje z; con N''_1, ese mismo número para la dirección opuesta del eje z (fig. 130.1)[1]). La diferencia de estos números nos da el flujo de las moléculas de la primera componente N_1 que pasa por S:

$$N_1 = N'_1 - N''_1. \qquad (130.1)$$

Vamos a partir del concepto simplificado, según el cual las moléculas se mueven a lo largo de tres direcciones perpendiculares entre sí y que coinciden con los ejes x, y, z (los ejes x e y son paralelos al área S). En tal caso, de acuerdo con (95.7), el número de las molécu-

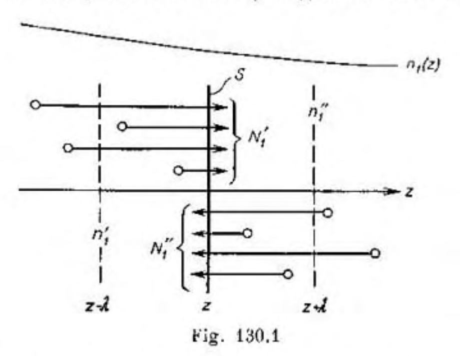


Fig. 130.1

las que pasan por segundo por el área unitaria en una dirección es igual a $^1/_6\, n\langle v\rangle$. Por lo tanto, los números N'_1 y N''_1 pueden ser representados en la forma

$$N'_1 = \frac{1}{6} n'_1 \langle v\rangle S, \qquad N''_1 = \frac{1}{6} n''_1 \langle v\rangle S, \qquad (130.2)$$

donde n'_1 es la concentración «eficaz» de las moléculas de la primera componente a la izquierda de S; n''_1, la concentración «eficaz» de las moléculas de la primera componente a la derecha de S.

A través de la superficie S volarán las moléculas que han tenido el último choque a diversas distancias de S. Sin embargo, por término medio, el último choque se produce a una distancia de S igual a la longitud media del recorrido libre λ. Por eso, es razonable tomar en calidad de n'_1 el valor $n_1(z-\lambda)$ y como n''_1, el valor $n_1(z+\lambda)$ (véase la fig. 130.1). Entonces, tomando en consideración (130.1)

[1]) La fig. 130.1 se ha trazado de modo que las moléculas N'_1 vuelan por la mitad superior del área S, mientras que las moléculas N''_1, por la inferior. En realidad los dos conjuntos de moléculas están distribuidos por toda la superficie S.

y (130.2), podemos escribir que

$$N_1=\frac{1}{6}\langle v\rangle S\,[n_1(z-\lambda)-n_1(z+\lambda)]. \qquad (130.3)$$

Como λ es una magnitud muy pequeña, la diferencia de los valores de las funciones $n_1(z)$, que en la fórmula (130.3) están entre corchetes, puede ser presentada en la forma[1])

$$n_1(z-\lambda)-n_1(z+\lambda)=-\frac{dn_1}{dz}\,2\lambda. \qquad (130.4)$$

Poniendo esta expresión en (130.3), hallamos que

$$N_1=-\left(\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\right)\frac{dn_1}{dz}\,S. \qquad (130.5)$$

La comparación de la expresión (130.5) con la fórmula (128.1) nos muestra que partiendo de nociones cinético-moleculares, se puede no sólo llegar a una correcta dependencia entre N_1 y dn_1/dz, sino que también obtener la expresión para el coeficiente de difusión D. Dicha expresión tiene la forma

$$D=\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda. \qquad (130.6)$$

Un cálculo más riguroso nos conduce a esta misma fórmula, pero con un coeficiente numérico algo distinto.

Cabe indicar que, como suponíamos, el coeficiente de difusión resulta ser proporcional al producto $\langle v\rangle\lambda$.

La deducción que nos ha llevado a la fórmula (130.5) es aplicable en igual grado para las dos componentes de la mezcla. Por consiguiente, el coeficiente de difusión tiene igual valor para las dos componentes.

Investiguemos la expresión para el coeficiente de difusión D que hemos hallado. Poniendo en (130.6) las expresiones para $\langle v\rangle$ y λ, obtenemos

$$D\backsim\frac{1}{n\sigma}\sqrt{\frac{T}{m}}. \qquad (130.7)$$

De (130.7) se deduce que el coeficiente de difusión es razón inversa del número de moléculas por unidad de volumen y, por consiguiente, también de la presión p:

$$D\backsim\frac{1}{p}.$$

[1]) La fórmula (130.4) es justa a condición de que la variación de n_1 por la longitud del recorrido libre es mucho menor que la propia n_1 $\left(\frac{dn}{dz}\lambda\ll n_1\right)$. Esta condición nos proporciona el criterio de la pequeñez de las desviaciones del equilibrio (cuarto párrafo del § 128).

Esta desviación también atañe a las fórmulas análogas de los siguientes parágrafos. Por ejemplo, la fórmula (131.4) es justa a condición de que $\frac{dT}{dz}\lambda\ll T$.

Al subir la temperatura, D crece, aproximadamente, como $\sqrt{T}$ (recordemos que σ depende de T en pequeño grado).

Hemos supuesto, que las masas y las secciones eficaces de las moléculas de las dos componentes son iguales. Por esta causa, (130.6) es, en esencia, de por sí la expresión para el coeficiente de autodifusión, es decir, para la difusión de las moléculas de cierto gas en un medio de moléculas de este mismo gas. El fenómeno de autodifusión podría ser observado marcando de algún modo parte de las moléculas de un gas homogéneo. En semejante caso, si la concentración de las moléculas marcadas y las moléculas que no lo están no fuera constante, en el gas surgirían flujos al encuentro de diferente género de moléculas, con la particularidad de que la magnitud de los flujos podría ser definida con la fórmula (130.5). En la práctica, la autodifusión puede ser investigada aplicando el método de los átomos marcados. Este método consiste en el empleo de mezclas de isótopos, es decir, diversidades de los átomos de un mismo elemento químico que, por ejemplo, se distinguen entre sí porque una diversidad de los átomos es radiactiva, mientras que la otra, estable.

Cuando las moléculas de las dos componentes de la mezcla no son iguales por su masa y sección eficaz, el coeficiente de difusión se determina con ayuda de la expresión

$$D_{12}=\frac{3}{8}\left(\frac{\pi kT}{2\mu_{12}}\right)^{1/2}\frac{1}{n\sigma_{12}},$$

donde

$$\mu_{12}=m_1m_2/(m_1+m_2),\quad \sigma_{12}=\pi\,[(d_1+d_2)/2]^2,$$

n es el número de moléculas por unidad de volumen de la mezcla gaseosa (m_i y d_i son la masa y el diámetro eficaz de las moléculas de la i-ésima componente).

§ 131. Conductividad térmica de los gases

Calculemos el flujo de calor en un gas, partiendo de las nociones cinético-moleculares. Si en diversos lugares la temperatura del gas es diferente, la energía media de las moléculas en dichos lugares será también distinta. Cuando a causa del movimiento térmico las moléculas se desplazan de un lugar a otro, ellas transportan la energía que han acumulado. Este transporte de energía condiciona el proceso de conductividad térmica.

Antes de iniciar los cálculos, intentemos aclarar qué factores pueden influenciar sobre la capacidad de los gases de conducir calor. Es fácil comprender que, además de los factores que determinan la velocidad de la difusión, es decir, la velocidad media de las moléculas $\langle v\rangle$ y la longitud del recorrido libre λ, la cantidad de energía transportada por las moléculas debe depender de la capacidad de

acumular energía que éstas poseen, o sea, de la capacidad calorífica del gas.

Consideremos un gas en el que, por uno o por otro procedimiento, se mantiene el gradiente de temperatura a lo largo de una dirección que designaremos con la letra z. Representémonos mentalmente un área S perpendicular a dicha dirección (fig. 131.1).

Partiendo de representaciones simplificadas, vamos a considerar que la cantidad de moléculas que por segundo pasan por el área S en cada dirección (de izquierda a derecha y de derecha a izquierda), es igual a

$$N=\frac{1}{6}\,n\langle v\rangle S. \qquad (131.1)$$

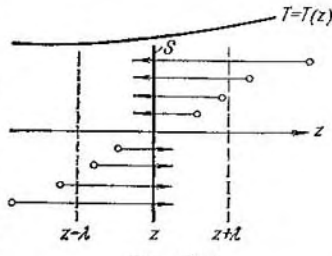


Fig. 131.1

A presión constante n depende de la temperatura ($p = nkT$), $\langle v\rangle$ también varía con ella. Por este motivo, al parecer, para hallar el número de moléculas que de izquierda a derecha vuelan por S deberíamos poner en la fórmula (131.1) los valores de n y $\langle v\rangle$, correspondientes a una misma temperatura, mientras que para obtener el número de moléculas que vuelan de derecha a izquierda, los valores de n y $\langle v\rangle$ correspondientes a otra temperatura. No obstante, los números de moléculas que pasan por el área S en direcciónes al encuentro, no pueden ser diferentes. Si esos números no fuesen iguales, además del flujo de calor que pasa por el área S, sería observado un flujo de sustancia, transcurriría el desplazamiento del gas de una parte del espacio a otra. Pero suponemos que salvo el transporte de calor, en el gas no se producen ningunos otros procesos. Por esta causa, el número de moléculas que vuelan por S en cada una de las direcciones, será calculado por la fórmula (131.1), tomando para n y $\langle v\rangle$ sus valores en la sección S.

Cabe indicar, que como $n = p/kT \backsim p/T$, mientras que $\langle v\rangle \backsim \sqrt{T}$, la constancia del producto $n\langle v\rangle$ señala la constancia de la expresión

$$\frac{p}{T}\sqrt{T}=\frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Por lo tanto, con el fin de que no se observe flujo de moléculas habiendo gradiente de temperatura, es preciso que a lo largo del eje z la presión varíe de modo proporcional a $\sqrt{T}$.

Al calcular el flujo de calor vamos a partir de la suposición de que cada molécula porta una energía $\varepsilon = \frac{i}{2}kT$, que corresponde a la

temperatura en aquel lugar donde se produjo su último choque con otra molécula. Por término medio, este choque se produce a una distancia de S igual a la longitud media del recorrido libre λ (véase la fig. 131.1). Por eso, a las moléculas que vuelan en la dirección del eje z debe atribuírseles una energía $\langle\varepsilon_1\rangle$ que corresponde a la temperatura $T_1 = T(z-\lambda)$, es decir, a la del plano $(z-\lambda)$, en lo que se refiere a las moléculas que vuelan en la dirección opuesta, la energía $\langle\varepsilon_2\rangle$ que corresponde a la temperatura $T_2 = T(z+\lambda)$ (z es la coordenada del plano S).

De acuerdo con lo dicho, para un flujo de calor que pasa por el área S por el sentido positivo del eje z, obtenemos la siguiente expresión

$$q = N(\langle\varepsilon_1\rangle - \langle\varepsilon_2\rangle),$$

donde N se determina por la fórmula (131.1). Poniendo los valores de N, $\langle\varepsilon_1\rangle$ y $\langle\varepsilon_2\rangle$, hallamos

$$q=\frac{1}{6}n\langle v\rangle S\left(\frac{i}{2}kT_1-\frac{i}{2}kT_2\right)=\frac{1}{6}n\langle v\rangle S\frac{i}{2}k(T_1-T_2). \quad (131.2)$$

La diferencia $T_1 - T_2$ es igual a

$$T(z-\lambda)-T(z+\lambda)=-\frac{dT}{dz}2\lambda \quad (131.3)$$

(hemos tomado en consideración la pequeñez de λ). Aquí, dT/dz es una derivada de T por z en el lugar donde se halla el plano S.

Teniendo en cuenta (131.3), a la fórmula (131.2) se le puede dar la forma

$$q=-\frac{1}{6}n\langle v\rangle S\frac{i}{2}k\frac{dT}{dz}2\lambda=-\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\left(\frac{i}{2}kn\right)\frac{dT}{dz}S. \quad (131.4)$$

Comparando esta fórmula con (128.3), para el coeficiente de conductividad térmica obtenemos la siguiente expresión:

$$\varkappa=\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\left(\frac{i}{2}kn\right). \quad (131.5)$$

Recordemos que la expresión $\frac{i}{2}R=\frac{i}{2}kN_A$ determina la capacidad calorífica con volumen constante C_V de un mol de gas, es decir, la cantidad de gas que contiene N_A moléculas. De manera análoga, la expresión $\frac{i}{2}kn$ es la capacidad calorífica de la cantidad de gas que contiene n moléculas, o sea, la capacidad calorífica de la unidad de volumen de un gas. Esta capacidad calorífica puede ser hallada multiplicando el calor específico c_V (capacidad calorífica de la unidad de masa) por la masa de la unidad de volumen, es decir, por la densidad del gas ρ. Así, pues,

$$\frac{i}{2}kn=\rho c_V. \quad (131.6)$$

Poniendo (131.6) en la fórmula (131.5), llegamos a la expresión definitiva para el coeficiente de conductividad térmica de un gas:

$$\varkappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_V. \tag{131.7}$$

Como habíamos previsto, el coeficiente de conductividad térmica ha resultado ser proporcional a $\langle v \rangle$, λ y a la capacidad calorífica del gas ρc_V. Un cálculo más riguroso nos conduce a una expresión semejante para $\varkappa$, pero con un coeficiente numérico algo diferente.

Aclaremos la dependencia entre $\varkappa$ y las magnitudes que caracterizan las moléculas y los parámetros de estado de un gas. Teniendo en cuenta que $\langle v \rangle$ es proporcional a $\sqrt{T/m}$, λ a $1/n\sigma$ y ρc_V, a in (véase (131.6)), hallamos

$$\varkappa \backsim \sqrt{\frac{T}{m}} \cdot \frac{1}{n\sigma} \cdot in = \frac{i}{\sigma} \sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{131.8}$$

De (131.8) se deduce que, a diferencia del coeficiente de difusión el de conductividad térmica de un gas no depende del número de moléculas por unidad de volumen y, por consiguiente, de la presión ($p = nkT$). Las siguientes causas condicionan este hecho. Al disminuir la presión se reduce n, es decir, la cantidad de moléculas que toman parte en el transporte de energía. Al mismo tiempo, crece λ y, asimismo, la diferencia entre las energías que transporta cada molécula en sentidos opuestos. En total, resulta que la cantidad de energía transportada por las moléculas con el gradiente dado de temperatura no depende de la presión. Esto es justo sólo mientras que λ es pequeña en comparación con la distancia entre las superficies que intercambian calor a cuenta de la capacidad calorífica del gas que hay entre ellas (por ejemplo, la comparación con las dimensiones de la holgura entre las ampollas interior y exterior de un termo de vidrio). A medida que esta condición deja de cumplirse, la conductividad térmica comienza a depender en creciente grado de la presión, disminuyendo al reducirse ésta. Con λ que supera la distancia entre las superficies, el recorrido de las moléculas se determina por la magnitud de esta distancia y deja de depender de la presión. En lo que se refiere al número de moléculas por unidad de volumen, al disminuir la presión continúa reduciéndose, por lo que también decrece $\varkappa$.

Al subir la temperatura, el coeficiente de conductividad térmica crece con un poco de mayor rapidez que $\sqrt{T}$. Esto está motivado por el hecho de que la sección eficaz σ depende ligeramente de T (véase el § 129).

§ 132. Viscosidad de los gases

Con el fin de comprender el origen de las fuerzas de rozamiento interno consideremos dos capas de gas de cierto grosor Δz, que hacen contacto entre sí. Supongamos que las capas se mueven a distintas velocidades u_1 y u_2 (fig. 132.1). Cada molécula de gas toma parte en dos movimientos: en el caótico térmico, cuya velocidad media es igual a $\langle v \rangle$ y en el movimiento regular (ordenado) a velocidad u, mucho menor que $\langle v \rangle$.

Sea que en cierto momento de tiempo las capas posean cantidad de movimiento K_1 y K_2. Éstas no pueden quedar invariables, ya



Fig. 132.1

que a causa del movimiento térmico transcurre una constante transición de las moléculas de una capa a otra. De acuerdo con representaciones simplificadas, la cantidad de moléculas que pasan por el área S por segundo de una capa a otra, se define con la expresión

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \qquad (132.1)$$

(podemos despreciar la insignificante influencia del movimiento regular sobre el valor de la velocidad de las moléculas).

Después de penetrar en otra capa, la molécula choca con las moléculas de esta capa, a causa de lo cual ella o cede el exceso de su cantidad de movimiento a otras moléculas (si la molécula llegó de la capa que se mueve a mayor velocidad), o bien aumenta su cantidad de movimiento a cuenta de otras moléculas (si llegó de la capa que se mueve a menor velocidad). Como resultado, la cantidad de movimiento de la capa que se mueve con mayor rapidez decrece, la de la capa que se mueve con menor rapidez, crece. De este modo, las capas se comportan de tal manera como si a la primera capa (cuya velocidad es mayor) estuviera aplicada una fuerza que frena su movimiento, mientras que a la segunda capa (cuya velocidad es menor), una fuerza igual en magnitud que acelera su movimiento.

Por el área S, que yace en el límite de separación de las capas, representadas en la fig. 132.1, en la dirección de la primera capa a la segunda, se transporta una cantidad de movimiento

$$K = N (mu_1 - mu_2)$$

(m es la masa de la molécula). La sustitución de la expresión (132.1) para N, proporciona

$$K=\frac{1}{6}n\langle v\rangle Sm(u_1-u_2). \qquad (132.2)$$

En un flujo real de gas, al pasar por el límite de separación de dos capas la velocidad varía no a saltos, sino que ininterrumpidamente, de acuerdo con la ley $u = u(z)$ (fig. 132.2). Vamos a considerar que cada molécula que vuela por la superficie S, porta una cantidad de movimiento mu que se determina por el valor de la velocidad u en el lugar donde se produjo el último choque de la molécula. Moléculas aisladas sufren el último choque a las más distintas distancias de S. Por término medio, este choque se produce a una distancia igual a la longitud del recorrido libre λ. Por eso, a las moléculas que vuelan en la dirección del eje z les atribuiremos un valor de la velocidad $u_1 = u(z-\lambda)$, mientras que a las moléculas que vuelan en sentido opuesto, $u_2 = u(z+\lambda)$. Poniendo estos valores en (132.2) obtenemos la expresión de la cantidad de movimiento para el flujo en la dirección del eje z

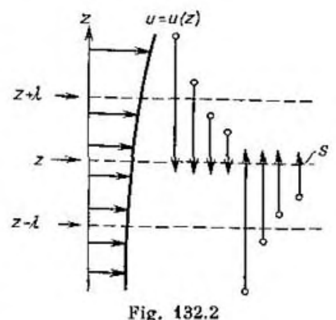


Fig. 132.2

$$K=\frac{1}{6}n\langle v\rangle Sm[u(z-\lambda)-u(z+\lambda)]=-\frac{1}{6}n\langle v\rangle Sm\frac{du}{dz}2\lambda$$

(comp. con (131.4)). Tomando en consideración que el producto nm es igual a la densidad del gas ρ, podemos escribir

$$K=-\left(\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\rho\right)\frac{du}{dz}S.$$

La comparación con la fórmula (128.5) proporciona la expresión para el coeficiente de viscosidad:

$$\eta=\frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\rho. \qquad (132.3)$$

Un cálculo más riguroso conduce a esa misma expresión, pero con un coeficiente numérico algo diferente.

De (132.3) se deduce que de modo semejante a D y $\varkappa$, el coeficiente de viscosidad es proporcional a $\langle v\rangle$ y λ. Además, es proporcional a la densidad del gas ρ, o sea, a la magnitud que caracteriza la capacidad del gas de «acumular» cantidad de movimiento: a la veloci-

dad prefijada u, la cantidad de movimiento del volumen de gas será tanto mayor, cuanto mayor sea ρ (recordemos que el coeficiente de conductividad térmica es proporcional a la capacidad calorífica del gas).

Teniendo en cuenta las expresiones para las magnitudes que entran en (132.3), es posible escribir que

$$\eta \backsim \sqrt{\frac{T}{m}} \cdot \frac{1}{n\sigma} \cdot nm = \frac{\sqrt{mT}}{\sigma}.$$

De aquí sigue que lo mismo que $\varkappa$, el coeficiente de viscosidad no depende de la presión. Esta afirmación es válida mientras que λ es pequeña en comparación con las dimensiones de la holgura por la que fluye el gas (por ejemplo, en comparación con el diámetro del tubo). A medida que esta condición deja de cumplirse, la viscosidad comienza a depender en grado creciente de la presión, disminuyendo al reducirse ésta. La dependencia de η de la temperatura es la misma que para D y $\varkappa$.

§ 133. Gases ultraenrarecidos

Cuando la longitud del recorrido libre de las moléculas supera las dimensiones lineales del recipiente, se dice que en él hay vacío. En semejante caso, el gas recibe el nombre de *ultraenrarecido*. Aunque decimos «vacío», el gas ultraenrarecido contiene en la unidad de volumen gran número de moléculas. Por ejemplo, a una presión de 10^{-6} mm Hg en 1 m^3 se hallan, aproximadamente, 10^{16} moléculas. Más aún, en muy diminutos poros el estado que determinamos como vacío, puede ser también alcanzado a presión atmosférica.

La conducta de los gases ultraenrarecidos se distingue por una serie de singularidades. En condiciones de vacío no podemos hablar de la presión de una parte del gas sobre otra. A condiciones normales, las moléculas chocan frecuentemente entre sí. Por esto, por cualquier superficie con la que es posible mentalmente dividir el gas en dos partes, transcurrirá intercambio de cantidad de movimiento entre las moléculas y, por consiguiente, una parte del gas ejercerá por la superficie de separación una presión p sobre la segunda parte. Al haber vacío, las moléculas sólo intercambian la cantidad de movimiento con las paredes del recipiente, de forma que sólo tiene sentido la noción de presión del gas contra la pared. Tampoco existe el rozamiento interno del gas. No obstante, un cuerpo que se mueve por un gas ultraenrarecido, sufrirá el efecto de las fuerzas de rozamiento, condicionado por el hecho de que las moléculas al chocar con el cuerpo harán variar su cantidad de movimiento. Examinemos este problema con más detalle.

Sea que por un gas ultraenrarecido se mueven dos láminas paralelas entre sí (fig. 133.1). Las velocidades de las láminas son u_1 y u_2. La interacción entre la molécula y la lámina en el momento del choque, conduce a que la molécula, al botar de la lámina, tenga, además de la velocidad térmica, una componente igual en magnitud y sentido a la velocidad de la lámina.

Por segundo, contra la unidad de superficie de la lámina superior, chocarán $^1/_6\langle n\rangle\, v$ moléculas que poseen una componente de la velocidad u_2, adquirida durante el choque anterior contra la lámina inferior. Cada una de estas moléculas porta una componente de la cantidad de movimiento mu_2. Después de reflejarse de la lámina superior, las moléculas tienen una componente de la cantidad de movimiento mu_1. Por consiguiente, el choque de cada molécula contra la lámina superior conduce a la disminución de su cantidad

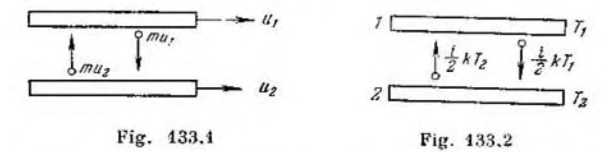


Fig. 133.1 Fig. 133.2

de movimiento en una magnitud $m(u_1 - u_2)$. La variación de la cantidad de movimiento por la unidad de tiempo, reducida a la unidad de superficie de la lámina, será

$$\frac{1}{6}\, n\, \langle v\rangle\, m\, (u_1 - u_2).$$

Esta variación es igual a la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie de la lámina

$$F = \frac{1}{6}\, \rho\, \langle v\rangle\, (u_1 - u_2), \qquad (133.1)$$

(hemos sustituido nm por ρ). Una fuerza igual en magnitud, pero de sentido opuesto, está ejercida sobre la unidad de superficie de la lámina inferior.

Es natural que el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza de rozamiento y la diferencia de velocidades de las láminas sea llamado coeficiente de viscosidad. De (133.1) sigue que dicho coeficiente es igual a $^1/_6\rho\langle v\rangle$, es decir, es proporcional a la densidad del gas y, por consiguiente, también a la presión del gas sobre la lámina y las paredes del recipiente (para esta presión se conserva la expresión $p = nkT$).

Tratemos ahora el problema de la transmisión del calor por el gas en el vacío. Consideremos dos láminas a temperaturas T_1 y T_2, entre las que está comprendido un gas ultraenrarecido (fig. 133.2).

Si el carácter del choque de una molécula contra la superficie de un sólido fuera perfectamente elástico, las moléculas botarían de la lámina a la misma en magnitud velocidad (y, por lo tanto, energía) que tenían antes del choque. Como resultado, las moléculas no podrían transportar energía de una lámina a otra. Pero semejante conclusión contradice la experiencia. Así, pues, la interacción entre la pared y la molécula que contra ella choca, no tiene carácter de choque elástico. En realidad se ejecuta del modo siguiente: al chocar contra la pared, parece como si la molécula se pegara en ella para un corto tiempo, después de lo cual abandona la pared en dirección enteramente arbitraria a una velocidad cuya magnitud, por término medio, corresponde a la temperatura de la pared[1]).

Dirijámonos de nuevo a la fig. 133.2. Cada una de las $^1/_6 n\langle v\rangle S$ moléculas que chocan por segundo contra la lámina superior, aporta consigo una energía $^i/_2 kT_2$ y se lleva una energía igual a $^i/_2 kT_1$. Por lo tanto, cada choque de la molécula con la lámina conduce a que la lámina pierda una energía $^i/_2 k\,(T_1 - T_2)$. Esta misma cantidad de energía recibe la segunda lámina después de cada choque. Así, pues, la cantidad de energía que transportan por segundo las moléculas de una lámina a otra, será

$$q = \frac{1}{6}\, n\,\langle v\rangle\, \frac{i}{2}\, k\,(T_1 - T_2)\, S.$$

Multiplicando y dividiendo esta expresión por mN_A, hallamos

$$q = \frac{1}{6}\, \rho\,\langle v\rangle\, c_V\,(T_1 - T_2)\, S. \qquad (133.2)$$

El coeficiente de conductividad térmica, igual a $^1/_6 \rho\,\langle v\rangle\, c_V$ es en un gas ultraenrarecido proporcional a la densidad del gas. De forma que la transmisión de calor de una pared a otra disminuirá al aumentar la presión, mientras que, a condiciones normales, la conductividad térmica de un gas, como hemos visto, no depende de la presión.

§ 134. Efusión

Consideremos un recipiente que contiene un gas ultraenrarecido, dividido en dos partes por un tabique en el que hay un agujero (fig. 134.1.) Si las dimensiones del agujero son menores que la longitud del recorrido libre de las moléculas, éstas volarán por el aguje-

[1]) Cabe señalar que semejante precisión del carácter de la interacción de las moléculas con la pared no influye sobre los resultados obtenidos en el § 96 al calcular la presión. Si la temperatura del gas y de la pared es igual, las moléculas abandonarán la pared a la misma velocidad media que la que tenían al chocar con la pared, de forma que la variación de la cantidad de movimiento de las moléculas, a consecuencia del choque, será, por término medio, igual que en un choque perfectamente elástico.

ro una a una, sin chocar entre sí. La salida de un gas por un agujero en semejantes condiciones recibe el nombre de *efusión*.

Durante la efusión se observa una serie de curiosos fenómenos, dos de los cuales vamos a examinar aquí. Con el fin de simplificar los razonamientos supondremos que el enrarecimiento del gas en el recipiente es tan grande que la longitud del recorrido libre supera las dimensiones lineales del recipiente. De forma que al pasar por el agujero las moléculas se moverán por trayectorias rectilíneas hasta el momento cuando alcancen las paredes del recipiente.

Efusión térmica. Sea que en las paredes de las dos partes del recipiente se mantienen diferentes temperaturas T_1 y T_2 (fig. 134.2).

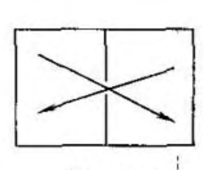


Fig. 134.1

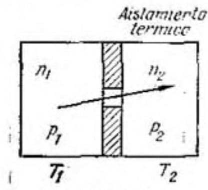


Fig. 134.2

Cuando la longitud del recorrido libre λ es mucho menor que el diámetro del orificio d ($\lambda \ll d$), la condición de equilibrio del gas, comprendido en el recipiente, será la igualdad de presiones p_1 y p_2. Como la presión es igual a nkT, el número de moléculas por unidad de volumen y, por consiguiente, la densidad del gas en ambas partes del recipiente se hallarán, en tal caso, en razón inversa al cociente de las temperaturas:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{T_2}{T_1}. \tag{134.1}$$

Las condiciones de equilibrio de un gas ultraenrarecido ($\lambda \gg d$) serán otras. Un estado que queda invariable con el tiempo (estacionario) se establecerá, si el número de moléculas que por segundo pasa por el agujero de la primera parte del recipiente a la segunda es igual al número de moléculas que pasa por el agujero en dirección inversa. Ya que el número de moléculas que pasa por el agujero es proporcional a $n\langle v\rangle$, la condición de equilibrio tiene la forma

$$n_1\langle v_1\rangle = n_2\langle v_2\rangle.$$

La velocidad media $\langle v\rangle$ es proporcional a $\sqrt{T}$. Por esta razón, podemos escribir[1]) que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \tag{134.2}$$

[1]) De acuerdo con lo dicho en el parágrafo anterior, consideraremos que la molécula, después de chocar contra la pared del recipiente, bota de ella a una velocidad correspondiente a la temperatura de la pared.

Así, pues, la razón de las densidades del gas resulta ser diferente que a condiciones normales (véase (134.1)).

Tomando en consideración (134.2), obtenemos para la presión

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{n_1kT_1}{n_2kT_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

A diferencia de las condiciones normales, cuando observamos el equilibrio durante la igualdad de las presiones en ambas partes del recipiente, al haber vacío la presión es mayor en aquella parte del recipiente donde es mayor la temperatura de las paredes.

Efusión isotérmica al encuentro de dos gases. Estudiemos el caso cuando la temperatura del recipiente es igual por doquier. Cerremos

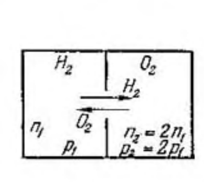


Fig. 134.3

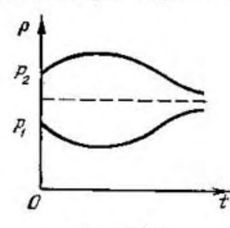


Fig. 134.4

el agujero en el tabique, después de lo cual rellenemos las partes derecha e izquierda del recipiente de diferentes gases, cuyas moléculas se distinguen en alto grado por sus masas. Para mayor precisión, tomemos en la parte izquierda hidrógeno ($M_r = 2$) y en la derecha, oxígeno ($M_r = 32$), o sea la presión p_1 del hidrógeno 2 veces menor que la del oxígeno p_2. Por lo tanto, la concentración de las moléculas de oxígeno supera dos veces la concentración de las moléculas de hidrógeno: $n_2 = 2n_1$. Las propias presiones son tales que λ de los dos gases son mayores que las dimensiones lineales del recipiente.

Si abrimos el agujero en el tabique, surgirán flujos de efusión de oxígeno e hidrógeno que van al encuentro (fig. 134.3). El flujo de moléculas de hidrógeno será proporcional a $n_1 \langle v_1 \rangle$, el de las moléculas de oxígeno, a $n_2 \langle v_2 \rangle$. La velocidad media de las moléculas es razón inversa de $\sqrt{m}$. Por esto, la velocidad media de las moléculas de hidrógeno será 4 veces mayor que la de las moléculas de oxígeno: $\langle v_1 \rangle = 4 \langle v_2 \rangle$. Así resultará que aunque en el recipiente con hidrógeno la presión es menor que en el recipiente con oxígeno, el flujo de las moléculas de hidrógeno será 2 veces mayor que el de las de oxígeno. En vez de nivelar las presiones, los flujos de efusión conducirán al aumento de la diferencia de presiones. Bien es cierto, que con el tiempo se producirá la nivelación de las concentraciones de hidrógeno y oxígeno en ambas partes del recipiente (al principio, esto se

realizará para las más rápidas moléculas, es decir, para el hidrógeno, más tarde terminará la nivelación de las de oxígeno) y, al fin de cuentas, las presiones se nivelan. La variación de las presiones p_1 y p_2 con el tiempo en ambas partes del recipiente se muestra en la fig. 134.4.

El fenómeno de efusión se utiliza para separar las mezclas gaseosas, cuyas componentes sólo se diferencian por el hecho de que en la composición de sus moléculas entran diversos isótopos (diversidades de los átomos) de los mismos elementos químicos[1]). A causa de la identidad de las propiedades químicas de los isótopos no es posible realizar su separación por métodos químicos.

El esquema de una instalación para la separación de isótopos por efusión se ofrece en la fig. 134.5. Ésta consta de una serie de

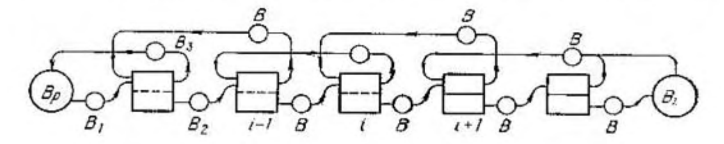


Fig. 134.5

escalones unidos en una cascada. Desde la bombona B_p el gas se alimenta con la bomba B_1 a la entrada del primer escalón. Aproximadamente la mitad del gas pasa por el tabique con finos poros ($\lambda >$ de la dimensión de los poros) y se alimenta con la bomba B_2 a la entrada del segundo escalón. El gas que no ha pasado por el tabique se retorna con la bomba B_3 a la bombona B_p.

Como las moléculas de menor masa poseen mayor velocidad media de movimiento térmico, el flujo que ha pasado por el tabique estará un poco enriquecido por moléculas ligeras, en comparación con el flujo inicial. En lo que se refiere al flujo que pasa por la bomba B_3, éste estará un poco enriquecido con moléculas pesadas.

En los siguientes escalones de la cascada se repite el proceso de separación del flujo gaseoso que llega al escalón en la parte enriquecida adicionalmente con moléculas ligeras y en la parte enriquecida adicionalmente con moléculas pesadas. Del i-ésimo escalón, el flujo enriquecido con la componente ligera llega a la entrada del escalón $(i + 1)$-ésimo, en tanto que el flujo enriquecido con la componente pesada retorna a la entrada del escalón $(i - 1)$-ésimo.

Al pasar cierto tiempo, a lo largo de la cascada se establece la distribución de equilibrio de las concentraciones de las moléculas de la componente ligera. Esta distribución se caracteriza por el

[1]) Desde el punto de vista histórico, a este método se ha arraigado una denominación no muy precisa: método de separación de isótopos por difusión.

hecho de que la concentración de la componente ligera en el flujo que se retorna al i-ésimo escalón del escalón $(i + 1)$-ésimo, coincide con la concentración de la componente ligera que llega al i-ésimo escalón del escalón $(i - 1)$-ésimo.

En la bombona B_l el gas resulta n veces (n es el número de escalones) enriquecido con la componente ligera, mientras que el gas en la bombona B_p n veces enriquecido con la componente pesada. El grado de enriquecimiento se determina por la razón entre las masas de las moléculas de las dos componentes y el número de escalones de la cascada.

Mediante una cascada de 48 escalones, G. Hertz consiguió separar, prácticamente, por completo los isótopos de neón (^{20}Ne y ^{22}Ne). Las instalaciones modernas de efusión para la separación de los isótopos de uranio constan de varios miles de escalones.

APÉNDICES

I. Cálculo de ciertas integrales

1. La integral impropia

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \qquad (I.1)$$

denomínase *integral de Poisson*. Designando la variable de integración por y, representemos esta integral en la forma

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta y^2} dy.$$

Multiplicando las dos expresiones, llegamos a la integral doble

$$[I(\beta)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta (x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (I.2)$$

Esta integral se calcula con facilidad considerando las variables x e y como coordenadas cartesianas en el plano y pasando de éstas a las coordenadas polares r y φ. Con x e y que varían de $-\infty$ a $+\infty$, la coordenada r varía en los límites de 0 a ∞, mientras que φ, en los límites de 0 a 2π. La suma $x^2 + y^2$ es igual a r^2, en tanto que el elemento de la superficie $dx\, dy$ tiene en las coordenadas polares la forma $r\, dr\, d\varphi$. Realizando en (I.2) semejante sustitución, llegamos a la expresión

$$[I(\beta)]^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\beta r^2} r\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta}$$

De aquí para la integral (I.1) se obtiene el valor $I(\beta) = \sqrt{\pi/\beta}$. De este modo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}. \qquad (I.3)$$

2. Las dos partes de la igualdad (I.3) pueden ser consideradas como la función del parámetro β. Derivando por este parámetro (a la izquierda se deriva la función subintegral), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}. \qquad (I.4)$$

La siguiente derivación por β, proporciona

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} x^4\, dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}}. \qquad (I.5)$$

Las funciones subintegrales en las integrales (I.3), (I.4) y (I.5) son pares. Por esta razón, las aportaciones de los intervalos $[-\infty, 0]$ y $[0, +\infty]$ en estas integrales son iguales. De aquí, por ejemplo se desprende, que

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2} x^4\, dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}}. \qquad (I.6)$$

II. Fórmula de Stirling

En el caso de grandes N, para $N!$ se puede obtener una sencilla fórmula aproximada. De acuerdo con la definición de $N!$

$$\ln N! = \ln(1 \cdot 2 \ldots N) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln N = \sum_{m=1}^{N} \ln m.$$

La fórmula que hemos escrito es igual a la suma de las áreas de las columnitas representadas en la fig. II.1. Para N grandes la suma de las áreas de las colum-

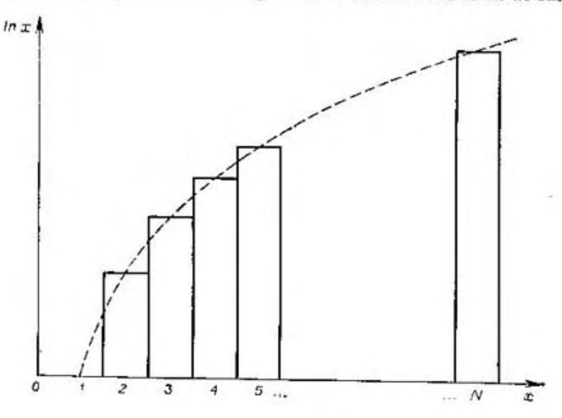


Fig. II.1

nitas poco se diferencia del área limitada por la curva a trazos, que es la gráfica de $\ln x$. Por lo tanto,

$$\ln N! \approx \int_{1}^{N} \ln x\, dx = [x \ln x - x]_1^N = N \ln N - N + 1.$$

Para grandes N la unidad puede ser despreciada y llegamos a la fórmula

$$\ln N! \approx N \ln N - N \qquad (II.1)$$

que se llama *fórmula de Stirling.*

Cabe señalar que, hablando en rigor, en la fórmula de Stirling hay un sumando más igual a $^1/_2 \ln (2\pi N)$. No obstante, para grandes N este sumando puede ser despreciado en comparación con el resto de los sumandos.

III. Tensores simétricos de segundo rango

Fórmulas para la transformación de las componentes de un vector. Tomemos dos sistemas de coordenadas K y K' que están orientados entre sí de forma arbitraria. La base del sistema K está formada por los versores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, la del sistema K', por los versores $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ (vamos a designar las coordenadas cartesianas por x_1, x_2, x_3 en lugar de x, y, z). En el sistema K cierto vector $\mathbf{a}$ puede ser representado en forma de $\sum a_k\mathbf{e}_k$, en el sistema K', en la forma $\sum a'_k\mathbf{e}'_k$ (a_k y a'_k son las componentes del vector $\mathbf{a}$ en los correspondientes sistemas; el índice k recorre en las dos sumas los valores 1, 2, 3). Es evidente que

$$\sum_{k=1}^{3} a'_k\mathbf{e}'_k = \sum_{k=1}^{3} a_k\mathbf{e}_k. \qquad (III.1)$$

Multiplicando todos los miembros de la igualdad (III.1) por el versor $\mathbf{e}'_i$:

$$\sum_{k=1}^{3} a'_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k) = \sum_{k=1}^{3} a_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k).$$

De acuerdo con la fórmula (2.19) $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k = \delta_{ik}$. Por lo tanto,

$$\sum a'_k(\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_k) = \sum a'_k\delta_{ik} = a'_i.$$

La expresión $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k$ es el coseno del ángulo entre el i-ésimo eje del sistema K' y el k-ésimo eje del sistema K, es decir, $\cos(x'_i, x_k)$. Introduzcamos la designación

$$\alpha_{ik} = \cos(x'_i, x_k). \qquad (III.2)$$

Entonces, la igualdad (III.1) tomará la forma

$$a'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}a_k \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (III.3)$$

Conociendo las componentes del vector $\mathbf{a}$ en el sistema K y la orientación recíproca de K y K' (es decir, el conjunto de nueve coeficientes α_{ik}), con la fórmula (III.3) podemos calcular las componentes del vector $\mathbf{a}$ en el sistema K'.

En correspondencia con la definición rigurosa, *recibe el nombre de vector el conjunto de tres magnitudes* a_1, a_2, a_3 *que al pasar de un sistema de coordenadas a otro se transforman según las fórmulas* (III.3), *en las que los coeficientes* α_{ik} *tienen los valores* (III.2) (véase la nota a pie de la pág. 22).

Cabe señalar, que sólo tres de los nueve coeficientes α_{ik} son independientes. Esto concuerda con que la orientación del cuerpo en el espacio se determina con tres ángulos (véase la fig. 97.1 y el texto relacionado con ella).

Determinación del tensor de segundo rango. *Denomínase tensor* **T** *de segundo rango el conjunto de nueve magnitudes*

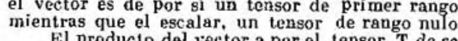
$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \qquad \text{(III.4)}$$

que al pasar de un sistema de coordenadas a otro se transforman según las fórmulas

$$T'_{ik} = \sum \alpha_{il}\alpha_{km}T_{lm} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \qquad \text{(III.5)}$$

en las que los coeficientes α_{il} *y* α_{km} *tienen los valores* (III.2) (véase la nota al pie de la pág. 153). Las magnitudes T_{ik} en la (III.4) se llaman *componentes* del tensor.

De manera análoga se determinan los tensores de otros rangos. Es llamado tensor de n-ésimo rango el conjunto de 3^n magnitudes $T_{ik\ldots s}$ (en total n índices), que al pasar de un sistema de coordenadas a otro se transforman por fórmulas que se distinguen de (III.5) sólo por el hecho de que ellas contienen n factores del tipo α_{ik} y la suma se realiza por n índices. De acuerdo con esta definición, el vector es de por sí un tensor de primer rango, mientras que el escalar, un tensor de rango nulo.



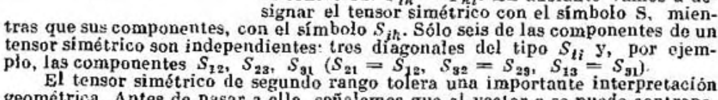
El producto del vector **a** por el tensor **T** de segundo rango denomínase vector **b** con las componentes

$$b_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik}a_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(III.6)}$$

(comp. con (40.5)).

Fig. III.1

Tensor simétrico de segundo rango. Un tensor es llamado simétrico si sus componentes satisfacen la condición: $T_{ik} = T_{ki}$. En adelante vamos a designar el tensor simétrico con el símbolo **S**, mientras que sus componentes, con el símbolo S_{ik}. Sólo seis de las componentes de un tensor simétrico son independientes: tres diagonales del tipo S_{ii} y, por ejemplo, las componentes S_{12}, S_{23}, S_{31} ($S_{21} = S_{12}$, $S_{32} = S_{23}$, $S_{13} = S_{31}$).



El tensor simétrico de segundo rango tolera una importante interpretación geométrica. Antes de pasar a ella, señalemos que al vector **a** se puede contraponer no sólo un segmento dirigido, sino que también un plano trazado por determinadas reglas. Hagamos coincidir el extremo del segmento que representa el vector con el origen de coordenadas O (fig. III.1). Entonces, el plano perpendicular a dicho vector, distanciado del punto O a una longitud igual a $1/a$, determinará por completo tanto el sentido, como el módulo del vector **a**. En la fig. III.1 vemos que la proyección del radio vector **r** desde cualquier punto de este plano sobre el sentido del vector **a**, es igual a $1/a$. Por esto,

$$\mathbf{ar} = ar_a = a\,(1/a) = 1.$$

Así, pues, la ecuación del plano tiene la forma $\mathbf{ar} = 1$ o en forma desarrollada

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1. \qquad \text{(III.7)}$$

Cabe indicar que la posición del plano (III.7) en el espacio no depende de la elección del sistema de coordenadas. Al pasar a otro sistema varían tanto las coordenadas del vector a_k, como también la coordenada x_k del punto dado del plano, de forma que la correlación (III.7) sigue siendo válida.

Al tensor simétrico de segundo rango se puede contraponer una superficie de segundo orden, determinada por la ecuación

$$S_{11}x_1^2+S_{22}x_2^2+S_{33}x_3^2+2S_{12}x_1x_2+2S_{23}x_2x_3+2S_{31}x_3x_1=1. \quad \text{(III.8)}$$

Las componentes S_{11}, S_{22}, S_{33} en los apéndices físicos son mayores que cero. Con esta condición la ecuación (III.8) determina un elipsoide. La orientación de éste en el espacio no depende de la elección del sistema de coordenadas. Un elipsoide tensorial está «ligado» con el sólido o el medio cuyas propiedades describe el tensor. Al pasar a otro sistema de coordenadas varían tanto las componentes del tensor, como también las coordenadas del punto dado del elipsoide con la particularidad de que la variación transcurre de tal modo que la correlación (III.8) continúa siendo válida.

El elipsoide definido con la ecuación (III.8) es la imagen geométrica de un tensor simétrico de segundo rango, del mismo modo que un segmento dirigido o un plano (III.7) (es decir, una superficie de primer orden) ofrece la imagen geométrica de un vector (o sea, de un tensor de primer rango).

Como sabemos de la geometría analítica, si el eje de coordenadas se dirige a lo largo de los semiejes del elipsoide a, b, c, la ecuación del elipsoide se simplifica y toma el aspecto

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1. \quad \text{(III.9)}$$

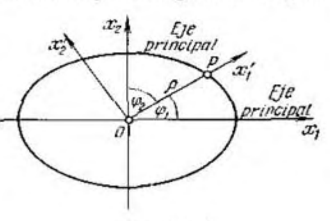


Fig. III.2

De aquí se desprende que para cada tensor simétrico de segundo rango existen tales direcciones de los ejes de coordenadas con las que los coeficientes S_{12}, S_{23}, S_{31}, iguales a las componentes del tensor, en la ecuación (III.8) se anulan. Semejantes direcciones denomínanse *ejes principales* del tensor. Si dirigimos los ejes de coordenadas a lo largo de los ejes principales, el tensor toma la forma diagonal:

$$\mathrm{S}=\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{(III.10)}$$

El tensor de la forma (III.10) recibe el nombre de *tensor reducido a los ejes principales*, mientras que las componentes diagonales se llaman en este caso *valores principales* del tensor. En (III.10) hemos puesto sólo un índice en las componentes diagonales para diferenciarlas de las componentes diagonales S_{11}, S_{22}, S_{33}, definidas en los ejes de coordenadas que no coinciden con los ejes principales del tensor.

La ecuación de un elipsoide escrita en los ejes principales, tiene el aspecto

$$S_1x_1^2+S_2x_2^2+S_3x_3^2=1. \quad \text{(III.11)}$$

De la comparación de las ecuaciones (III.9) y (III.11) obtenemos los valores de los semiejes de un elipsoide tensorial

$$a=1/\sqrt{S_1}, \quad b=1/\sqrt{S_2}, \quad c=1/\sqrt{S_3}. \quad \text{(III.12)}$$

Hallemos el sentido de la distancia ρ desde el centro O (fig. III.2) hasta el punto P del elipsoide, tomado al azar. Con este fin, dirijamos a lo largo de OP el eje x_1' de cierto sistema de coordenadas K'. Las coordenadas del punto P en este sistema son iguales a $(\rho, 0, 0)$. La sustitución de estos valores en la ecua-

ción (III.8) conduce a la correlación $S'_{11}\rho^2 = 1$, de donde

$$\rho = 1/\sqrt{S'_{11}}, \qquad \text{(III.13)}$$

donde S'_{11} es la primera componente diagonal del tensor en el sistema K'.

Designemos los ángulos que forma el eje x'_1 con los ejes principales del tensor con φ_1, φ_2, φ_3 (véase la fig. III.2). Entonces, las coordenadas del punto P serán iguales en los ejes principales

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1, \quad x_2 = \rho \cos \varphi_2, \quad x_3 = \rho \cos \varphi_3.$$

Poniendo estos valores en (III.11), obtenemos

$$\rho^2 (S_1 \cos^2 \varphi_1 + S_2 \cos^2 \varphi_2 + S_3 \cos^2 \varphi_3) = 1.$$

En correspondencia con (III.13) $1/\rho^2 = S'_{11}$. Así pues, llegamos a la correlación

$$S'_{11} = S_1 \cos^2 \varphi_1 + S_2 \cos^2 \varphi_2 + S_3 \cos^2 \varphi_3, \qquad \text{(III.14)}$$

que liga la componente S'_{11} en el sistema K' con los valores principales del tensor y con los ángulos formados por el eje x'_1 con los ejes principales del tensor.

Cuando dos valores principales del tensor coinciden (por ejemplo, $S_1 = S_2 \neq S_3$), el elipsoide tensorial se convierte en un elipsoide de revolución. En tal caso, respecto del sólido o del medio sólo está fijado uno de los ejes principales del tensor, es decir, el eje de simetría del elipsoide (en nuestro ejemplo, el eje x_3). Como otros dos ejes podemos tomar dos ejes cualesquiera, perpendiculares entre sí, que pasen por el centro del elipsoide y que sean perpendiculares a su eje de simetría.

Cuando coinciden los tres valores principales del tensor ($S_1 = S_2 = S_3 = S$), el elipsoide tensorial degenera y se convierte en una esfera de radio $1/\sqrt{S}$ (véase (III.12)). En tal caso, tres cualesquiera ejes perpendiculares entre sí, que pasan por el centro de la esfera, pueden ser tomados como ejes principales del tensor.

Un tensor simétrico con componentes δ_{ik}, es decir, el tensor

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.15)}$$

denomínase *unitario*. Realizando los cálculos mediante las fórmulas (III.6), es fácil cerciorarse de que la multiplicación de un vector **a** por el tensor unitario (III.15) deja el vector **a** invariable. El elipsoide tensorial para el tensor unitario degenera en una esfera de radio unitario. Es posible demostrar que el tensor (III.15) es invariante. Esto significa que sus componentes no varían al pasar de un sistema de coordenadas a otro.

Un tensor con iguales valores principales ($S_1 = S_2 = S_3 = S$) puede ser representado como el producto del escalar S por el tensor unitario:

$$\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.16)}$$

Los dos factores, el escalar y el tensor unitario, son invariantes. Por consiguiente, el tensor que está a la izquierda en la igualdad (III.16), también es invariante.

Elipsoide de inercia. Aclaremos las correlaciones obtenidas en el ejemplo del elipsoide de inercia (véase el § 40). *El elipsoide de inercia* (es decir, el elipsoide del tensor de inercia) está ligado rígidamente con el sólido, cuyas propiedades de inercia describe. Los ejes principales de inercia del sólido coinciden con los

semiejes del elipsoide, es decir, son los ejes principales del tensor de inercia. Los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 son los valores principales del tensor de inercia. De acuerdo con (III.12) los semiejes del elipsoide de inercia son iguales a $1/\sqrt{I_1}$, $1/\sqrt{I_2}$ y $1/\sqrt{I_3}$.

Tracemos por el centro de masas del sólido el eje arbitrario x_1', que forma con los ejes principales de inercia (o sea, con los semiejes del elipsoide de inercia) los ángulos φ_1, φ_2, φ_3. En correspondencia con la fórmula (III.14) el momento de inercia del sólido respecto de este eje (momento axial de inercia I_{11}' que corresponde a I_{xx} en la fórmula (40.7)) puede ser calculado por la fórmula

$$I_{11}' = I_1 \cos^2 \varphi_1 + I_2 \cos^2 \varphi_2 + I_3 \cos^2 \varphi_3, \tag{III.17}$$

donde I_1, I_2, I_3 son los momentos principales de inercia del sólido.

Una peonza esférica se define como un sólido cuyos tres momentos principales de inercia son iguales: $I_1 = I_2 = I_3 = I$ (véase la pág. 145). Por lo tanto, el elipsoide de inercia de una peonza esférica degenera en una esfera de radio $1/\sqrt{I}$. Un cubo homogéneo es un caso particular de la peonza esférica. Para el momento de inercia respecto de un eje tomado al azar, que con las aristas del cubo forma los ángulos φ_1, φ_2, φ_3, con ayuda de la fórmula (III.17) obtenemos el valor

$$I_{11}' = I \cos^2 \varphi_1 + I \cos^2 \varphi_2 + I \cos^2 \varphi_3 = I$$

(recordemos que para toda dirección en el espacio $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$). De este modo, el momento de inercia de un cubo respecto de cualquier eje que pasa por su centro, será el mismo (como para una esfera homogénea). Por esta razón, la conducta de un cubo durante su rotación alrededor de todo eje que pase por su centro, no se distingue de la conducta de una esfera. Asimismo, la conducta de cualquier peonza esférica, es decir, de un sólido de forma arbitraria, pero con semejante distribución de la masa que coincidan los tres momentos principales de inercia, tampoco se diferenciará de la conducta de una esfera.

De modo análogo, no se diferenciará la conducta de un prisma recto homogéneo con bases cuadradas de la conducta de un cilindro redondo homogéneo, lo mismo que la conducta de toda peonza simétrica, es decir, de sólidos de forma arbitraria, pero con semejante distribución de la masa que coincidan dos de los tres momentos principales de inercia.

ÍNDICE ALFÁBETICO DE MATERIAS